УДК 519.6

© *Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВОБОДНЫХ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ[1]

Рассматриваются конструкции, связанные с представлением свободных σ-мультипликативных ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств. В основе построений находятся представления, связанные с применением открытых ультрафильтров в случаях кофинитной и косчетной топологий. Такие ультрафильтры сохраняются (как максимальные фильтры) при замене топологий соответственно алгеброй и σ-алгеброй, порожденных упомянутыми топологиями. В (основном) случае косчетной топологии устанавливается единственность σ-мультипликативного свободного ультрафильтра, составленного из непустых открытых множеств. Показано, что данное свойство сохраняется для σ-алгебр, содержащих косчетную топологию. Указаны две топологии пространства ограниченных конечно-аддитивных борелевских мер, для которых ультрафильтр непустых открытых множеств определяет одноэлементный нарост секвенциально замкнутого множества мер Дирака, возникающий при построении замыкания.

Ключевые слова: алгебра множеств, мера, топология, ультрафильтр.

DOI: 10.20537/vm160305

Введение

Основное содержание работы связано с исследованием свободных [1, раздел 3.6] ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП). Более того, рассматриваются, как правило, свободные σ-мультипликативные (замкнутые относительно счетных пересечений) у/ф. В этом смысле работа является естественным продолжением [2,3] (см. также [4, гл. 10]). В то же время применяемые конструкции оказываются связанными с некоторыми типами открытых у/ф (имеется в виду у/ф топологий); в этой связи см. [5]. Рассматриваются случаи оснащения множеств кофинитной и косчетной топологиями. В последнем случае для несчетного множества конструируется σ-алгебра борелевских подмножеств (п/м) данного множества и для получающегося стандартного ИП устанавливается единственность σ-мультипликативного свободного у/ф, состоящего из непустых открытых в данном косчетном топологическом пространстве (ТП) множеств. Получающееся при этом ИП обладает существенной особенностью: измеримые вещественнозначные (в/з) функции на этом пространстве совпадают каждая с константой на некотором косчетном множестве (непрерывные в/з функции исчерпываются в данном случае константами). Показано также, что при выборе σ-алгебры, содержащей вышеупомянутые борелевские множества, любой σ-мультипликтивный свободный у/ф (данной σ-алгебры) является продолжением у/ф косчетных множеств (то есть у/ф, «составленного» из непустых открытых множеств). Само же существование последнего имеет непосредственное отношение к вопросу о свойствах ИП, допускающих недираковскую счетно-аддитивную (с.-а.) нормированную $(0,1)$-меру. Данный вопрос детально исследовался в [2, 3], а также в [4, гл. 10]. В [3] указаны две характерные топологии пространства ограниченных конечно-аддитивных (к.-а.) мер, определенных на σ-алгебре множеств, для которых множество мер Дирака оказывается секвенциально замкнутым, а недираковские с.-а. нормированные $(0,1)$-меры образуют в своей совокупности нарост, возникающий при построении замыкания упомянутого «дираковского» множества. Таким образом, в рассматриваемом случае стандартного ИП, порожденного косчетной топологией, упомянутый нарост является синглетоном.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16–01–00649, 16–01–00505).

§ 1. Обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и т.п.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, $\exists!$ заменяет фразу «существует и единственно». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если a и b — объекты, то через $\{a;b\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее a, b и не содержащее никаких других элементов. Если s — объект, то $\{s\} \triangleq \{s;s\}$ есть синглетон, содержащий s.

Через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех п/м множества H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$, а $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м H; $(\mathrm{FIN})[H] \triangleq \mathrm{Fin}(H) \cup \{\varnothing\}$. Если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)$, то $\mathbf{C}_H[\mathcal{H}] \triangleq \{H \setminus \mathbb{H} : \mathbb{H} \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big)$ есть семейство, двойственное к $\mathcal{H}$ (в качестве $\mathcal{H}$ обычно используем топологию H, либо семейство замкнутых множеств). В случае, когда $\mathcal{X}$ — непустое семейство, а Y — множество, в виде $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big)$ имеем след $\mathcal{X}$ на Y. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (при $f \in B^A$ и $a \in A$ через $f(a)$ обозначаем, как обычно, значение f в точке a, $f(a) \in B$), при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ через $g^1(C)$ обозначаем образ C при действии g : $g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\}$; для записи отображений (в частности, последовательностей) используем индексную форму записи: если $A \neq \varnothing$ и $y_x \in B$ при $x \in A$, то $\mathbf{y} \triangleq (y_x)_{x \in A} \in B^A$ таково, что $\mathbf{y}(h) = y_h \ \ \forall h \in A$.

Рассмотрим некоторые специальные типы семейств, фиксируя до конца статьи непустое множество E. Тогда

$$\pi[E] \triangleq \big\{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big) \,|\, (\varnothing \in \mathcal{E})\ \&\ (E \in \mathcal{E})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{E} \ \ \forall A \in \mathcal{E} \ \ \forall B \in \mathcal{E})\big\} \tag{1.1}$$

есть семейство всех π-систем [6, с. 14] п/м E с «нулем» и «единицей»;

$$(\mathrm{alg})[E] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[E] \mid E \setminus L \in \mathcal{L} \ \ \forall L \in \mathcal{L}\}, \tag{1.2}$$

$$(\mathrm{top})[E] \triangleq \Big\{\tau \in \pi[E] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\}. \tag{1.3}$$

В (1.2) определены алгебры п/м E, а в (1.3) — топологии на E.

