УДК 517.37

© *Д. Л. Федоров*

О ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

Рассмотрены новые свойства криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса. Доказано, что криволинейный интеграл Римана–Стилтьеса не зависит от пути интегрирования, если интегрируемая и интегрирующая функции зависят только от одной переменной. Найдено новое необходимое условие функциональной зависимости функций двух переменных. Предлагается новый подход к определению двойного интеграла Римана–Стилтьеса, который содержит не одну, а две интегрирующие функции. Рассмотрены общие свойства двойного интеграла Римана–Стилтьеса. Приведены способы вычисления двойного интеграла для случая гладких или кусочно-гладких интегрирующих функций. Получена одна формула для преобразования двойного интеграла Римана–Стилтьеса в повторный интеграл.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, двойной интеграл, интеграл Римана–Стилтьеса.

DOI: 10.20537/vm160306

Введение

В статье [6] дано определение криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса и рассмотрены некоторые его простые свойства. Там же показано, что криволинейный интеграл Римана–Стилтьеса $\oint_{\partial D} f(x,y)\,dg(x,y)$ по границе плоского множества D при определенных условиях относительно функций f и g определяет знакопеременную меру на плоскости. В настоящей работе продолжается исследование криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса по замкнутому контуру и с помощью введенной конструкции определяется двойной интеграл Римана–Стилтьеса. Особенностью введенного двойного интеграла является наличие одной интегрируемой и двух интегрирующих функций.

§ 1. О криволинейном интеграле Римана–Стилтьеса по замкнутому контуру

В настоящем пункте будут выделены два условия, при которых криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Теорема 1. *Пусть $f(x,y) \equiv f(x)$, $g(x,y) \equiv g(x)$, то есть функции f и g не зависят от переменной y на некотором множестве*

$$D = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

причем функции φ и ψ непрерывны на $[a,b]$. Пусть при этом интеграл $(RS)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ существует. Тогда криволинейный интеграл $\oint_{\partial D} f(x)\,dg(x) = 0$.

Доказательство. По условию леммы контур ∂D образован графиками функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые ограничивают множество D снизу и сверху, а также, возможно, отрезками прямых $l_a\colon x = a$ и $l_b\colon x = b$, которые ограничивают D слева и справа. Легко видеть, что в условиях леммы $\int_{l_a} f(x)\,dg(x) = \int_{l_b} f(x)\,dg(x) = 0$. Введем обозначения для нижней и верхней границ множества:

$$\Gamma_1 = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y = \varphi(x)\}, \quad \Gamma_2 = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y = \psi(x)\}.$$

Кривая Γ_1 ориентирована в направлении возрастания переменной x, а кривая Γ_2 в обратном направлении. Так как f и g не зависят от y, то

$$\int_{\Gamma_1} f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x), \qquad \int_{\Gamma_2} f(x)\,dg(x) = -\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Отсюда, с учетом положительной ориентации контура ∂D (обход против часовой стрелки), будем иметь

$$\int_{\partial D} f(x)\,dg(x) = \int_{\Gamma_1} f(x)\,dg(x) + \int_{\Gamma_2} f(x)\,dg(x) = 0. \qquad \square$$

Замечание 1. Аналогичный результат может быть сформулирован в предположении, что функции f и g зависят только от переменной y.

Следствие 1. *Пусть функции f и g обе зависят только от переменной x (или только от y) в области D, L_1 и L_2 — две различные кривые, соединяющие точки $A, B \in D$, при этом криволинейные интегралы $\int_{L_1} f\,dg$ и $\int_{L_2} f\,dg$ существуют. Тогда значения этих интегралов равны.*

Другим условием независимости криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса от пути интегрирования является функциональная зависимость интегрируемой и интегрирующей функций. Для обоснования этого утверждения введем сначала следующие понятия.

Пусть D — связное компактное множество в $\mathbb{R}^2$, AB — ориентируемая спрямляемая кривая в D. Для произвольных точек $P, Q \in AB$ будем обозначать через $\ell(PQ)$ длину отрезка кривой с концами в точках P и Q. Определим естественный порядок на множестве точек кривой, согласованный с направлением ее обхода, то есть полагаем

$$P \leqslant Q \iff \ell(AP) \leqslant \ell(AQ), \qquad P, Q \in AB.$$

Определение 1. Функция $g(x,y)$ является *неубывающей* (*невозрастающей*) на ориентированной кривой AB, если $g(P) \leqslant g(Q)$ $(g(P) \geqslant g(Q))$ при условии $P \leqslant Q$. Неубывающие и невозрастающие функции будем, как общепринято, называть *монотонными* на кривой.

