ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

УДК 517.977.8, 519.837.4

© *А. С. Банников*

УКЛОНЕНИЕ ОТ ГРУППЫ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Рассматривается задача уклонения убегающего от группы преследователей в конечномерном евклидовом пространстве. Движение описывается линейной системой дробного порядка вида

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}z_i\right) = Az_i + u_i - v,$$

где ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции f, A — простая матрица. В начальный момент времени заданы начальные условия. Управления игроков ограничены одним и тем же выпуклым компактом. Убегающий дополнительно стеснен фазовыми ограничениями — выпуклым многогранным множеством с непустой внутренностью. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия разрешимости задачи уклонения.

Ключевые слова: дифференциальные игры, производная по Капуто, уклонение, простая матрица.

DOI: 10.20537/vm170302

Введение

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования–уклонения с участием нескольких объектов [1–3], причем, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [4–7] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В настоящей работе рассматривается одна задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что движение всех участников описывается линейными уравнениями с дробными по Капуто производными, матрица системы — простая, а убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Получены достаточные условия уклонения, выраженные в терминах начальных позиций и параметров игры. Работа продолжает исследования [8].

Определение 1 (см. [9, с. 97]). Пусть $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерыная функция и $\alpha \in (0,1)$. *Производной по Капуто порядка* α функции f называется функция ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}f$ вида

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей P_i, $i = 1,\ldots,n$, и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}x_i\right)(t) = ax_i(t) + u_i(t), \qquad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in Q. \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16–01–000346-а).

Закон движения убегающего имеет вид

$$\left({}^C D^{\alpha}_{0+}y\right)(t) = ay(t) + v(t), \quad y(0) = y^0, \quad v \in Q. \tag{0.2}$$

Здесь $\alpha \in (0,1)$, x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, Q — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Считаем, что $x_i^0 \neq y^0$ для всех i. Дополнительно предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \left\{\xi \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \langle p_j, \xi\rangle \leqslant \mu_j, \quad j = 1, \ldots, r, \quad r \geqslant 0\right\},$$

где p_j, $j = 1, \ldots, r$, — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, μ_j, $j = 1, \ldots, r$, — вещественные числа, такие, что $\operatorname{int}\Omega \neq 0$; при $r = 0$ считаем, что $\Omega = \mathbb{R}^k$.

Вместо систем (0.1), (0.2) рассмотрим системы

$$\left({}^C D^{\alpha}_{0+}z_i\right)(t) = az_i(t) + u_i(t) - v(t), \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad u_i, v \in Q. \tag{0.3}$$

Пусть $T > 0$ — произвольное положительное число, $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+1=T}\}$ — конечное разбиение отрезка $[0, T]$.

Определение 2. *Кусочно-программной стратегией* S_E убегающего E, заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений b_l, $l = 0, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, z_1(t_l), \ldots, z_n(t_l))$ измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $v_l(t) \in Q$, $y(t) \in \Omega$ для всех $t \in [t_l, t_{l+1}]$.

Определение 3. *Кусочно-программной контрстратегией* CS_{P_i} преследователя P_i, заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c_l, $l = 0, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, z_1(t_l), \ldots, z_n(t_l))$ и управлению $v_l(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in Q$ для всех $t \in [t_l, t_{l+1}]$.

Определение 4. В дифференциальной игре происходит *уклонение от встречи*, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ отрезка $[0, T]$ и стратегия S_E убегающего E такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ преследователей P_i выполнено

$$x_i(t) \neq y(t), \quad t \in [0, T].$$

Пусть далее $\operatorname{Int} A$ и $\operatorname{co} A$ — внутренность и выпуклая оболочка множества A соответственно, $I(l) = \{1, 2, \ldots, n + l\}$, $E_\rho(z; \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$ — обобщенная функция Миттаг-Леффлера,

$$\lambda_i(v) = \max\left\{\lambda \geqslant 0 \,\middle|\, -\lambda z_i^0 \in Q - v\right\}, \quad i \in I(0), \qquad \lambda_{n+j}(v) = \langle p_j, v\rangle, \quad j = 1, \ldots, r,$$
$$\delta_r = \min_{v \in Q} \max_{l \in I(r)} \lambda_l(v).$$