Если (H, τ) есть какое-либо ТП, то через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание произвольного множества $A \in \mathcal{P}(H)$ в данном ТП; $(\tau - \mathrm{dens})[H] \triangleq \{B \in \mathcal{P}(H) \mid H = \mathrm{cl}(B, \tau)\}$, получаем семейство всех всюду плотных в (H, τ) п/м H.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$. При $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$

$$\overline{p, q} \triangleq \{s \in \mathbb{N} \mid (p \leqslant s)\ \&\ (s \leqslant q)\};$$

$$\overrightarrow{m, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid m \leqslant k\} \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Если S — непустое множество, то $(\mathrm{count})[S] \triangleq \{g^1(\mathbb{N}) : g \in S^{\mathbb{N}}\}$ есть семейство всех не более чем счетных, непустых п/м S.

Фильтры и ультрафильтры π-систем. До конца настоящего раздела фиксируем π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$. Тогда

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{E}] \triangleq \Big\{\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{C})\Big\} \tag{1.4}$$

есть семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{E}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\\ \&\ \big(\forall F \in \mathcal{F} \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ \ (F \subset \Sigma) \Rightarrow (\Sigma \in \mathcal{F})\big)\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

есть множество всех фильтров понимаемого расширительно ИП $(E,\mathcal{E})$. При введении у/ф ИП $(E,\mathcal{E})$ представления (1.4) и (1.5) удается «состыковать»:

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \mid \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ (\Sigma \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Sigma \in \mathcal{U})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{E}] \mid \forall \mathcal{C} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{E}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{C}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{C})\}\end{gathered} \tag{1.6}$$

есть множество всех у/ф ИП $(E,\mathcal{E})$. Итак, у/ф π-системы $\mathcal{E}$ — суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{E}$ и только они. Отметим, что [7, с. 29] $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Поэтому $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) \neq \varnothing$ (в самом деле, $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$ и можно применить последнее свойство). Ясно, что

$$(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{\Sigma \in \mathcal{E} \mid x \in \Sigma\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \ \ \forall x \in E; \tag{1.7}$$

в (1.7) определен тривиальный фильтр, связанный с фиксированной точкой E. Получаем, что

$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] : x \in E\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{E})\big)$$

(множество всех тривиальных $\mathcal{E}$-фильтров), а тогда

$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing\Big\} = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) \setminus \mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{E})$$

есть множество всех свободных у/ф ИП $(E,\mathcal{E})$. Введем, кроме того,

$$\mathbb{F}_{o,\sigma}^*(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) \mid \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \in \mathcal{U} \ \ \forall (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}\Big\},$$

получая множество всех σ-мультипликативных у/ф ИП $(E,\mathcal{E})$. Пусть

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}) \mid \Sigma \in \mathcal{U}\} \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}, \tag{1.8}$$

непустое семейство $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{E}\}$ есть база T_2-топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{E})\big) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G} \ \exists U \in \mathcal{U} : \ \Phi_{\mathcal{E}}(U) \subset \mathbb{G}\} \tag{1.9}$$

множества $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{E})$; при этом $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{E})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]\big]$, а потому хаусдорфово ТП

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]\big) \tag{1.10}$$

нульмерно [1, раздел 6.2]. Отметим некоторые частные случаи (согласно (1.2), (1.3) в качестве $\mathcal{E}$ могут использоваться алгебра п/м E и топология на E). При этом в случае, когда $\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]$, ТП (1.10) — нульмерный компакт. Если же $\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E]$, то (1.10) есть экстремально несвязный [1, с. 540] компакт: последнее установлено в [8,9]. В заключение раздела совсем кратко коснемся случая $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, ограничиваясь рассмотрением множества $\mathbb{F}^*\big(\mathcal{P}(E)\big)$. Введем

$$\begin{gathered}(\mathrm{BAS})[E] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big) \mid \big(E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\big) \ \& \ \big(\forall B_1 \in \mathcal{B} \ \ \forall B_2 \in \mathcal{B} \ \ \forall x \in B_1 \cap B_2 \\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : \ (x \in B_3) \ \& \ (B_3 \subset B_1 \cap B_2)\big)\Big\};\end{gathered} \tag{1.11}$$

элементы (1.11) — базы топологий и только они. Если $\mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[E]$, то

$$\{\cup\}(\mathcal{B}) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(E) \mid \forall x \in G \ \exists B \in \mathcal{B} : \ (x \in B) \ \& \ (B \subset G)\} \in (\mathrm{top})[E] \tag{1.12}$$

(введена топология на E, порожденная базой $\mathcal{B}$). Отметим одно свойство, связанное с представлением [3, замечание 7.1].

Прежде всего заметим, что (см. (1.5)) $\mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E)) \subset (\mathrm{BAS})[E]$, а потому при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$ определена [3, с. 241] топология $\{\cup\}(\mathcal{F}) \in (\mathrm{top})[E]$, порожденная фильтром $\mathcal{F}$. Легко видеть (см. (1.12)), что

$$\{\cup\}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \cup \{\varnothing\} \quad \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E)). \tag{1.13}$$

Рассматриваемые ниже кофинитная и косчетная топологии имеют вид (1.13) (при соответствующем выборе фильтра). Из (1.3), (1.6) и (1.13) вытекает, что

$$\mathcal{F} \in \mathbb{F}_o^*(\{\cup\}(\mathcal{F})) \quad \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E)). \tag{1.14}$$

Конструкция на основе (1.13), (1.14) подобна построениям [4, гл. 10], касающимся применения ИП (см. [4, (10.14.8), (10.14.14)]).