Лемма 1. *Пусть функция $g(x,y)$ непрерывна и монотонна на кривой AB, функция $F(v)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, где $a = \min\{g(A), g(B)\}$, $b = \max\{g(A), g(B)\}$. Тогда справедливо равенство*

$$(RS)\int_{AB} F\big(g(x,y)\big)\,dg(x,y) = \int_{g(A)}^{g(B)} F(v)\,dv. \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала функция $g(x,y)$ неубывающая на AB. Построим разбиение T кривой AB точками $P_0 = A, P_1, \ldots, P_n = B$ и запишем интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F\big(g(Q_i)\big)\big(g(P_i) - g(P_{i-1})\big).$$

Здесь точки $Q_i \in P_{i-1}P_i$, $i = 1, \ldots, n$, выбраны произвольно. Заметим, что точки $v_i = g(P_i)$ образуют разбиение отрезка $[g(A), g(B)]$, причем в силу непрерывности функции g измельчение разбиения T ведет к измельчению разбиения этого отрезка:

$$d(T) \doteq \max_i \ell(P_{i-1}P_i) \to 0 \Rightarrow \max_i (v_i - v_{i-1}) \to 0.$$

Обозначим также $u_i = g(Q_i)$, $i = 1, \ldots, n$. В силу неубывания функции g имеем неравенство $v_{i-1} \leqslant u_i \leqslant v_i$ для всех i. Поэтому

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(u_i)(v_i - v_{i-1}).$$

Отсюда при измельчении разбиения кривой получаем $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma = \int_{g(A)}^{g(B)} F(v)\,dv$, значит равенство (1.1) в этом случае выполняется.

Если функция $g(x,y)$ невозрастающая на кривой AB, то при смене направления ее обхода получим неубывающую функцию. По только что доказанному будем тогда иметь равенство

$$\int_{BA} F\big(g(x,y)\big)\,dg(x,y) = \int_{g(B)}^{g(A)} F(v)\,dv,$$

которое равносильно равенству (1.1). □

Определение 2. Функцию $g(x,y)$ будем называть *кусочно-монотонной* на ориентируемой спрямляемой кривой, если для некоторого разбиения этой кривой функция g будет монотонна на каждой частичной дуге, образуемой этим разбиением.

Теорема 2. *Пусть функция $g(x,y)$ непрерывна на множестве D, функция f зависит от функции g, то есть $f(x,y) = F\big(g(x,y)\big)$ для всех $(x,y)\in D$, при этом функция $F(v)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, где $a = \min\limits_D g(x,y)$, $b = \max\limits_D g(x,y)$. Тогда для любой спрямляемой кривой $AB \subset D$, на которой функция g кусочно-монотонна, выполняется равенство*

$$\int_{AB} f(x,y)\,dg(x,y) = \int_{g(A)}^{g(B)} F(v)\,dv.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию кривую AB можно разбить на части таким образом, чтобы на каждом участке $A_{i-1}A_i$, $i = 1,\ldots,n$, функция $g(x,y)$ была монотонной. Предполагается, что $A_0 = A$ и $A_n = B$. Тогда по лемме 1

$$\int_{AB} f\,dg = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_{i-1}A_i} f\,dg = \sum_{i=1}^{n} \int_{g(A_{i-1})}^{g(A_i)} F(v)\,dv = \int_{g(A_0)}^{g(A_n)} F(v)\,dv,$$

откуда получаем требуемое утверждение. □

Следствие 2. *Пусть $U(v)$ — первообразная функции F. Тогда при условиях теоремы 2*

$$\int_{AB} f\,dg = U\big(g(B)\big) - U\big(g(A)\big).$$

Следствие 3. *Если функция $f(x,y)$ функционально зависит от функции $g(x,y)$ в смысле, указанном в условиях теоремы 2, то значение криволинейного интеграла не зависит от вида кривой, соединяющей точки A и B, лишь бы функция g была кусочно-монотонна на ней.*

Следствие 4. *Если функция $f(x,y)$ функционально зависит от функции $g(x,y)$ в смысле, указанном в условиях теоремы 2, то для любого замкнутого контура L, лежащего в D, на котором функция g кусочно-монотонна,* $\oint_L f\,dg = 0$.

Для доказательства этого утверждения следует представить контур L в виде объединения двух кривых L_1 и L_2, начало и конец которых совпадают. Тогда по следствию 3 имеем равенство $\int_{L_1} f\,dg = \int_{L_2} f\,dg$. Отсюда получим

$$\oint_L f\,dg = \int_{L_1^+} f\,dg + \int_{L_2^-} f\,dg = \int_{L_1} f\,dg - \int_{L_2} f\,dg = 0.$$

Замечание 2. Теореме 2 можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть функции $u = f(x,y)$ и $v = g(x,y)$ непрерывно отображают множество D на множество E переменных (u,v). Если точка (x,y) обходит границу множества D, то точка (u,v) будет обходить границу множества E в некотором направлении, необязательно положительном. Тогда, как известно, площадь множества E с точностью до знака выражается криволинейным интегралом:

$$S(E) = \pm \oint_{\partial E} u\,dv = \pm \oint_{\partial D} f(x,y)\,dg(x,y).$$

Если же функции f и g функционально зависимы, то есть $f(x,y) = F\big(g(x,y)\big)$, то точки (u,v) будут располагаться на графике функции $u = F(v)$, поэтому площадь такой фигуры равна нулю, что и утверждается в теореме 2.

