МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

УДК 517.929, 517.977

© *В. А. Зайцев, И. Г. Ким*

О НАЗНАЧЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПЕКТРА В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО СОСТОЯНИЮ ПРИ ПОМОЩИ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ[1]

Рассматривается управляемая система, заданная линейной стационарной системой дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{j=1}^{s}A_jx(t-jh)+Bu(t),\quad y(t)=C^*x(t),\quad t>0. \tag{1}$$

Управление в системе (1) строится в виде линейной обратной связи по выходу $u(t)=\sum\limits_{\rho=0}^{\theta}Q_\rho y(t-\rho h)$. Исследуется задача назначения произвольного спектра для замкнутой системы: требуется определить число θ и построить матрицы Q_ρ, $\rho=0,\dots,\theta$, обратной связи таким образом, чтобы характеристическая функция замкнутой системы с соизмеримыми запаздываниями обращалась в квазиполином с произвольными наперед заданными коэффициентами. Получены условия на коэффициенты системы (1), при которых найден критерий разрешимости данной задачи назначения произвольного спектра. Получены следствия о стабилизации системы (1) посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми запаздываниями. Рассмотрен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, соизмеримые запаздывания, задача назначения спектра, стабилизация, статическая обратная связь по выходу.

DOI: 10.20537/vm170303

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n=\{x=\operatorname{col}(x_1,\dots,x_n)\colon x_i\in\mathbb{K}\}$ — линейное n-мерное пространство векторов-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m\times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}):=M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I\in M_n(\mathbb{K})$ — единичная матрица; T — операция транспонирования вектора или матрицы; $*$ — операция эрмитова сопряжения вектора или матрицы, т. е. $A^*=\overline{A}^T$.

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими соизмеримыми запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{j=1}^{s}A_jx(t-jh)+Bu(t),\quad t>0, \tag{1}$$

$$y(t)=C^*x(t) \tag{2}$$

с начальными условиями $x(\tau)=\mu(\tau)$, $\tau\in[-sh,0]$; здесь $A,A_j\in M_n(\mathbb{K})$, $j=\overline{1,s}$; $B\in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C\in M_{n,k}(\mathbb{K})$; $h>0$ — постоянное запаздывание, $\mu\colon[-sh,0]\to\mathbb{K}^n$ — непрерывная функция; $x\in\mathbb{K}^n$ — фазовый вектор, $u\in\mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y\in\mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Задачам асимптотической (экспоненциальной) стабилизации и назначения спектра для систем с запаздыванием вида (1) и для систем более общего вида посредством обратной связи по состоянию посвящено огромное количество работ (см., к примеру, обзоры [1–5]). В [6] получены достаточные условия стабилизации, независимой от запаздывания, посредством статической

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

обратной связи по состоянию. Задача назначения спектра посредством статической полной обратной связи исследовалась в работах [7–12]. Работы [13–22] посвящены задачам назначения конечного спектра. В работах [23–25] были получены условия спектральной управляемости систем с запаздыванием. Задачи стабилизации систем с запаздыванием по выходу рассматривались в работах [26–28].

Настоящая работа продолжает исследования [29]. В работе [29] была исследована задача назначения *конечного* спектра для линейной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad y(t) = C^*x(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздыванием $u(t) = Q_0y(t)+$ $+Q_1y(t-h)$. В этой задаче требуется построить коэффициенты Q_0, Q_1 обратной связи таким образом, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы обращался в полином с произвольными наперед заданными коэффициентами. В [29] были получены условия на коэффициенты системы (3), при которых найден критерий разрешимости данной задачи назначения конечного спектра. Полученные результаты были распространены на системы с несколькими запаздываниями. В настоящей работе рассматривается более общая задача — задача назначения *произвольного* спектра. В этой задаче требуется с помощью линейной статической обратной связи по выходу привести характеристический квазиполином замкнутой системы к произвольному наперед заданному квазиполиному (а не только к квазиполиному, имеющему конечный спектр). В настоящей работе результаты [29] распространяются на задачу назначения произвольного спектра.

Будем обозначать через $\chi(Q;\lambda)$ и $\operatorname{Sp} Q$ соответственно характеристический многочлен и след матрицы $Q \in M_n(\mathbb{K})$; через $\operatorname{vec}\colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{mn}$ — отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$ по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{m1}, \ldots, h_{mn})$.

Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t-\rho h), \quad t > 0, \quad y(\tau) = 0, \quad \tau < -sh. \tag{4}$$

Здесь $\theta \geqslant 0$ — некоторое целое число, $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, — постоянные матрицы. Замкнутая система (1), (2), (4) принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A + BQ_0C^*)x(t) + \sum_{j=1}^{s} A_jx(t-jh) + \sum_{\rho=1}^{\theta} BQ_\rho C^*x(t-\rho h). \tag{5}$$

Обозначим через $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det\Big[\lambda I - \Big((A + BQ_0C^*) + \sum\limits_{j=1}^{s} e^{-\lambda hj}A_j + \sum\limits_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda h\rho}BQ_\rho C^*\Big)\Big]$ характеристический квазиполином замкнутой системы (5).

Определение 1. Для системы (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора* (4), если для любого целого $\ell \geqslant 0$ и для любых наперед заданных $\delta_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,\ell}$, найдутся число $\theta \geqslant 0$ и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристический квазиполином $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h})$ замкнутой системы (5) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\ell} \delta_{ij}\lambda^{n-i}e^{-\lambda hj}.$$

Пусть коэффициенты A, B, C системы (1), (2) имеют следующий специальный вид (см. [30]): матрица A имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots\dots & & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & & a_{nn}\end{Vmatrix},\qquad a_{i,i+1}\neq 0,\quad i=\overline{1,n-1}; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} B=\begin{Vmatrix} O_1\\ L\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} N\\ O_2\end{Vmatrix},\quad O_1=0\in M_{p-1,m}(\mathbb{K}),\quad L\in M_{n-p+1,m}(\mathbb{K}),\\ N\in M_{p,k}(\mathbb{K}),\quad O_2=0\in M_{n-p,k}(\mathbb{K}),\quad p\in\{1,\dots,n\}.\end{gathered} \tag{7}$$

Будем предполагать, что матрицы A_j, $j=\overline{1,s}$, системы (1) также имеют специальный вид (см. [31, 32]): первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_j равны нулю, то есть

$$A_j=\begin{Vmatrix} 0 & 0\\ \widehat{A}_j & 0\end{Vmatrix},\quad \widehat{A}_j\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad j=\overline{1,s},\qquad p\in\{1,\dots,n\}. \tag{8}$$

Здесь число p то же самое, что и в (7).

Пусть $\chi(A;\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_n$. Положим $\alpha_0:=1$. Построим по матрице A матрицы

$$F_\nu=\alpha_0A^\nu+\alpha_1A^{\nu-1}+\ldots+\alpha_\nu I,\quad \nu=\overline{0,n-1}. \tag{9}$$

В дальнейшем используется следующая лемма (см. [29, лемма 1]).

Лемма 1. *Пусть матрица A имеет вид (6), а матрица $D\in M_n(\mathbb{K})$ имеет следующий вид:*

$$D=\begin{Vmatrix} 0 & 0\\ D_1 & 0\end{Vmatrix},\quad D_1\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad p\in\{1,\dots,n\}. \tag{10}$$

Пусть $\chi(A+D;\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$. Тогда $\gamma_i=\alpha_i-\operatorname{Sp}(DF_{i-1})$ для всех $i=1,\dots,n$.

Теорема 1. *Пусть матрицы A, B, C, A_j, $j=\overline{1,s}$, системы (1), (2) имеют специальный вид (6), (7), (8). Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы*

$$C^*B,\ C^*AB,\ \dots,\ C^*A^{n-1}B \tag{11}$$

линейно независимы.

2. *Для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (4).*

Доказательство. Предположим, что матрицы A, B, C, A_j, $j=\overline{1,s}$, системы (1), (2) имеют специальный вид (6), (7), (8). Рассмотрим задачу назначения произвольного спектра системы (1), (2) посредством регулятора (4). Пусть заданы число $\ell\geqslant 0$ и квазимногочлен

$$q(\lambda,e^{-\lambda h})=\lambda^n+\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^{\ell}\delta_{ij}\lambda^{n-i}e^{-\lambda hj}, \tag{12}$$

$\delta_{ij}\in\mathbb{K}$. Требуется найти целое число $\theta\geqslant 0$ и построить матрицы $Q_0,\dots,Q_\theta\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ так, чтобы характеристический квазиполином $\varphi(\lambda,e^{-\lambda h})$ замкнутой системы (5) удовлетворял равенству

$$\varphi(\lambda,e^{-\lambda h})=q(\lambda,e^{-\lambda h}). \tag{13}$$

Обозначим

$$D = BQ_0C^* + \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda hj} A_j + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda h\rho} BQ_\rho C^*. \tag{14}$$