§ 2. Открытые ультрафильтры (общие сведения)

В настоящем разделе фиксируем непустое множество E и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Как уже отмечалось (см. (1.3)), τ может использоваться в качестве π-системы $\mathcal{E}$ предыдущего раздела, а

$$(\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}_\tau^*[E]) \tag{2.1}$$

есть непустой экстремально несвязный компакт. Если $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)$, то полагаем $\mathbb{F}_o^*(\tau \mid \mathcal{G}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau) \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{U}\}$. Ясно, что

$$N_\tau^o(x) \triangleq (\tau - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}^*(\tau) \tag{2.2}$$

(фильтр открытых окрестностей x в ТП (E, τ)). Легко видеть также, что

$$\mathbb{F}_o^*(\tau \mid N_\tau^o(x)) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\tau)}[\mathbf{T}_\tau^*[E]] \setminus \{\varnothing\} \quad \forall\, x \in E. \tag{2.3}$$

Итак, в (2.3) определены непустые замкнутые (в ТП (2.1)) п/м $\mathbb{F}_o^*(\tau)$; каждое из этих множеств «привязано» к фиксированной точке E. В этой связи совсем кратко напомним понятие сходимости базы фильтра (БФ) множества E; итак,

$$\beta_o[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E)) \mid \forall\, B_1 \in \mathcal{B} \;\; \forall\, B_2 \in \mathcal{B} \;\; \exists\, B_3 \in \mathcal{B}: \; B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$$

есть множество всех БФ E; см. [10, гл. I]. Если $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$, то

$$\mathfrak{F}[\mathcal{B}] \triangleq \{\Sigma \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, B \in \mathcal{B}: \; B \subset \Sigma\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$$

(напомним, что $\mathcal{P}(E) \in \pi[E]$, а потому для этого случая могут использоваться понятия, введенные в разделе 1). В частности (см. (2.2)), при $x \in E$ имеем $N_\tau^o(x) \in \beta_o[E]$, а

$$N_\tau(x) \triangleq \mathfrak{F}[N_\tau^o(x)] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$$

соответствует [10, гл. I] (фильтр окрестностей x в ТП (E, τ)). Если $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$ и $x \in E$, то [10, гл. I]

$$(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Rightarrow} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset \mathfrak{F}[\mathcal{B}]). \tag{2.4}$$

При этом $\mathbb{F}_o^*(\tau) \subset \mathbb{F}^*(\tau) \subset \beta_o[E]$, а потому (2.4) применимо к случаю $\mathcal{B} = \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$.

Предложение 2.1. *Если $x \in E$, то $\mathbb{F}_o^*(\tau \mid N_\tau^o(x)) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau) \mid \mathcal{U} \overset{\tau}{\Rightarrow} x\}$.*

Мы опустим достаточно простое доказательство предложения 2.1. Легко видеть, что

$$(\tau - \mathrm{Abs})[E] \triangleq \bigcup_{x \in E} \mathbb{F}_o^*(\tau \mid N_\tau^o(x)) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_o^*(\tau))$$

(аналог абсолюта [5]). Отметим, что $\forall G \in \tau \setminus \{\varnothing\}\ \exists\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$: $G \in \mathcal{U}$. Как следствие $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$

$$\big((\tau - \mathrm{Abs})[E] = \{\mathcal{U}\}\big) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} = \tau \setminus \{\varnothing\}). \tag{2.5}$$

Вместе с тем с учетом положений [9] имеем, что $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$

$$\big((\tau - \mathrm{Abs})[E] = \{\mathcal{U}\}\big) \Longleftrightarrow \big(\mathbb{F}_o^*(\tau) = \{\mathcal{U}\}\big).$$

С учетом (2.5) получаем также, что $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau) = \{\mathcal{U}\}\big) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} = \tau \setminus \{\varnothing\}). \tag{2.6}$$

Свойства (2.5), (2.6) характеризуют некий вырожденный случай открытого у/ф, к более подробному рассмотрению которого мы переходим в следующем разделе.

§ 3. Топология Зарисского и свойство единственности открытого ультрафильтра

Всюду в дальнейшем предполагается, что E — бесконечное множество. Условимся, кроме того, через $\mathcal{P}_\infty(E)$ обозначать семейство всех бесконечных п/м $E, \mathcal{P}_\infty(E) \subset \mathcal{P}'(E)$. Ясно, что $\mathcal{P}(K) \subset \subset (\mathrm{FIN})[E]\ \ \forall K \in (\mathrm{FIN})[E]$. Кроме того,

$$E \setminus K \in \mathcal{P}_\infty(E)\ \ \forall K \in (\mathrm{FIN})[E]; \tag{3.1}$$

вообще $\mathcal{P}_\infty(E) = \mathcal{P}'(E) \setminus (\mathrm{FIN})[E]$. При этом

$$(\mathrm{cof})[E] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{FIN})[E]\big] \cup \{\varnothing\} \in (\mathrm{top})[E] \tag{3.2}$$

есть известная топология Зарисского (кофинитная топология) [11, с. 11]. Отметим простейшие свойства ТП

$$\big(E, (\mathrm{cof})[E]\big). \tag{3.3}$$

Прежде всего, семейство всех замкнутых в ТП (3.3) множеств имеет вид

$$\mathbf{C}_E\big[(\mathrm{cof})[E]\big] = (\mathrm{FIN})[E] \cup \{E\}. \tag{3.4}$$