Замечание 3. Равенство

$$\oint_{\partial D} f(x,y)\,dg(x,y) = -\oint_{\partial D} g(x,y)\,df(x,y)$$

показывает справедливость утверждения теоремы 2 в случае обратной зависимости, когда $g(x,y) = F\big(f(x,y)\big)$.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y) = x + y, \quad g(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{[x+y]}, & x+y \notin \mathbb{Z}, \end{cases} \quad [z] \text{ — целая часть.}$$

Очевидно, функция g функционально зависит от f. Если замкнутый контур L не пересекает какую-либо из прямых $l_k\colon x + y = k \in \mathbb{Z}$, то $g(x,y) = \mathrm{const}$ на L, поэтому $\oint_L f\,dg = 0$. Если контур L пересекает прямую l_k, то функция g будет испытывать в точках пересечения разрывы противоположных знаков величиной ± 2, а если L касается прямой l_k, разрывы функции g в точках касания будут равны ± 1. Но функция f постоянна на прямой l_k, поэтому снова получаем $\oint_L f\,dg = 0$.

§ 2. Определение двойного интеграла Римана–Стилтьеса

Пусть D — замкнутое связное множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой кривой ∂D. Разбиением T множества D будем называть конечный набор $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ замкнутых связных попарно неперекрывающихся[1] подмножеств Δ_i, для которого $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i = D$. Диаметром разбиения T назовем величину

$$d(T) \doteq \max_i \operatorname{diam} \Delta_i, \quad \text{где } \operatorname{diam} \Delta \doteq \sup_{M,N \in \Delta} \rho(M,N),$$

ρ — евклидова метрика на плоскости.

Пусть в области D заданы функции f, g. Следуя работе [6], будем использовать обозначение (граница множества Δ обходится против часовой стрелки)

$$m(f,g;\Delta) \doteq \oint_{\partial\Delta} f\,dg, \quad \Delta \subset D. \tag{2.1}$$

Если интеграл в равенстве (2.1) существует, будем называть множество Δ измеримым относительно пары функций (f,g), или, короче, (f,g)-измеримым. В свою очередь, разбиение

[1]Напомним, что два множества называются неперекрывающимися, если они не имеют общих внутренних точек.

$T = \{\Delta_i\}$ множества D будем называть измеримым относительно пары (f,g) (иначе (f,g)-измеримым), если все множества Δ_i, входящие в T, являются (f,g)-измеримыми. Множество всех (f,g)-измеримых разбиений T множества D с диаметром $d(T) < \delta$ обозначим через $\mathfrak{M}(f,g;D,\delta)$. Пару функций (f,g) условимся называть допустимой парой, если для любого $\delta > 0$ множество $\mathfrak{M}(f,g;D,\delta)$ непусто. Множество допустимых пар будем обозначать через $\mathcal{A}(D)$. Таким образом, пара функций $(f,g) \in \mathcal{A}(D)$, если существуют (f,g)-измеримые разбиения множества D произвольно малого диаметра.

Пример 2. Пусть $D = [0,1]^2$, $f(x,y)$ непрерывна в D и

$$g(x,y) = \theta(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ 0, & x > y. \end{cases}$$

Для произвольного $\delta > 0$ построим разбиение $\{x_i\}$ отрезка $[0,1]$ диаметром меньше $\delta/\sqrt{2}$, тогда множества $\Delta_{ij} = [x_{i-1},x_i] \times [x_{j-1},x_j]$ образуют разбиение D с диаметром меньше δ. Функция $g(x,y)$ имеет ограниченную вариацию на границе любого прямоугольника Δ_{ij}, поэтому, как показано в [6], интегралы $\displaystyle\int_{\partial\Delta_{ij}} f(x,y)\,dg(x,y)$ существуют. Следовательно построенное разбиение $\{\Delta_{ij}\} \in \mathfrak{M}(f,g;D,\delta)$. Ввиду произвольности δ это означает, что $(f,g) \in \mathcal{A}(D)$.

Представляет интерес исследование вопроса о достаточных условиях на функции f и g, при которых $(f,g) \in \mathcal{A}(D)$. Этот вопрос остается за рамками настоящей работы, поскольку в ней пока ставятся другие задачи.

Перейдем теперь к построению двойного интеграла Римана–Стилтьеса. Пусть функция $f(x,y)$ определена в D и $(g,h) \in \mathcal{A}(D)$. Для произвольного разбиения $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^n$ выберем произвольный набор точек $M_i \in \Delta_i$, $i = 1,\ldots,n$, который будем называть набором, согласованным с разбиением T. Составим теперь интегральную сумму

$$\sigma = \sigma(f,g,h;T,\{M_i\}) \doteq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)m(g,h;\Delta_i). \tag{2.2}$$

Определение 3. *Двойным интегралом Римана–Стилтьеса* функции $f(x,y)$ по функциям $g(x,y)$ и $h(x,y)$ будем называть предел $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma$ при условии, что этот предел существует и не зависит от выбора измеримых относительно (g,h) разбиений T и от выбора согласованных с T наборов точек $\{M_i\}$. Для обозначения этого интеграла будем использовать запись $(RS)\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dg(x,y)\,dh(x,y)$, или, короче, $\displaystyle\iint_D f\,dg\,dh$.