Имеем

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det\big(\lambda I - (A + D)\big) = \chi(A + D; \lambda). \tag{15}$$

Из условий (7), (8) следует, что матрица (14) имеет вид (10), где

$$D_1 = LQ_0N^* + \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda hj} \widehat{A}_j + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda h\rho} LQ_\rho N^*.$$

Учитывая равенства (15), (13), (12), условие (6) и применяя лемму 1, получаем, что для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (4) тогда и только тогда, когда найдутся число $\theta \geqslant 0$ и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta$ такие, что для всех $i = \overline{1, n}$ выполнены равенства

$$\sum_{j=0}^{\ell} \delta_{ij} e^{-\lambda hj} = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda hj} \mathrm{Sp}\,(A_jF_{i-1}) - \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda h\rho} \mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^*F_{i-1}). \tag{16}$$

Положим $\theta = \max\{\ell, s\}$. Обозначим $\eta = \min\{\ell, s\}$. Рассмотрим два случая: $\ell \leqslant s$ и $\ell > s$.

Если $\ell \leqslant s$, то $\theta = s$, и равенства (16) принимают вид

$$\sum_{j=0}^{\ell} \delta_{ij} e^{-\lambda hj} = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - \Big(\sum_{j=1}^{\ell} e^{-\lambda hj} \mathrm{Sp}\,\big((A_j + BQ_jC^*)F_{i-1}\big) + \\ + \sum_{j=\ell+1}^{s} e^{-\lambda hj} \mathrm{Sp}\,\big((A_j + BQ_jC^*)F_{i-1}\big)\Big). \tag{17}$$

Если $\ell > s$, то $\theta = \ell$, и равенства (16) принимают вид

$$\sum_{j=0}^{\ell} \delta_{ij} e^{-\lambda hj} = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - \Big(\sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda hj} \mathrm{Sp}\,\big((A_j + BQ_jC^*)F_{i-1}\big) + \\ + \sum_{j=s+1}^{\ell} e^{-\lambda hj} \mathrm{Sp}\,(BQ_jC^*F_{i-1})\Big). \tag{18}$$

Равенства (17), (18) имеют место для всех $i = \overline{1, n}$ тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{1, n}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
\delta_{i0} &= \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}), && \\
\delta_{ij} &= -\mathrm{Sp}\,\Big(\big(A_j + BQ_jC^*\big)F_{i-1}\Big), && j = \overline{1, \eta}, \\
0 &= -\mathrm{Sp}\,\Big(\big(A_j + BQ_jC^*\big)F_{i-1}\Big), && j = \overline{\ell + 1, s}, \quad \text{если } \ell \leqslant s, \\
\delta_{ij} &= -\mathrm{Sp}\,(BQ_jC^*F_{i-1}), && j = \overline{s + 1, \ell}, \quad \text{если } \ell > s.
\end{aligned} \tag{19}$$

Имеем

$$\mathrm{Sp}\,(BQ_jC^*F_{i-1}) = \mathrm{Sp}\,(Q_jC^*F_{i-1}B) = \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r} \mathrm{Sp}\,(Q_jC^*A^rB), \quad j = \overline{0, \theta}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Поэтому равенства (19) равносильны $(1+\theta)$ системам линейных уравнений $(i=\overline{1,n})$

$$\begin{aligned}
\delta_{i0} &= \alpha_i - \sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_0C^*A^rB), \\
\delta_{ij} &= -\mathrm{Sp}\,(A_jF_{i-1}) - \sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_jC^*A^rB), \qquad j=\overline{1,\eta}, \\
0 &= -\mathrm{Sp}\,(A_jF_{i-1}) - \sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_jC^*A^rB), \qquad j=\overline{\ell+1,s}, \quad \text{если } \ell\leqslant s, \\
\delta_{ij} &= - \sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_jC^*A^rB), \qquad j=\overline{s+1,\ell}, \quad \text{если } \ell> s.
\end{aligned} \tag{20}$$

Каждая j-я система в (20) состоит из n уравнений с mk неизвестными элементами матрицы Q_j, $j=\overline{0,\theta}$. Перепишем системы (20) в векторном виде. Для этого воспользуемся равенством $\mathrm{Sp}\,(XY)=(\mathrm{vec}\,Y)^T\cdot(\mathrm{vec}\,X^T)$. Применим это равенство к матрицам $Y=C^*A^rB$, $r=\overline{0,n-1}$, $X=Q_j$, $j=\overline{0,\theta}$. Построим матрицы $G\in M_n(\mathbb{K})$, $P\in M_{mk,n}(\mathbb{K})$ (см. [32]):

$$G:=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 \end{Vmatrix}, \quad P:=[\mathrm{vec}\,(C^*B),\mathrm{vec}\,(C^*AB),\dots,\mathrm{vec}\,(C^*A^{n-1}B)]. \tag{21}$$