Разумеется, $(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\} \subset \mathcal{P}_\infty(E)$. При этом $\mathrm{cl}\big(A, (\mathrm{cof})[E]\big) = E\ \ \forall A \in \mathcal{P}_\infty(E)$. Легко видеть, что (3.3) есть T_1-, но не T_2-пространство. При этом

$$N^o_{(\mathrm{cof})[E]}(x) = N_{(\mathrm{cof})[E]}(x)\ \ \forall x \in E. \tag{3.5}$$

Легко видеть, что $(\mathrm{cof})[E]$ есть наименьшая по включению T_1-топология на множестве E. Отметим, что в силу (3.2)

$$(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{FIN})[E]\big] \in \mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{cof})[E]\big) \tag{3.6}$$

(см. в этой связи (2.6)). Более того, множество $\mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{cof})[E]\big)$ одноэлементно:

$$\mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{cof})[E]\big) = \big\{(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\} = \big\{\mathbf{C}_E\big[(\mathrm{FIN})[E]\big]\big\}. \tag{3.7}$$

Как следствие получаем, что $\mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{cof})[E] \mid N^o_{(\mathrm{cof})[E]}(x)\big) = \big\{(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}\ \ \forall x \in E$. Поэтому (см. предложение 2.1)

$$(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\} \stackrel{(\mathrm{cof})[E]}{\Longrightarrow} x\ \ \forall x \in E. \tag{3.8}$$

Итак, открытый у/ф (3.6) сходится к любой точке (бесконечного) множества E. Данный у/ф является свободным, то есть имеет пустое пересечение всех своих множеств:

$$(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\big((\mathrm{cof})[E]\big). \tag{3.9}$$

Введем в рассмотрение алгебру $\mathcal{A}$ п/м E, порожденную топологией $(\mathrm{cof})[E]$. Итак, $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$ такова, что

$$\big((\mathrm{cof})[E] \subset \mathcal{A}\big) \ \& \ \big(\forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \quad \big((\mathrm{cof})[E] \subset \mathcal{L}\big) \Longrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{L})\big);$$

$(E, \mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств. Легко видеть, что

$$\mathcal{A} = (\mathrm{cof})[E] \cup \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{cof})[E]\big]. \tag{3.10}$$

При этом, как легко проверить, имеет место аналог (3.9):

$$(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{A}). \tag{3.11}$$

Отметим, что в виде

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]\big) \tag{3.12}$$

реализуется пространство Стоуна (нульмерный компакт). Согласно (3.4) и (3.10) $\{x\} \in \mathcal{A}\ \forall\, x \in E$. Тогда $\mathrm{Fin}(E) \subset \mathcal{A}$. Если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{A})$, то

$$\big(\mathcal{U} \cap \mathrm{Fin}(E) \neq \varnothing\big) \Longrightarrow \big(\exists\, x \in E : \mathcal{U} = (\mathcal{A} - \mathrm{triv})[x]\big). \tag{3.13}$$

Предложение 3.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) = \big\{(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.11) достаточно установить вложение

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) \subset \big\{(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}. \tag{3.14}$$

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{A})$, получая, в частности, что $\mathcal{V} \subset (\mathrm{cof})[E] \cup \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{cof})[E]\big]$. В силу (3.13)

$$L \notin \mathrm{Fin}(E) \quad \forall\, L \in \mathcal{V}. \tag{3.15}$$

Фиксируем $V \in \mathcal{V}$ и в силу (3.15) имеем, что $V \notin \mathrm{Fin}(E)$. Если $V \in \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{cof})[E]\big] \setminus \{\varnothing\}$, то согласно (3.4) $V = E \in (\mathrm{cof})[E]$. С учетом (3.10) получаем, что $\mathcal{V} \subset (\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}$. В силу максимальности $\mathcal{V}$ имеем равенство $\mathcal{V} = (\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}$, чем завершается проверка (3.14). □

Легко видеть также, что $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\big((\mathrm{cof})[E]\big) = \big\{(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}$. Отметим, наконец, что, поскольку $\mathcal{A}$ содержит синглетоны всех точек из E, отображение

$$(\mathcal{A} - \mathrm{triv})[\cdot] \overset{\triangle}{=} \big((\mathcal{A} - \mathrm{triv})[x]\big)_{x \in E} \tag{3.16}$$

есть гомеоморфизм дискрета $\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ на $\big(\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]|_{\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{A})}\big)$. Более того, справедлива

Теорема 3.1. *Отображение* (3.16) *определяет расширение дискрета* $\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ *до пространства Стоуна с одноэлементным наростом:* $(\mathcal{A} - \mathrm{triv})[\cdot]$ *есть (гомеоморфное) вложение* $\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ *в компакт* $\big(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]\big)$ *в виде*

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(E) = \{(\mathcal{A} - \mathrm{triv})[x] : \, x \in E\} \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] - \mathrm{dens})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{A})].$$

Доказательство следует из упомянутого свойства гомеоморфности оператора (3.16) и свойств плотности [12, (1.19)–(1.21)] (см. также предложение 3.1).

В заключение раздела отметим в связи с (1.13) и (1.14), что $(\mathrm{cof})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{FIN})[E]\big] \in \mathbb{F}^*\big(\mathcal{P}(E)\big)$.