Можно сформулировать определение 3 следующим образом: число $\mathcal{I}$ является пределом интегральных сумм (2.2), если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $T \in \mathfrak{M}(g,h;D,\delta)$ и любого набора точек $\{M_i\}$, согласованного с T, будет выполняться неравенство $|\sigma - \mathcal{I}| < \varepsilon$.

Пример 3. Пусть $D = [-1,1] \times [-1,1]$, функция $g(x,y)$ произвольна, а $h(x,y) = 1$ при $y \geqslant 0$ и $h(x,y) = 0$ при $y < 0$. Выберем произвольное разбиение $\{\Delta_i\}$. Если множество Δ_i не пересекает ось x, то $m(g,h;\Delta_i) = \displaystyle\oint_{\partial\Delta} g\,dh = 0$, так как h постоянна на $\partial\Delta$. Предположим, что Δ_i пересекает ось x по отрезку $[x_{i-1},x_i]$. Значит функция $h(x,y)$ при обходе границы Δ_i терпит разрыв величиной -1 в точке $(x_{i-1},0)$ и разрыв величиной 1 в точке $(x_i,0)$. Тогда нетрудно вычислить

$$m(g,h;\Delta_i) = \int_{\partial\Delta_i} g(x,y)\,dh(x,y) = g(x_i,0) - g(x_{i-1},0).$$

Соответствующая этому разбиению интегральная сумма будет равна

$$\sigma = \sum_i f(M_i)\big(g(x_i,0) - g(x_{i-1},0)\big).$$

В предположении непрерывности функции f в пределе тогда получим

$$\iint_D f\,dg\,dh = (RS)\int_{-1}^{1} f(x,0)\,d_x g(x,0).$$

Это равенство имеет смысл, если интеграл в правой части существует. Таким образом, интеграл по прямоугольнику D сводится к интегралу по отрезку на оси x.

Пример 4. Пусть $D=[0,1]^2$, функции f и g непрерывны в D, $h=\theta$ (см. пример 2). Обозначим через $\Gamma=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=x\}$ линию разрыва функции θ. Возьмем произвольное разбиение $T=\{\Delta_i\}$ квадрата D. Очевидно, если множество Δ_i не пересекает Γ, то $\theta(x,y)$ постоянна на $\partial\Delta_i$, следовательно $m(g,\theta;\Delta_i)=0$. Предположим, что $\partial\Delta_i$ пересекает Γ в двух точках P_{i-1} и P_i, причем точка P_i расположена на Γ выше точки P_{i-1}. Несложные рассуждения позволяют вычислить $m(g,\theta;\Delta_i)=g(P_i)-g(P_{i-1})$. Тогда интегральная сумма $\sigma=\sum\limits_i f(M_i)\big(g(P_i)-g(P_{i-1})\big)$, в которую входят только те индексы i, для которых $\Delta_i\cap\Gamma\neq\varnothing$. Заметим, что такое же выражение для суммы получится, если предположить, что в разбиении T есть множества, граница которых $\partial\Delta_i$ пересекает Γ более чем в двух точках. В итоге, переходя к пределу при измельчении разбиения, получим

$$\iint_D f\,dg\,d\theta=\lim_{d(T)\to 0}\sum_i f(M_i)\big(g(P_i)-g(P_{i-1})\big)=\int_\Gamma f\,dg.$$

Таким образом, интеграл $\iint_D f\,dg\,d\theta$ существует, если существует криволинейный интеграл $\int_\Gamma f\,dg$, и оба интеграла будут равны. С учетом сделанных выше предположений, для этого достаточно потребовать ограниченности вариации одной из функций f или g на Γ. Определение вариации функции двух переменных на плоской кривой сформулировано в статье [6].

§ 3. Свойства двойного интеграла Римана–Стилтьеса

В работе [6] была доказана линейность меры $m(g,h;\Delta)$ относительно каждой из функций f и g. Отсюда вытекает свойство линейности введенного интеграла, причем относительно каждой из трех функций.

1. $\iint_D (f_1+f_2)\,dg\,dh=\iint_D f_1\,dg\,dh+\iint_D f_2\,dg\,dh$, если существуют оба интеграла в правой части.
2. $\iint_D f\,d(g_1+g_2)\,dh=\iint_D f\,dg_1\,dh+\iint_D f\,dg_2\,dh$, если существуют оба интеграла в правой части.
3. $\iint_D f\,dg\,d(h_1+h_2)=\iint_D f\,dg\,dh_1+\iint_D f\,dg\,dh_2$, если существуют оба интеграла в правой части.
4. $\iint_D \lambda f\,dg\,dh=\lambda\iint_D f\,dg\,dh,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$
5. $\iint_D f\,d(\lambda g)\,dh=\lambda\iint_D f\,dg\,dh,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$
6. $\iint_D f\,dg\,d(\lambda h)=\lambda\iint_D f\,dg\,dh,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$

Рассуждения, аналогичные используемым при выводе свойств двойного интеграла, позволяют вывести свойство аддитивности относительно области интегрирования.