Обозначим $v_j:=\mathrm{vec}\,(Q_j^T)\in\mathbb{K}^{mk}$, $j=\overline{0,\theta}$,

$$\begin{aligned}
w_0 &:= \mathrm{col}\,(\alpha_1-\delta_{10},\dots,\alpha_n-\delta_{n0})\in\mathbb{K}^n, \\
w_j &:= \mathrm{col}\,(-\delta_{1j}-\mathrm{Sp}\,(A_jF_0),\dots,-\delta_{nj}-\mathrm{Sp}\,(A_jF_{n-1}))\in\mathbb{K}^n, \qquad j=\overline{1,\eta}, \\
w_j &:= \mathrm{col}\,(-\mathrm{Sp}\,(A_jF_0),\dots,-\mathrm{Sp}\,(A_jF_{n-1}))\in\mathbb{K}^n, \qquad j=\overline{\ell+1,s}, \quad \text{если } \ell\leqslant s, \\
w_j &:= \mathrm{col}\,(-\delta_{1j},\dots,-\delta_{nj})\in\mathbb{K}^n, \qquad j=\overline{s+1,\ell}, \quad \text{если } \ell> s.
\end{aligned}$$

Тогда системы (20) можно записать в векторном виде $GP^Tv_j=w_j$, $j=\overline{0,\theta}$, или, что равносильно, в матричном виде

$$GP^TV=W, \tag{22}$$

где $V=[v_0,\dots,v_\theta]\in M_{mk,1+\theta}(\mathbb{K})$, $W=[w_0,\dots,w_\theta]\in M_{n,1+\theta}(\mathbb{K})$.

Пусть матрицы (11) линейно независимы. Тогда $\mathrm{rank}\,P=n$ и система (22) разрешима относительно V для любого набора $\delta_{ij}\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,\ell}$. В частности, система (22) имеет решение $v_j=P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_j$, $j=\overline{0,\theta}$. Следовательно, для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (4). Искомые матрицы $Q_0,\dots,Q_\theta$ находятся из равенств $Q_j=(\mathrm{vec}^{-1}v_j)^T$, $j=\overline{0,\theta}$.

Если матрицы (11) линейно зависимы, то $\mathrm{rank}\,P<n$ и для $\delta_{ij}\in\mathbb{K}$ таких, что $w_j\notin\mathrm{Im}\,(GP^T)$ для некоторого $j\in\{\overline{0,\ell}\}$, система (22) неразрешима (здесь Im — это образ матричного оператора). Следовательно, задача назначения произвольного спектра системы (1), (2) посредством регулятора (4) неразрешима. □

Замечание 1. Теорема 1 обобщает теорему 1 [32] на системы с запаздыванием. □

Рассмотрим задачу стабилизации системы (1), (2) посредством обратной связи (4): требуется построить $\theta\geqslant 0$ и Q_ρ, $\rho=\overline{0,\theta}$, так, чтобы замкнутая система была асимптотически устойчивой. Система (5) является асимптотически устойчивой, если спектр σ системы (5) лежит в левой полуплоскости $\omega=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\lambda<0\}$. Если задача назначения произвольного спектра разрешима, то, выбирая квазимногочлен (12) так, что его корни лежат в области ω, можно добиться асимптотической устойчивости замкнутой системы. Таким образом, из теоремы 1 вытекает очевидное следствие.

Следствие 1. *Пусть матрицы A, B, C, A_j, $j=\overline{1,s}$, системы (1), (2) имеют специальный вид (6), (7), (8) и матрицы (11) линейно независимы. Тогда система (1), (2) стабилизируема посредством обратной связи (4).*

Пример 1. Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение теоремы 1. Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $n=4$, $m=2$, $k=2$, $s=2$, и коэффициенты системы (1), (2) имеют следующий вид:

$$A=\begin{Vmatrix}1&1&0&0\\-1&0&1&0\\1&0&0&1\\-1&0&0&0\end{Vmatrix},\quad A_1=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix},\quad A_2=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix},$$

$$B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&i\\-i&1\\i&0\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&1\\-i&0\\0&0\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты системы удовлетворяют условиям теоремы 1, то есть имеют специальный вид (6), (7), (8), где $p=2$. Имеем $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=-1$, $\alpha_4=1$. Построим матрицы (11):

$$C^*B=\begin{Vmatrix}i&-1\\0&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}2&2i\\1&i\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}-2i&2+i\\1-i&1+i\end{Vmatrix},\quad C^*A^3B=\begin{Vmatrix}-1&1-i\\0&1\end{Vmatrix}. \qquad (23)$$