§ 4. Косчетная топология и открытые ультрафильтры

В настоящем разделе полагаем, что E — несчетное множество: тогда $E \neq \varnothing$ и $E \notin (\mathrm{count})[E]$, где $(\mathrm{count})[E] = \{f^1(\mathbb{N}) : f \in E^{\mathbb{N}}\}$. При этом

$$\omega[E] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{count})[E] \cup \{\varnothing\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$$

есть семейство всех не более чем счетных п/м E, $(\mathrm{FIN})[E] \subset \omega[E]$. Ясно, в частности, что E — бесконечное множество. Через $\mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$ обозначаем семейство всех несчетных п/м E, то есть

$$\mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(E) \setminus (\mathrm{count})[E] = \mathcal{P}'(E) \setminus \omega[E];$$

$\mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E) \subset \mathcal{P}_{\infty}(E)$. При этом $E \setminus C \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)\ \forall\, C \in \omega[E]$. Семейство

$$\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] = \{E \setminus C : C \in \omega[E]\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big) \tag{4.1}$$

порождает следующую топологию на множестве E:

$$(\mathrm{coc})[E] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \cup \{\varnothing\} \in (\mathrm{top})[E]; \tag{4.2}$$

условимся именовать топологию (4.2) косчетной, $(\mathrm{cof})[E] \subset (\mathrm{coc})[E]$. Семейство замкнутых в ТП

$$\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big) \tag{4.3}$$

множеств имеет следующий вид:

$$\mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big] = \omega[E] \cup \{E\}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) вытекает, что $\mathrm{cl}\big(H, (\mathrm{coc})[E] = E\ \ \forall\, H \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$. Отметим, что из (4.1) и (4.2) легко следует, что $(\mathrm{coc})[E]$ есть σ-мультипликативная топология:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i \in (\mathrm{coc})[E]\ \ \forall\, (G_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathrm{coc})[E]^{\mathbb{N}};$$

итак, (4.3) есть P-пространство. Заметим также, что $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \subset \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$. Итак, в ТП (4.3) все непустые открытые множества несчетны. Само ТП (4.3) является T_1-, но не T_2-пространством. При этом, как легко видеть,

$$\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] = (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{coc})[E]\big) \tag{4.5}$$

и, более того, справедлива цепочка равенств

$$\mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{coc})[E]\big) = \big\{\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]\big\} = \big\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}. \tag{4.6}$$

В свою очередь, из (2.3) и (4.6) вытекает, что

$$\mathbb{F}_o^*\big((\mathrm{coc})[E] \mid N^o_{(\mathrm{coc})[E]}(x)\big) = \big\{\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]\big\} = \big\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}\ \ \forall\, x \in E.$$

С учетом предложения 2.1 получаем, что

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \stackrel{(\mathrm{coc})[E]}{\Longrightarrow} x\ \ \forall\, x \in E. \tag{4.7}$$

Свойство (4.7) аналогично (3.8). Вполне очевидно следующее

Предложение 4.1. *В виде* (4.5) *имеем свободный открытый у/ф:*

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\big((\mathrm{coc})[E]\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $(\mathrm{FIN})[E] \subset \omega[E]$, то $\mathbf{C}_E\bigl[(\mathrm{FIN})[E]\bigr] \subset \mathbf{C}_E\bigl[\omega[E]\bigr]$, а тогда из (3.6) и (3.9) имеем, что пересечение всех множеств из у/ф (4.5) пусто, что и требовалось доказать. □

Следствие 4.1. *Семейство* $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\bigl((\mathrm{coc})[E]\bigr)$ *одноэлементно:*

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\bigl((\mathrm{coc})[E]\bigr) = \bigl\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\bigr\}.$$

Доказательство следует из (4.6), предложения 4.1 и вложения $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\bigl((\mathrm{coc})[E]\bigr) \subset \mathbb{F}^*_o\bigl((\mathrm{coc})[E]\bigr)$. Таким образом,

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}\bigl((\mathrm{coc})[E]\bigr) = \mathbb{F}^*_o\bigl((\mathrm{coc})[E]\bigr) = \bigl\{\mathbf{C}_E[\omega[E]]\bigr\} = \bigl\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\bigr\}. \tag{4.8}$$

Итак, открытый (в ТП (4.3)) у/ф является единственным и притом свободным.

Через $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ условимся обозначать множество всех σ-алгебр п/м E:

$$\begin{aligned}(\sigma - \mathrm{alg})[E] &\triangleq \Bigl\{\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \mid \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i \in \mathcal{L} \;\; \forall (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}\Bigr\} = \\ &= \Bigl\{\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \mid \bigcap_{i\in\mathbb{N}} L_i \in \mathcal{L} \;\; \forall (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}\Bigr\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Введем в рассмотрение σ-алгебру $\mathfrak{E}$ п/м E, порожденную топологией $(\mathrm{coc})[E]$: $\mathfrak{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, причем

$$\bigl((\mathrm{coc})[E] \subset \mathfrak{E}\bigr) \;\&\; \Bigl(\forall \mathcal{L} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E] \;\; \bigl((\mathrm{coc})[E] \subset \mathcal{L}\bigr) \Longrightarrow (\mathfrak{E} \subset \mathcal{L})\Bigr). \tag{4.10}$$

Итак, $\mathfrak{E}$ есть σ-алгебра борелевских множеств, отвечающая ТП (4.3).