7. Для неперекрывающихся множеств D_1 и D_2 таких, что $D = D_1 \cup D_2$ существование интеграла $\iint_D f\, dg\, dh$ влечет существование обоих интегралов $\iint_{D_1} f\, dg\, dh$ и $\iint_{D_2} f\, dg\, dh$, а также равенство
$$\iint_{D_1} f\, dg\, dh + \iint_{D_2} f\, dg\, dh = \iint_D f\, dg\, dh.$$

Заметим, однако, что свойство, обратное к 7, вообще говоря, неверно. Можно привести пример функций f, g, h, для которых существуют оба интеграла $\iint_{D_1} f\, dg\, dh$ и $\iint_{D_2} f\, dg\, dh$, тогда как интеграл $\iint_D f\, dg\, dh$ не существует. Для этого продолжим рассмотрение примера 3. Положим
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} 1, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$
Пусть $D_1 = [-1,0] \times [-1,1]$ и $D_2 = [0,1] \times [-1,1]$. Очевидно, $D_1 \cup D_2 = D = [-1,1] \times [-1,1]$, причем D_1 и D_2 не перекрываются. Тогда $\iint_{D_1} f\, dg\, dh = 0$, так как $g = \mathrm{const}$ на D_1, а $\iint_{D_2} f\, dg\, dh = 0$, так как $f = 0$ на D_2. При этом интеграл
$$\iint_D f\, dg\, dh = (RS) \int_{-1}^{1} f(x,0)\, d_x g(x,0)$$
не существует, так как функции $f(x,0)$ и $g(x,0)$ имеют общую точку разрыва (см., например [2, 3]).

Рассмотрим далее некоторые свойства, вытекающие из других свойств криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса вдоль замкнутого контура.

8. $\iint_D f\, dg\, dh = -\iint_D f\, dh\, dg$ в предположении, что один из интегралов существует.

   Справедливость утверждения следует из равенства
$$m(f,g;\Delta) = -m(g,f;\Delta),$$
   справедливого для любого множества Δ, измеримого относительно пары функций (f,g) (см. [6]).

9. $\iint_D f\, dg\, dg = 0$ для любых функций f и g.

   Утверждение следует из равенства $m(g,g;\Delta) = 0$ для произвольных g и Δ.

10. $\iint_D f\, dg\, dC = 0$ для любых функций f и g, если $C = \mathrm{const}$.

    Это утверждение является следствием равенства $m(g,C;\Delta) = 0$ для любых g и Δ.

11. $(RS) \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ (в правой части двойной интеграл Римана).

    Данное утверждение получается из формулы вычисления площади измеримой по Жордану фигуры через криволинейный интеграл по ее границе:
$$S(\Delta) = m(x,y;\Delta) = \oint_{\partial\Delta} x\, dy.$$

12. Если $(g,h) \in \mathcal{A}(D)$, причем функции g и h зависят только от x или обе зависят только от y, то для любой функции $f(x,y)$, определенной в D, $\iint_D f\,dg\,dh = 0$.

    Справедливость этого свойства сразу следует из теоремы 1.

13. Пусть $(g,h) \in \mathcal{A}(D)$, функция $h(x,y)$ непрерывна на множестве D и кусочно-монотонна на любой ориентируемой спрямляемой кривой, лежащей в D. Пусть для всех $(x,y) \in D$ функция $g(x,y) = F(h(x,y))$, причем функция $F(v)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, где $a = \min\limits_D g(x,y)$, $b = \max\limits_D g(x,y)$. Тогда для любой функции $f(x,y)$, определенной в D, значение интеграла $\iint_D f\,dg\,dh$ равно нулю.

    Утверждение следует из теоремы 2.

§ 4. Частные случаи вычисления двойного интеграла Римана–Стилтьеса

Рассмотрим сначала случай гладких интегрирующих функций.

Теорема 3. *Пусть функция $h(x,y)$ непрерывно дифференцируема в D. Тогда*

$$\iint_D f\,dg\,dh = \iint_D f\,d(gh'_x)\,dx + \iint_D f\,d(gh'_y)\,dy \tag{4.1}$$

в предположении, что оба интеграла в правой части существуют. Кроме того, если $g(x,y)$ также непрерывно дифференцируема в D, а $h(x,y)$ имеет в D непрерывные смешанные производные, то справедливо равенство

$$\iint_D f\,dg\,dh = \iint_D f\,\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy, \tag{4.2}$$

где

$$\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} g'_x & g'_y \\ h'_x & h'_y \end{vmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (4.1) следует из представления

$$m(g,h;\Delta) = \oint_{\partial\Delta} g\,dh = \oint_{\partial\Delta} gh'_x\,dx + \oint_{\partial\Delta} gh'_y\,dy$$

(см. [6, теорема 2]).