§ 1. Достаточные условия уклонения от встречи

Теорема 1. *Пусть* $r = 0$ $(\Omega = \mathbb{R}^k)$, $\delta_0 = 0$. *Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in Q$ такой, что

$$\lambda_i(v_0) = 0 \text{ для всех } i \in I(0).$$

Пусть $T > 0$ — произвольное положительное число. Зададим стратегию убегающего E, полагая

$$\sigma = \{0, T\}, \quad v(t) = v_0 \text{ для всех } t \in [0, T].$$

Пусть $u_i(t)$ — произвольное допустимое управление преследователя P_i. Тогда решения систем (0.3) представимы в виде

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)z_i^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha; \alpha)(u_i(\tau) - v_0)\, d\tau =$$
$$= E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)z_i^0 + t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha+1)(\bar{u_i}^t - v_0),$$

где

$$\bar{u_i}^t = \frac{\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha; \alpha) u_i(\tau)\, d\tau}{t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha+1)} \in Q.$$

Действительно, из теоремы 4.1.1 [10, с. 101] следует, что при $0 < \alpha < 1$ функции $E_{1/\alpha}(z; 1)$ и $E_{1/\alpha}(z; \alpha+1)$ положительны при всех $z \in \mathbb{R}^1$, поэтому при любом значении a и при всех $t > 0$ $\bar{u_i}^t \in Q$ в силу выпуклости Q.

Покажем, что $z_i(t) \neq 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$ при всех $0 < t \leqslant T$. Рассуждаем от противного. Если бы для некоторого i_0 нашелся момент времени t^* такой, что было бы выполнено равенство $z_{i_0}(t^*) = 0$, это означало бы, что $\bar{u_{i_0}}^{t^*} = v_0 - \dfrac{E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)}{t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha+1)} z_i^0$. В силу определения λ_{i_0} это означало бы, что $\lambda_{i_0}(v_0) \geqslant \dfrac{E_{1/\alpha}(a(t^*)^\alpha; 1)}{t^\alpha E_{1/\alpha}(a(t^*)^\alpha; \alpha+1)} > 0$, что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Пусть $r = 0$ ($\Omega = \mathbb{R}^k$), V — выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \left\{z_1^0, \ldots, z_n^0\right\}.$$

Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Из условий следствия и [1, с. 15] вытекает, что $\delta_0 = 0$, т. е. в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи в силу теоремы 1. □

Теорема 2. *Пусть $r = 1$, $\delta_1 = 0$ и $a\mu_1 \leqslant 0$. Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in Q$ такой, что

$$\lambda_i(v_0) = 0 \text{ для всех } i \in I(0), \qquad \lambda_{n+1}(v_0) = \langle p_1, v_0\rangle \leqslant 0.$$

Из теоремы 1 следует, что если для произвольного $T > 0$ взять разбиение $\sigma = \{0, T\}$ и $v(t) = v_0$, то ни один из преследователей P_i не догонит убегающего E, так как равенство $z_i(t) = 0$ невозможно в силу $\lambda_i(v_0) = 0$, $i \in I(0)$. Осталось лишь убедиться, что убегающий не покидает пределы множества Ω. Рассмотрим скалярное произведение $\langle p_1, y(t)\rangle$:

$$\langle p_1, y(t)\rangle = E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)\langle p_1, y^0\rangle + t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha+1)\langle p_1, v_0\rangle \leqslant E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)\langle p_1, y^0\rangle.$$

При $a < 0$ функция $E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)$ монотонно убывает на отрезке $[0, T]$ от $E_{1/\alpha}(0; 1) = 1$ до $E_{1/\alpha}(aT^\alpha; 1) > 0$, так как ее производная $\frac{d}{dt} E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) = at^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha) < 0$ при всех $t > 0$. Поэтому при $\mu_1 \geqslant 0$ и при всех $t > 0$

$$\langle p_1, y(t)\rangle \leqslant E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)\langle p_1, y^0\rangle \leqslant \mu_1.$$

При $a = 0$ $E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) = E_{1/\alpha}(0; 1) = 1$, поэтому для любого μ_1 и при всех $t > 0$

$$\langle p_1, y(t)\rangle \leqslant E_{1/\alpha}(0; 1)\langle p_1, y^0\rangle \leqslant \mu_1.$$