Предложение 4.2. *Справедливо равенство* $\mathfrak{E} = (\mathrm{coc})[E] \cup \mathbf{C}_E\bigl[(\mathrm{coc})[E]\bigr]$.

Доказательство предложения опустим, так как оно легко извлекается из положений заключительной части работы [3] (см., кроме того, [2] в более кратком изложении, а также [4, § 10.14]).

Отметим здесь же, имея в виду (1.13) и (1.14), тот легкопроверяемый факт, что

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathbf{C}_E\bigl[\omega[E]\bigr] \in \mathbb{F}^*\bigl(\mathcal{P}(E)\bigr).$$

Предложение 4.3. *Семейство* $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$ *является свободным у/ф ИП* $(E, \mathfrak{E})$*:*

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}). \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 4.1 и (4.10) следует, что $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$ есть непустое подсемейство $\mathfrak{E} \setminus \{\varnothing\}$, то есть

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{E} \setminus \{\varnothing\})$$

(см. (1.5), (1.6)), причем (см. предложение 4.1) справедливо равенство

$$\bigcap_{G \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}} G = \varnothing. \tag{4.12}$$

С учетом (1.5), (1.6) и (4.5) имеем, что

$$A \cap B \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall A \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall B \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.13}$$

Пусть $\mathbb{G} \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$, а $\Lambda \in \mathfrak{E}$ таково, что $\mathbb{G} \subset \Lambda$. С учетом (4.5) получаем, что $\mathbb{G} \in \mathbf{C}_E\bigl[\omega[E]\bigr]$, а тогда для некоторого множества $\mathbb{C} \in \omega[E]$ имеем равенство $\mathbb{G} = E \setminus \mathbb{C}$. При этом

$$E \setminus \Lambda \subset E \setminus \mathbb{G} = E \setminus (E \setminus \mathbb{C}) = \mathbb{C},$$

а потому $E \setminus \Lambda \in \omega[E]$ и, стало быть,

$$\Lambda = E \setminus (E \setminus \Lambda) \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big],$$

то есть $\Lambda \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$. Установили импликацию

$$(\mathbb{G} \subset \Lambda) \Longrightarrow \big(\Lambda \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big).$$

Поскольку выбор $\mathbb{G}$ и Λ был произвольным, установлено, что $\forall\, G \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\ \ \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E}$

$$(G \subset \Sigma) \Longrightarrow \big(\Sigma \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big).$$

С учетом (1.5) и (4.13) получаем, что $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}^*(\mathfrak{E})$. Покажем, что данный фильтр максимален.

Действительно, пусть $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^*(\mathfrak{E})$ обладает свойством $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Тогда (см. (4.5))

$$\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \subset \widetilde{\mathcal{F}}. \tag{4.14}$$

Покажем, что $\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] = \widetilde{\mathcal{F}}$. В самом деле, допустим противное. Тогда в силу (4.14)

$$\widetilde{\mathcal{F}} \setminus \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \neq \varnothing. \tag{4.15}$$

Пусть $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}} \setminus \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$. Тогда, в частности, $\widetilde{F} \in \mathfrak{E}$ и $\widetilde{F} \notin \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$; поэтому $\widetilde{F} \notin (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$. Из (1.5) имеем по выбору $\widetilde{F}$, что $\widetilde{F} \neq \varnothing$. Поэтому $\widetilde{F} \notin \{\varnothing\}$, и, стало быть,

$$\widetilde{F} \notin \big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big) \cup \{\varnothing\};$$

тогда $\widetilde{F} \notin (\mathrm{coc})[E]$ (напомним, что $\varnothing \in (\mathrm{coc})[E]$ согласно (4.2)). Поэтому $\widetilde{F} \in \mathfrak{E} \setminus (\mathrm{coc})[E]$, а тогда из предложения 4.2 следует, что

$$\widetilde{F} \in \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big].$$

Из (4.4) получаем, что $(\widetilde{F} \in \omega[E]) \vee (\widetilde{F} = E)$. Но $E = E \setminus \varnothing \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$, а потому $\widetilde{F} \neq E$ (напомним, что $\widetilde{F} \notin \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$). Итак, $\widetilde{F} \in \omega[E]$. Тогда

$$E \setminus \widetilde{F} \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$$

и, как следствие, (см. (4.14)) $E \setminus \widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Поэтому, согласно (1.5), имеем по выбору $\widetilde{F}$, что $\widetilde{F} \cap (E \setminus \widetilde{F}) \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Но $\widetilde{F} \cap (E \setminus \widetilde{F}) = \varnothing \notin \widetilde{\mathcal{F}}$ (см.(1.5)). Полученное при условии (4.15) противоречие показывает, что само (4.15) невозможно и $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$, а тогда (см. (4.14)) $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] = (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$. Итак,

$$\big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \subset \widetilde{\mathcal{F}}\big) \Longrightarrow \big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} = \widetilde{\mathcal{F}}\big). \tag{4.16}$$

Поскольку выбор $\widetilde{\mathcal{F}}$ был произвольным, установлено, что $\forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathfrak{E})$

$$\big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \subset \mathcal{F}\big) \Longrightarrow \big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathcal{F}\big),$$

откуда в силу (1.6) вытекает, что

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E}).$$

С учетом (4.12) получаем требуемое свойство (4.11). □

Предложение 4.4. *Имеет место следующее свойство σ-мультипликативности ультрафильтра* $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$*:*