Равенство (4.2) можно получить из формулы

$$m(g,h;\Delta) = \iint_\Delta \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy$$

(см. [6, следствие 2 теоремы 2]). □

Замечание 4. Следует отметить, что формула (4.2) с точностью до знака перед интегралами совпадает с формулой замены переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим далее случай разрывной функции h. Сначала докажем две леммы.

Лемма 2. *Пусть D — произвольное множество, ограниченное замкнутой кривой L, функция $f(x,y)$ непрерывна в D, функция $g(x,y)$ имеет ограниченную вариацию вдоль контура L, а функция $h(x,y)$ равна нулю во внутренних точках D и непрерывна на L. Тогда справедлива формула*

$$\iint_D f\,dg\,dh = -\oint_L fh\,dg. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $T = \{\Delta_i\}$ — некоторое разбиение D. Если множество Δ_i не имеет общих точек с L, то $m(g, h; \Delta_i) = 0$ какова бы ни была функция g. Пусть множество Δ_i примыкает к участку $P_{i-1}P_i$ границы L. Тогда

$$m(g, h; \Delta_i) = -m(h, g; \Delta_i) = -\int_{P_{i-1}P_i} h\,dg.$$

Выбирая произвольно точки $M_i \in \Delta_i$, построим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_i f(M_i) m(g, h; \Delta_i) = -\sum_i f(M_i) \int_{P_{i-1}P_i} h\,dg.$$

Обозначим $s = -\oint_L fh\,dg = -\sum_i \int_{P_{i-1}P_i} fh\,dg$ и оценим разность

$$\sigma - s = \sum_i \left(\int_{P_{i-1}P_i} fh\,dg - f(M_i) \int_{P_{i-1}P_i} h\,dg \right) = \sum_i \int_{P_{i-1}P_i} \big(f - f(M_i)\big) h\,dg.$$

Выберем диаметр разбиения T настолько малым, чтобы в каждом из множеств Δ_i выполнялось равенство $|f(x, y) - f(M_i)| < \varepsilon$. Будем тогда иметь неравенства

$$|\sigma - s| \leqslant \sum_i \sup_{P_{i-1}P_i} |f(x, y) - f(M_i)| \cdot |h(x, y)| \bigvee_{P_{i-1}P_i} \leqslant \varepsilon \sup_L |h(x, y)| \bigvee_L (g).$$

В силу произвольности ε это означает, что $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma = s$. □

Лемма 3. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой связной области D, кривая L лежит внутри D. Тогда эта функция имеет ограниченную вариацию на L, причем*

$$\bigvee_L (f) \leqslant \max_L |\operatorname{grad} f|\, \ell(L).$$

Доказательство. Построим разбиение L точками P_i, $i = 1, \ldots, n$. Для двух соседних точек имеем оценку

$$f(P_i) - f(P_{i-1}) = \int_{P_{i-1}P_i} f'_x\,dx + f'_y\,dy = \int_{P_{i-1}P_i} (\operatorname{grad} f, \tau)\,ds,$$

где $P_{i-1}P_i$ — участок кривой L, соединяющей эти точки, а τ — единичный вектор касательный к L. Отсюда

$$|f(P_i) - f(P_{i-1})| \leqslant \max_{P_{i-1}P_i} |(\operatorname{grad} f, \tau)|\, \ell(P_{i-1}P_i) \leqslant \max_L |\operatorname{grad} f|\, \ell(P_{i-1}P_i).$$

Тогда

$$\sum_i |f(P_i) - f(P_{i-1})| \leqslant \max_L |\operatorname{grad} f| \sum_i \ell(P_{i-1}P_i) = \max_L |\operatorname{grad} f|\, \ell(L),$$

что завершает доказательство леммы. □

Далее исследуем случай, когда функция $h(x, y)$ имеет линию разрыва в D. Пусть множество D разбивается кривой L на две части D_1 и D_2, которые будем предполагать замкнутыми односвязными подмножествами. Зададим в D_1 и D_2 непрерывно дифференцируемые функции h_1 и h_2 соответственно и определим в D функцию h равенством

$$h(x, y) = \begin{cases} h_1(x, y), & (x, y) \in D_1 \setminus L, \\ h_2(x, y), & (x, y) \in D_2 \setminus L, \end{cases}$$

а на кривой L функция h определена произвольно, лишь бы существовал криволинейный интеграл $\int_L g\,dh$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в D, функция $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема в D. Тогда*

$$\iint_D f\,dg\,dh = \iint_{D_1} f\frac{\partial(g,h_1)}{\partial(x,y)}dx\,dy + \iint_{D_2} f\frac{\partial(g,h_2)}{\partial(x,y)}dx\,dy + \int_L f(h_1-h_2)\,dg, \tag{4.4}$$

причем кривая L ориентирована так, чтобы при ее обходе множество D_1 располагалось слева, а D_2 — справа.