Построим матрицы (21):

$$G=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{Vmatrix},\quad P=\begin{Vmatrix}i&2&-2i&-1\\-1&2i&2+i&1-i\\0&1&1-i&0\\0&i&1+i&1\end{Vmatrix}.$$

Имеем $\det P=1$. Значит, $\operatorname{rank} P=4=n$, следовательно, матрицы (23) линейно независимы. Таким образом, по теореме 1 для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (4). Построим такой регулятор. Пусть, к примеру,

$$q(\lambda,e^{-\lambda h})=(\lambda+1)(\lambda+e^{-\lambda h})^3=\lambda^4+\lambda^3+3\lambda^3e^{-\lambda h}+3\lambda^2e^{-\lambda h}+3\lambda^2e^{-2\lambda h}+3\lambda e^{-2\lambda h}+\lambda e^{-3\lambda h}+e^{-3\lambda h}.$$

Тогда $\ell=3$, $\ell>s$,

$$\begin{aligned}&\delta_{10}=1,\quad \delta_{11}=3,\quad \delta_{12}=0,\quad \delta_{13}=0,\quad \delta_{20}=0,\quad \delta_{21}=3,\quad \delta_{22}=3,\quad \delta_{23}=0,\\&\delta_{30}=0,\quad \delta_{31}=0,\quad \delta_{32}=3,\quad \delta_{33}=1,\quad \delta_{40}=0,\quad \delta_{41}=0,\quad \delta_{42}=0,\quad \delta_{43}=1.\end{aligned}$$

Используя доказательство теоремы 1, получаем $\theta=3$, $\eta=2$. Вычислим матрицы F_0, F_1, F_2, F_3 по формуле (9), получим $F_0=I$,

$$F_1=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\-1&-1&1&0\\1&0&-1&1\\-1&0&0&-1\end{Vmatrix},\quad F_2=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\1&0&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-1&0&1\end{Vmatrix},\quad F_3=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\-1&0&0&-1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&-1\end{Vmatrix}.$$

Далее, вычислим

$$\begin{aligned}&\operatorname{Sp}(A_1F_0)=1,\quad \operatorname{Sp}(A_1F_1)=1,\quad \operatorname{Sp}(A_1F_2)=-2,\quad \operatorname{Sp}(A_1F_3)=1,\\&\operatorname{Sp}(A_2F_0)=-1,\quad \operatorname{Sp}(A_2F_1)=2,\quad \operatorname{Sp}(A_2F_2)=0,\quad \operatorname{Sp}(A_2F_3)=-1.\end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
w_0 &= \operatorname{col}(\alpha_1-\delta_{10},\alpha_2-\delta_{20},\alpha_3-\delta_{30},\alpha_4-\delta_{40}) = \operatorname{col}(-2,1,-1,1),\\
w_1 &= \operatorname{col}\big(-\delta_{11}-\operatorname{Sp}(A_1F_0),-\delta_{21}-\operatorname{Sp}(A_1F_1),-\delta_{31}-\operatorname{Sp}(A_1F_2),-\delta_{41}-\operatorname{Sp}(A_1F_3)\big) =\\
&= \operatorname{col}(-4,-4,2,-1),\\
w_2 &= \operatorname{col}\big(-\delta_{12}-\operatorname{Sp}(A_2F_0),-\delta_{22}-\operatorname{Sp}(A_2F_1),-\delta_{32}-\operatorname{Sp}(A_2F_2),-\delta_{42}-\operatorname{Sp}(A_2F_3)\big) =\\
&= \operatorname{col}(1,-5,-3,1),\\
w_3 &= \operatorname{col}(-\delta_{13},-\delta_{23},-\delta_{33},-\delta_{43}) = \operatorname{col}(0,0,-1,-1).
\end{aligned}$$