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \quad \forall\, (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big)^{\mathbb{N}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\mathbb{G}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \big((\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big)^{\mathbb{N}}$. Тогда

$$(\mathbb{G}_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{G}_E\big[\omega[E]\big].$$

Это означает, что $\forall\, j \in \mathbb{N}\ \exists\, C \in \omega[E] : \mathbb{G}_j = E \setminus C$. Иными словами,

$$E \setminus \mathbb{G}_j \in \omega[E] \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Как следствие получаем тогда, что

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E \setminus \mathbb{G}_i) \in \omega[E],$$

а потому имеем с очевидностью, что

$$E \setminus \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E \setminus \mathbb{G}_i)\Big) \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]. \tag{4.17}$$

Но по формулам двойственности получаем цепочку равенств

$$E \setminus \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E \setminus \mathbb{G}_i)\Big) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (E \setminus (E \setminus \mathbb{G}_i)) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{G}_i.$$

Из (4.5) и (4.17) получаем теперь, что

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{G}_i \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}.$$

Поскольку выбор последовательности $(\mathbb{G}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ был произвольным, предложение доказано. □

Итак, $\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] = (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$ есть σ-мультипликативный свободный у/ф ИП $(E, \mathfrak{E})$. Напомним, что

$$\mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E}) = \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathfrak{E}) \mid \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i \in \mathcal{U} \quad \forall\, (\Sigma_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}\Big\}. \tag{4.18}$$

Тогда из предложений 4.3 и 4.4 имеем, что

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E}). \tag{4.19}$$

Предложение 4.5. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E}) = \big\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\}. \tag{4.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.19) имеем очевидное вложение

$$\big\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\} \subset \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E}). \tag{4.21}$$

Пусть $\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E})$. Тогда, в частности, $\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}^*_o(\mathfrak{E})$, а потому $\forall\, \Sigma \in \mathfrak{E}$

$$(\Sigma \in \mathfrak{Y}) \vee (E \setminus \Sigma \in \mathfrak{Y}) \tag{4.22}$$

(в связи с (4.22) напомним, что $\mathfrak{E} \in (\mathrm{alg})[E]$; см. также [7, (2.2.59)]). Кроме того, имеем, что (см. (4.18))

$$\Big(\bigcap_{L\in\mathfrak{Y}} L = \varnothing\Big) \ \&\ \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i \in \mathfrak{Y} \quad \forall\, (\Sigma_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{Y}^{\mathbb{N}}\Big). \tag{4.23}$$

Покажем, что $C \notin \mathfrak{Y}\ \ \forall\, C \in \omega[E]$. В самом деле, допустим противное: для некоторого множества $\mathbb{C} \in \omega[E]$ имеем, что $\mathbb{C} \in \mathfrak{Y}$. Поскольку $\varnothing \notin \mathfrak{Y}$, то $\mathbb{C} \neq \varnothing$. Тогда $\mathbb{C} \in (\mathrm{count})[E]$ и для некоторой последовательности

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow E$$

справедливо равенство $\mathbb{C} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ (при $\varphi \triangleq (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ имеем, что $\varphi^1(\mathbb{N}) = \{x_i : \ i \in \mathbb{N}\}$). Допустим, что $\{x_j\} \notin \mathfrak{Y} \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Поскольку $\{x_j\} \in (\mathrm{FIN})[E]$, то $\{x_j\} \in \omega[E]$ при $j \in \mathbb{N}$; в частности, $\{x_j\} \in \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big]$. В итоге

$$(\{x_i\})_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{E},$$

а потому (согласно (4.22)) получаем, что

$$E \setminus \{x_j\} \in \mathfrak{Y} \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$

Но в этом случае в силу σ-мультипликативности $\mathfrak{Y}$ имеем из (4.24), что

$$E \setminus \mathbb{C} = E \setminus \{x_i : i \in \mathbb{N}\} = E \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x_i\}\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (E \setminus \{x_i\}) \in \mathfrak{Y},$$

а тогда $\mathbb{C} \cap (E \setminus \mathbb{C}) \neq \varnothing$ (см. (1.5)), что невозможно. Следовательно, при нашем условии $\mathbb{C} \in \mathfrak{Y}$ свойство

$$\{x_j\} \notin \mathfrak{Y} \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

невозможно; поэтому для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ имеет место $\{x_\nu\} \in \mathfrak{Y}$, откуда легко следует, что

$$\mathfrak{Y} = (\mathfrak{E} - \mathrm{triv})[x_\nu] \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathfrak{E}),$$

что также невозможно, так как $\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E})$ (см. раздел 1). Противоречие доказывает свойство

$$C \notin \mathfrak{Y} \ \ \forall C \in \omega[E].$$

Пусть $U \in \mathfrak{Y}$. Тогда, как уже установлено, $U \in \mathfrak{E} \setminus \omega[E]$. При этом

$$(U = E) \Longrightarrow \big(U \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big). \tag{4.25}$$

Пусть $U \neq E$. Тогда в силу (4.4) получаем, что $U \notin \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big]$ и, коль скоро $U \in \mathfrak{E}$, имеем из предложения 4.2, что $U \in (\mathrm{coc})[E]$. Коль скоро $U \neq \varnothing$ (см. (1.5)), получаем, что $U \in \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$, чем завершается проверка истинности импликации

$$(U \neq E) \Longrightarrow \big(U \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big).$$

С учетом (4.25) получаем, что $U \in (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$ во всех возможных случаях. Итак, установлено, что

$$\mathfrak{Y} \subset (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\},$$

откуда в силу максимальности $\mathfrak{Y}$ имеем (см. (1.6), предложение 4.3), что $\mathfrak{Y} = (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$. Поскольку выбор $\mathfrak{Y}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E}) \subset \big\{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}\big\},$$

чем и завершается (см. (4.21)) проверка (4.20). □

В заключение раздела отметим, что $N_{(\mathrm{coc})[E]}(x) = N^o_{(\mathrm{coc})[E]}(x) \ \ \forall x \in E$. Данное свойство подобно (3.5).