Доказательство. Вычислим интегралы $\iint_{D_k} f\,dg\,dh$, $k=1,2$. Запишем первый интеграл в виде суммы

$$\iint_{D_1} f\,dg\,dh = \iint_{D_1} f\,dg\,dh_1 + \iint_{D_1} f\,dg\,d(h-h_1). \tag{4.5}$$

Применяя равенство (4.2), получим

$$\iint_{D_1} f\,dg\,dh_1 = \iint_{D_1} \frac{\partial(g,h_1)}{\partial(x,y)}dx\,dy.$$

Для вычисления второго интеграла в правой части (4.5) заметим, что функции h и h_1 отличаются в D_1 только своими значениями на кривой L, а движение по L происходит в положительном направлении относительно множества D_1. В силу леммы 3 функция g имеет ограниченную вариацию на ∂D_1, поэтому условия леммы 2 выполняются. По формуле (4.3)

$$\iint_{D_1} f\,dg\,d(h-h_1) = -\int_L f(h-h_1)\,dg.$$

Отсюда получаем

$$\iint_{D_1} f\,dg\,dh = \iint_{D_1} \frac{\partial(g,h_1)}{\partial(x,y)}dx\,dy + \int_L f(h_1-h)\,dg. \tag{4.6}$$

Аналогично выводится равенство

$$\iint_{D_2} f\,dg\,dh = \iint_{D_2} \frac{\partial(g,h_2)}{\partial(x,y)}dx\,dy - \int_L f(h_2-h)\,dg. \tag{4.7}$$

Знак минус перед вторым интегралом в правой части обусловлен отрицательным направлением движения вдоль L относительно множества D_2 (по часовой стрелке). Складывая равенства (4.6) и (4.7), получаем равенство (4.4). $\square$

Доказанное в теореме равенство (4.4) можно записать в виде

$$I = I_c + I_b,$$

где I_c — сумма первых двух слагаемых, представляющая собой непрерывную часть интеграла, а I_b — разрывная часть. Обозначая $\tau(x,y) = h_1(x,y) - h_2(x,y)$ — скачок функции h на линии разрыва, можно записать

$$I_b = \int_L f\tau\,dg.$$

Пример 5. Введем функции $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi(x,y) = \arg(x+iy)$ — главное значение аргумента из промежутка $(-\pi,\pi]$. Пусть $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}$ — круг единичного радиуса. Вычислим двойной интеграл $\iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi$. Функция $\varphi(x,y)$ разрывна на отрезке $[-1,0]$ оси OX, причем скачок на линии разрыва $\tau(x,y) = 2\pi$. Поэтому

$$I_c = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho = S(D) = \pi, \quad I_b = -\int_0^1 \rho\tau\,d\rho = -\pi.$$

Знак минус перед интегралом во втором равенстве обусловлен движением вдоль линии разрыва в направлении убывания значений функции $\rho(x,y)$. В итоге получаем $I = 0$.

Из теоремы 4 можно вывести следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть множество D содержит внутри замкнутое односвязное подмножество E, функции f и g удовлетворяют условиям теоремы 4, а $h(x,y)$ равна нулю вне E и непрерывно дифференцируема на E. Тогда справедливо равенство*

$$\iint_D f\,dg\,dh = \iint_E f\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy + \oint_L fh\,dg,$$

где L — граница множества E, ориентированная положительно.

Далее в этом пункте мы рассмотрим один частный случай, при котором двойной интеграл удается представить в виде повторного интеграла.

Теорема 5. *Пусть множество $D=[a,b]\times[c,d]$, функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, функция $h(y)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[c,d]$, функция $f(x,y)$ имеет по переменной x ограниченную вариацию на $[a,b]$ и непрерывна по y на отрезке $[c,d]$. Пусть также существует двойной интеграл Римана–Стилтьеса $\iint_D f(x,y)\,dg(x)\,dh(y)$. Тогда существует повторный интеграл $\int_a^b dg(x)\int_c^d f(x,y)\,dh(y)$ и оба интеграла равны между собой.*

Доказательство. Обозначим $F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dh(y)$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что функция $F(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, причем

$$\bigvee_a^b(F)\leqslant \sup_y \bigvee_a^b\big(f(\cdot,y)\big)\bigvee_c^d(h).$$

Поэтому интеграл $(RS)\int_a^b F(x)\,dg(x)$ существует. Выберем произвольно разбиение $\{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и возьмем произвольно точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$. Пусть σ — соответствующая этому разбиению интегральная сумма:

$$\sigma=\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta g(x_i),$$

где $\Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1})$. Пусть сначала функция $h(y)$ неубывающая на $[c,d]$. Выберем теперь произвольно разбиение $\{y_j\}_{j=0}^m$ отрезка $[c,d]$. По теореме о среднем для интеграла Римана–Стилтьеса (см. [2]) найдутся такие точки $\eta_j\in[y_{j-1},y_j]$, что

$$F(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)\,dh(y)=\sum_{j=1}^m\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dh(y)=\sum_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)\Delta h(y_j),$$

где $\Delta h(y_j)=h(y_j)-h(y_{j-1})$, $j=1,\ldots,m$. Тогда будем иметь

$$\sigma=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)\Delta g(x_i)\Delta h(y_j).$$

Пусть $s_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$. Тогда нетрудно вычислить $m(g,h;s_{ij})=\Delta g(x_i)\Delta h(y_j)$. Отсюда получаем равенство

$$\sigma=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)m(g,h;s_{ij}). \tag{4.8}$$

Так как двойной интеграл $\iint_D f\,dg\,dh$ по предположению теоремы существует, то двойная сумма в правой части (4.8) при измельчении разбиений будет стремиться к величине этого интеграла. Но тогда и $\lim\sigma = \iint_D f\,dg\,dh$.