Вычисляя v_j по формулам $v_j = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_j$, $j=\overline{0,3}$, получаем

$$v_0 = \operatorname{col}(-1-i,3-i,2-i,-3+3i), \qquad v_1 = \operatorname{col}(-6+4i,-6i,2-9i,1+10i),$$
$$v_2 = \operatorname{col}(4+5i,-6+4i,-9-2i,4-5i), \qquad v_3 = \operatorname{col}(1,i,-1+2i,-2-i).$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{Vmatrix} -1-i & 2-i \\ 3-i & -3+3i \end{Vmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{Vmatrix} -6+4i & 2-9i \\ -6i & 1+10i \end{Vmatrix}, \tag{24}$$
$$Q_2 = \begin{Vmatrix} 4+5i & -9-2i \\ -6+4i & 4-5i \end{Vmatrix}, \qquad Q_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -1+2i \\ i & -2-i \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

Система (1), (2), замкнутая управлением (4) с матрицами (24), (25), принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot x(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2-2i & -2 & 1 & 0 \\ -1+i & 2i & 0 & 1 \\ 1+i & 1+i & 0 & 0 \end{Vmatrix} x(t) + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7-4i & -3 & 0 & 0 \\ -5+8i & 1+4i & 0 & 0 \\ 6-4i & 6-4i & 0 & 0 \end{Vmatrix} x(t-h) +\\
+ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 4i & -i & 0 & 0 \\ -3-5i & -3-5i & 0 & 0 \end{Vmatrix} x(t-2h) + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} x(t-3h).
\end{aligned} \tag{26}$$

Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h})$ замкнутой системы (26), получаем, что $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = (\lambda+1)(\lambda+e^{-\lambda h})^3$. В частности, система (26) экспоненциально устойчива, если $h < \pi/2$ (см., к примеру, [33]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang Q.-G., Lee T.H., Tan K.K. Finite spectrum assignment for time-delay systems. London: Springer, 1998. 124 p.
2. Gu K., Niculescu S.-I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2003. Vol. 125. Issue 2. P. 158–165. DOI: 10.1115/1.1569950
3. Richard J.P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. Vol. 39. Issue 10. P. 1667–1694. DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00167-5
4. Michiels W., Niculescu S.-I. Stability and stabilization of time-delay systems. An eigenvalue-based approach. Philadelphia: SIAM, 2007. 378 p.
5. Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C.T., Michiels W., Gu K. Stability and stabilization of systems with time delay // IEEE Control Systems. 2011. Vol. 31. Issue 1. P. 38–65. DOI: 10.1109/MCS.2010.939135
6. Kamen E.W. Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. Vol. 27. Issue 2. P. 367–375. DOI: 10.1109/TAC.1982.1102916
7. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems // Automatica. 1976. Vol. 12. Issue 5. P. 529–531. DOI: 10.1016/0005-1098(76)90013-3

8. Асмыкович И.К., Марченко В.М. Управление спектром систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. Вып. 7. С. 5–14.
9. Olbrot A.W. Stabilizability, detectability, and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1978. Vol. 23. Issue 5. P. 887–890. DOI: 10.1109/TAC.1978.1101879
10. Асмыкович И.К., Марченко В.М. Модальное управление многовходными линейными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1980. Вып. 1. С. 5–10.
11. Lee E.B., Zak S.H. On spectrum placement for linear time invariant delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. Vol. 27. Issue 2. P. 446–449. DOI: 10.1109/TAC.1982.1102931
12. Марченко В.М. Модальное управление в системах с последействием // Автоматика и телемеханика. 1988. Вып. 11. С. 73–84.
13. Manitius A., Olbrot A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24. Issue 4. P. 541–552. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102124
14. Watanabe K., Ito M., Kaneko M., Ouchi T. Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variables // IEEE Transactions on Automatic Control. 1983. Vol. 28. Issue 4. P. 506–508. DOI: 10.1109/TAC.1983.1103258
15. Watanabe K., Ito M., Kaneko M. Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables // International Journal of Control. 1983. Vol. 38. Issue 5. P. 913–926. DOI: 10.1080/00207178308933119
16. Watanabe K., Ito M., Kaneko M. Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays in states and control // International Journal of Control. 1984. Vol. 39. Issue 5. P. 1073–1082. DOI: 10.1080/00207178408933233
17. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivarible systems with commensurate delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. Issue 6. P. 543–550. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104336
18. Watanabe K., Yamada K., Okuyama T., Takahashi K. A new algorithm for finite spectrum assignment of multivarible systems with time delays // Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control. 1995. P. 1489–1494. DOI: 10.1109/CDC.1995.480313
19. Mondie S., Michiels W., Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. Issue 12. P. 2207–2212. DOI: 10.1109/TAC.2003.820147
20. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a delay type system // Differential Equations. 2014. Vol. 50. Issue 5. P. 689–699. DOI: 10.1134/S0012266114050115
21. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a differential system of neutral type // Differential Equations. 2015. Vol. 51. Issue 1. P. 69–82. DOI: 10.1134/S0012266115010073
22. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment and complete damping of a differential system of the neutral type by a single controller // Differential Equations. 2016. Vol. 52. Issue 1. P. 92–110. DOI: 10.1134/S0012266116010080
23. Manitius A.Z., Manousiouthakis V. On spectral controllability of multi-input time-delay systems // Systems and Control Letters. 1985. Vol. 6. Issue 3. P. 199–205. DOI: 10.1016/0167-6911(85)90041-6
24. Spong M.W., Tarn T.J. On the spectral controllability of delay-differential equations // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. 26. Issue 2. P. 527–528. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102654
25. Watanabe K., Ito M. A necessary condition for spectral controllability of delay systems on the basis of finite Laplace transforms // International Journal of Control. 1984. Vol. 39. Issue 2. P. 363–374. DOI: 10.1080/00207178408933171
26. Kharitonov V.L., Niculescu S.-I., Moreno J., Michiels W. Static output feedback stabilization: necessary conditions for multiple delay controllers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. Vol. 50. Issue 1. P. 82–86. DOI: 10.1109/TAC.2004.841137
27. Бобцов А.А. Стабилизация нелинейных систем по выходу в условиях запаздывания // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 21–28.
28. Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А. Стабилизация нелинейного объекта с входным запаздыванием и синусоидальным возмущающим воздействием // Автоматика и телемеханика. 2015. Вып. 1. С. 21–30.
29. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 463–473. DOI: 10.20537/vm160402

30. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback // Differential Equations. 2009. Vol. 45. Issue 9. P. 1348–1357. DOI: 10.1134/S0012266109090109
31. Zaitsev V.A. Control of spectrum in bilinear systems // Differential Equations. 2010. Vol. 46. Issue 7. P. 1071–1075. DOI: 10.1134/S0012266110070153
32. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem // Differential Equations. 2010. Vol. 46. Issue 12. P. 1789–1793. DOI: 10.1134/S0012266110120128
33. Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 786–789. DOI: 10.4213/mzm603

Поступила в редакцию 20.04.2017

Зайцев Василий Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

Ким Инна Геральдовна, старший преподаватель, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kimingeral@gmail.com

V. A. Zaitsev, I. G. Kim

On arbitrary spectrum assignment in linear stationary systems with commensurate time delays in state variables by static output feedback

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 315–325 (in Russian).

Keywords: linear delay systems, commensurate time delays, spectrum assignment problem, stabilization, static output feedback.

MSC2010: 93B60, 93B55, 93B52, 93D20, 93C15, 93C05, 34H15

DOI: 10.20537/vm170303

We consider a control system defined by a linear time-invariant system of differential equations with commensurate delays in state

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{s} A_j x(t - jh) + Bu(t), \quad y(t) = C^* x(t), \quad t > 0. \tag{1}$$

We construct a controller for the system (1) as linear static output feedback $u(t) = \sum\limits_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t - \rho h)$. We study an arbitrary spectrum assignment problem for the closed-loop system. One needs to define a θ and to construct gain matrices Q_ρ, $\rho = 0, \ldots, \theta$, such that the characteristic function of the closed-loop system with commensurate delays becomes a quasipolynomial with arbitrary preassigned coefficients. We obtain conditions on coefficients of the system (1) under which the criterion is found for solvability of the problem of arbitrary spectrum assignment. Corollaries on stabilization by linear static output feedback with commensurate delays are obtained for the system (1). An illustrative example is considered.

REFERENCES

1. Wang Q.-G., Lee T.H., Tan K.K. *Finite spectrum assignment for time-delay systems*, London: Springer, 1998, 124 p.
2. Gu K., Niculescu S.-I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2003, vol. 125, issue 2, pp. 158–165. DOI: 10.1115/1.1569950
3. Richard J.P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, 2003, vol. 39, issue 10, pp. 1667–1694. DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00167-5