При $a > 0$ функция $E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, T]$ от $E_{1/\alpha}(0; 1) = 1$ до $E_{1/\alpha}(aT^\alpha; 1) > 1$. Поэтому при $\mu_1 \leqslant 0$ и при всех $t > 0$

$$\langle p_1, y(t)\rangle \leqslant E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)\langle p_1, y^0\rangle \leqslant \mu_1.$$

Значит, при выполнении условий теоремы управление $v(t) = v_0$ оставляет убегающего в пределах множества Ω. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3 (уклонение в конусе). *Пусть $r \geqslant 1$, $\delta_r = 0$ и $\mu_j = 0$, $j = 1, \ldots, r$ (Ω — выпуклый конус). Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in Q$ такой, что

$$\lambda_i(v_0) = 0 \text{ для всех } i \in I(0),$$
$$\lambda_{n+j}(v_0) = \langle p_j, v_0\rangle \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Из теоремы 1 следует, что если для произвольного $T > 0$ взять разбиение $\sigma = \{0, T\}$ и $v(t) = v_0$, то ни один из преследователей P_i не догонит убегающего E, так как равенство $z_i(t) = 0$ невозможно в силу $\lambda_i(v_0) = 0$, $i \in I(0)$. Из теоремы 2 следует, что убегающий не покидает пределы множества Ω, так как при любом значении a и для любого $j = 1, \ldots, r$ справедливы следующие неравенства:

$$\langle p_j, y(t)\rangle = E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)\langle p_j, y^0\rangle + t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha+1)\langle p_j, v_0\rangle \leqslant E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)\langle p_j, y^0\rangle \leqslant \mu_j = 0. \quad (1.1)$$

Значит, при выполнении условий теоремы управление $v(t) = v_0$ оставляет убегающего в пределах выпуклого конуса Ω. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Пусть $r > 0$, $\delta_r = 0$ и $a\mu_j \leqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, r$. Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $\delta_r = 0$ и теоремы 1 следует, что если для произвольного $T > 0$ взять разбиение $\sigma = \{0, T\}$ и $v(t) = v_0$, то ни один из преследователей P_i не догонит убегающего E, так как равенство $z_i(t) = 0$ невозможно в силу $\lambda_i(v_0) = 0$, $i \in I(0)$. Условия $a\mu_j \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, r$, обеспечивают выполнение неравенств (1.1), которые, в свою очередь, означают, что убегающий не покидает пределы множества Ω при всех $t > 0$. Значит, в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2009. 266 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Springer Netherlands. 1997. 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
4. Маматов М.Ш. Задача преследования, описываемая дифференциальными уравнениями дробного порядка // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 4-1. С. 28–32.
5. Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278.
6. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 256–270.
7. Эйдельман С.Д., Чикрий А.А. Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Український математичний журнал. 2000. Т. 52. № 11. С. 1566–1583.

8. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. DOI: 10.20537/vm170105
9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
10. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функции Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.

Поступила в редакцию 14.08.2017

Банников Александр Сергеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: asbannikov@gmail.com

A. S. Bannikov

Evasion from pursuers in a problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 309–314 (in Russian).

Keywords: differential games, Caputo derivative, escape, simple matrix.

MSC2010: 49N70, 91A23

DOI: 10.20537/vm170302

The paper deals with the problem of avoiding a group of pursuers in the finite-dimensional Euclidean space. The motion is described by the linear system of fractional order

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}z_i\right) = Az_i + u_i - v,$$

where ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (0, 1)$ of the function f and A is a simple matrix. The initial positions are given at the initial time. The set of admissible controls of all players is a convex compact. It is further assumed that the evader does not leave the convex polyhedron with nonempty interior. In terms of the initial positions and the parameters of the game, sufficient conditions for the solvability of the evasion problem are obtained.

REFERENCES

1. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
3. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Springer Netherlands, 1997, 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
4. Mamatov M.Sh. The pursuit problem described by differential equations of fractional order, *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2016, no. 4-1, pp. 28–32 (in Russian).
5. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 54–70. DOI: 10.1134/S0081543810050056
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 256–270 (in Russian).
7. Éidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, issue 11, pp. 1787–1806. DOI: 10.1023/A:1010439422856
8. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170105

9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006, 540 p.
10. Popov A.Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, issue 2, pp. 209–409. DOI: 10.1007/s10958-013-1255-3

Received 14.08.2017

Bannikov Aleksandr Sergeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: asbannikov@gmail.com