Если функция $h(y)$ не является неубывающей, следует представить ее в виде разности неубывающих функций $h = h_1 - h_2$, применить доказанное свойство к обеим функциям h_1 и h_2 и воспользоваться линейностью двойного интеграла по интегрирующей функции. $\square$

В заключение коротко проведем сравнение введеного нами интеграла с двойным интегралом Римана–Стилтьеса, который в современной теории интегрирования считается естественным распространением интеграла Римана–Стилтьеса по отрезку на двумерный случай. Напомним это определение (см., например, [4, 5]). Пусть $\Pi = [a,b]\times[c,d]$ — стандартный прямоугольник на плоскости, $\{x_i\}_{i=0}^m$ и $\{y_j\}_{j=0}^n$ — независимые друг от друга разбиения отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно. Величины $\delta_1 = \max\limits_i(x_i - x_{i-1})$ и $\delta_2 = \max\limits_j(y_j - y_{j-1})$ — диаметры этих разбиений. Тогда

$$(RS)\iint_\Pi f(x,y)\,dg(x,y) = \\ = \lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(\xi_i,\eta_j)\big(g(x_i,y_j) - g(x_i,y_{j-1}) - g(x_{i-1},y_j) + g(x_{i-1},y_{j-1})\big). \quad (4.9)$$

При этом предел не должен зависеть от выбора наборов точек $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1},y_j]$.

Такой подход к определению двойного RS-интеграла имеет недостатки. Во-первых, это определение изначально может быть сформулировано только для прямоугольной области Π, что, на наш взгляд, не очень естественно для двойного интеграла. Во-вторых, существование интеграла (4.9) при условии лишь непрерывности интегрируемой функции f предполагает ограниченность двумерной вариации интегрирующей функции g на прямоугольнике Π. Такое ограничение на g кажется очень жестким, поскольку любая функция с разрывом на линии, отличной от прямой, параллельной какой-либо координатной оси, не будет иметь ограниченной двумерной вариации. Например, рассмотренная нами в примерах выше функция

$$\theta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y,\\ 0, & x > y,\end{cases}$$

имеет бесконечную вариацию на $\Pi = [0,1]\times[0,1]$. Другие свойства функций с ограниченной двумерной вариацией и их применения рассматриваются также в книге [1, с. 59–68].

Примеры вычисления двойного интеграла, рассмотренные в настоящей статье, дают основания ожидать наличия менее жестких требований относительно интегрирующих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. Differential and integral equations: Boundary value problems and adjoints. Prague: Academia, 1979. 249 p.
2. Дерр В.Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 589 с.
5. Толстов Г.П. Мера и интеграл. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. Федоров Д.Л. О криволинейном интеграле Римана–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 117–126. DOI: 10.20537/vm110311

Поступила в редакцию 01.08.2016

Федоров Дмитрий Леонидович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: fdl@udsu.ru

D. L. Fedorov

On the Riemann–Stieltjes double integral

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 366–378 (in Russian).

Keywords: curvilinear integral, double integral, Riemann–Stieltjes integral.

MSC2010: 26A42

DOI: 10.20537/vm160306

The article deals with the new properties of the Riemann–Stieltjes curvilinear integral. It is proved that the Riemann–Stieltjes curvilinear integral is independent of path of integration if an integrable and an integrating functions depend only on one variable. A new necessary condition of the functional dependence of functions of two variables is found. The author proposes a new approach to the definition of the Riemann–Stieltjes double integral, which contains not one but two integrating functions. General properties of the Riemann–Stieltjes double integral are discussed. Methods for calculating the double integral for the case of smooth or piecewise-smooth integrating functions are presented. A formula for the conversion of the Riemann–Stieltjes double integral into an iterated integral is obtained.

REFERENCES

1. Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. *Differential and integral equations: Boundary value problems and adjoints*, Prague: Academia, 1979, 249 p.
2. Derr V.Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of a real variable. Lectures and exercises), Moscow: Vysshaya shkola, 2008, 384 p.
3. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* (Theory of functions of a real variable), Moscow: Nauka, 1974, 480 p.
4. Riesz F., Szökefalvi–Nagy B. *Lektsii po funktsional'nomu analizu* (Lectures on functional analysis), Moscow: Mir, 1979, 589 p.
5. Tolstov G.P. *Mera i integral* (The measure and the integral), Moscow: Nauka, 1976, 392 p.
6. Fedorov D.L. On the line contour Riemann–Stiltjes integral, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 117–126 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110311

Received 01.08.2016

Fedorov Dmitrii Leonidovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: fdl@udsu.ru