4. Michiels W., Niculescu S.-I. *Stability and stabilization of time-delay systems. An eigenvalue-based approach*, Philadelphia: SIAM, 2007, 378 p.
5. Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C.T., Michiels W., Gu K. Stability and stabilization of systems with time delay, *IEEE Control Systems*, 2011, vol. 31, issue 1, pp. 38–65. DOI: 10.1109/MCS.2010.939135
6. Kamen E.W. Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, vol. 27, issue 2, pp. 367–375. DOI: 10.1109/TAC.1982.1102916
7. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems, *Automatica*, 1976, vol. 12, issue 5, pp. 529–531. DOI: 10.1016/0005-1098(76)90013-3
8. Asmykovich I.K., Marchenko V.M. Spectrum control in systems with delay, *Automation and Remote Control*, 1976, vol. 37, no. 7, pp. 975–984.
9. Olbrot A.W. Stabilizability, detectability, and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, vol. 23, issue 5, pp. 887–890. DOI: 10.1109/TAC.1978.1101879
10. Asmykovich I.K., Marchenko V.M. Modal control of multiinput linear delayed systems, *Automation and Remote Control*, 1980, vol. 41, no. 1, pp. 1–5.
11. Lee E.B., Zak S.H. On spectrum placement for linear time invariant delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, vol. 27, issue 2, pp. 446–449. DOI: 10.1109/TAC.1982.1102931
12. Marchenko V.M. Modal control in systems with delay, *Automation and Remote Control*, 1988, vol. 49, no. 11, pp. 1449–1457.
13. Manitius A., Olbrot A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, issue 4, pp. 541–552. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102124
14. Watanabe K., Ito M., Kaneko M., Ouchi T. Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variables, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1983, vol. 28, issue 4, pp. 506–508. DOI: 10.1109/TAC.1983.1103258
15. Watanabe K., Ito M., Kaneko M. Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables, *International Journal of Control*, 1983, vol. 38, issue 5, pp. 913–926. DOI: 10.1080/00207178308933119
16. Watanabe K., Ito M., Kaneko M. Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays in states and control, *International Journal of Control*, 1984, vol. 39, issue 5, pp. 1073–1082. DOI: 10.1080/00207178408933233
17. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivarible systems with commensurate delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, issue 6, pp. 543–550. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104336
18. Watanabe K., Yamada K., Okuyama T., Takahashi K. A new algorithm for finite spectrum assignment of multivarible systems with time delays, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 1995, pp. 1489–1494. DOI: 10.1109/CDC.1995.480313
19. Mondie S., Michiels W., Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, issue 12, pp. 2207–2212. DOI: 10.1109/TAC.2003.820147
20. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a delay type system, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 5, pp. 689–699. DOI: 10.1134/S0012266114050115
21. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a differential system of neutral type, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 1, pp. 69–82. DOI: 10.1134/S0012266115010073
22. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment and complete damping of a differential system of the neutral type by a single controller, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 1, pp. 92–110. DOI: 10.1134/S0012266116010080
23. Manitius A.Z., Manousiouthakis V. On spectral controllability of multi-input time-delay systems, *Systems and Control Letters*, 1985, vol. 6, issue 3, pp. 199–205. DOI: 10.1016/0167-6911(85)90041-6
24. Spong M.W., Tarn T.J. On the spectral controllability of delay-differential equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, vol. 26, issue 2, pp. 527–528. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102654
25. Watanabe K., Ito M. A necessary condition for spectral controllability of delay systems on the basis of finite Laplace transforms, *International Journal of Control*, 1984, vol. 39, issue 2, pp. 363–374. DOI: 10.1080/00207178408933171
26. Kharitonov V.L., Niculescu S.-I., Moreno J., Michiels W. Static output feedback stabilization: necessary conditions for multiple delay controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, vol. 50, issue 1, pp. 82–86. DOI: 10.1109/TAC.2004.841137
27. Bobtsov A.A. Output stabilization of nonlinear systems under delay conditions, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, issue 2, pp. 179–186. DOI: 10.1134/S1064230708020020

28. Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Stabilization of a nonlinear plant with input delay and sinusoidal perturbation, *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 1, pp. 16–23. DOI: 10.1134/S0005117915010026
29. Zaitsev V.A., Kim I.G. Finite spectrum assignment problem in linear systems with state delay by static output feedback, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 463–473. DOI: 10.20537/vm160402
30. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, issue 9, pp. 1348–1357. DOI: 10.1134/S0012266109090109
31. Zaitsev V.A. Control of spectrum in bilinear systems, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 7, pp. 1071–1075. DOI: 10.1134/S0012266110070153
32. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem // Differential Equations. 2010. Vol. 46. Issue 12. P. 1789–1793. DOI: 10.1134/S0012266110120128
33. Vaguina M.Yu., Kipnis M.M. Stability of the zero solution of delay differential equations, *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, issue 5–6, pp. 740–743. DOI: 10.1023/B:MATN.0000009007.19235.5a

Received 20.04.2017

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru

Kim Inna Geral'dovna, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kimingeral@gmail.com