§ 5. Расширение несчетного дискрета с использование косчетной топологии

В настоящем кратком разделе, как и в предыдущем, полагаем, что E — несчетное множество; рассматриваем ТП (4.3), а также ИП $(E, \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ есть σ-алгебра борелевских множеств, отвечающая топологии $(\mathrm{coc})[E]$. С учетом (4.4) и предложения 4.2 имеем, что $\omega[E] \subset \subset \mathfrak{E}$ и, в частности, $(\mathrm{FIN})[E] \subset \mathfrak{E}$. Тогда

$$\{x\} \in \mathfrak{E} \ \ \forall x \in E. \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, в частности, что $(\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E}) \quad \forall\, x \in E$. Подобно (3.16) определяем отображение
$$(\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[\cdot] \triangleq \big((\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[x]\big)_{x\in E} \in \mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E})^E. \tag{5.2}$$
С другой стороны, имеем в виде конкретизации (1.11) непустой нульмерный компакт
$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E}), \mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]\big), \tag{5.3}$$
причем из (5.1) легко следует, что
$$\mathcal{P}\big(\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E})\big) \subset \mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]. \tag{5.4}$$
В частности, $\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E}) \in \mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]$. С учетом (5.4) получаем, что
$$\mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]\big|_{\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E})} = \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E})\big).$$
В качестве весьма очевидного следствия имеем, что $(\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[\cdot]$ есть гомеоморфизм несчетного дискрета $\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ на $\big(\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E}), \mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]\big|_{\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E})}\big)$, где
$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E}) \in (\mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]-\mathrm{dens})[\mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E})].$$

Теорема 5.1. *Отображение* (5.2) *определяет расширение дискрета* $\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ *до пространства Стоуна* (5.3)*:* $(\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[\cdot]$ *есть (гомеоморфное) вложение* $\big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ *в компакт* (5.3) *в виде*
$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E) = \{(\mathfrak{E}-\mathrm{triv})[x] : x \in E\} \in (\mathbf{T}_{\mathfrak{E}}^*[E]-\mathrm{dens})[\mathbb{F}_o^*(E)].$$

§ 6. Добавление, 1 (свойства мер)

В настоящем разделе рассматриваются стандартное ИП $(E, \mathfrak{E})$ раздела 4 и меры на данном ИП, включая меры конечно-аддитивные (к.-а.). Основное внимание уделяется нормированным $(0,1)$-мерам. Введем некоторые обозначения, полагая, что E несчетно.

В виде $(\mathrm{add})[\mathfrak{E}] \triangleq \{\mu \in \mathbb{R}^{\mathfrak{E}} \mid \forall\, \Sigma_1 \in \mathfrak{E} \quad \forall\, \Sigma_2 \in \mathfrak{E} \quad (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing) \Longrightarrow \big(\mu(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \mu(\Sigma_1) + \mu(\Sigma_2)\big)\}$ имеем линейное пространство в/з к.-а. мер на $\mathfrak{E}$ с конусом
$$(\mathrm{add})_+[\mathfrak{E}] \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})[\mathfrak{E}] \mid 0 \leqslant \mu(\Sigma) \quad \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E}\}$$
неотрицательных (поточечно) элементов. Через $(\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{E}]$ и $(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathfrak{E}]$ обозначаем соответственно множества всех в/з счетно-аддитивных (с.-а.) и всех в/з неотрицательных с.-а. мер на $\mathfrak{E}$ соответственно. Полагаем $\mathbb{P}(\mathfrak{E}) \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathfrak{E}] \mid \mu(E) = 1\}$ и $\mathbb{P}_\sigma(\mathfrak{E}) \triangleq \{\mu \in (\sigma-\mathrm{add})_+[\mathfrak{E}] \mid \mu(E) = 1\}$ (при $\mu \in \mathbb{P}_\sigma(\mathfrak{E})$ в виде $(E, \mathfrak{E}, \mu)$ имеем вероятностное пространство). Наконец, пусть
$$\begin{gathered}\mathbb{T}(\mathfrak{E}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}(\mathfrak{E}) \mid \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E} \quad (\mu(\Sigma) = 0) \ \vee \ (\mu(\Sigma) = 1)\}\,,\\ \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}_\sigma(\mathfrak{E}) \mid \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E} \quad (\mu(\Sigma) = 0) \ \vee \ (\mu(\Sigma) = 1)\} \in \mathcal{P}'\left(\mathbb{T}(\mathfrak{E})\right).\end{gathered} \tag{6.1}$$
Кроме того, в виде
$$\mathbb{A}(\mathfrak{E}) \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})[\mathfrak{E}] \mid \exists\, c \in [0, \infty[\colon \ |\mu(\Sigma)| \leqslant c \quad \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E}\} \tag{6.2}$$
имеем также множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathfrak{E}$ (см. [13, (2.2.8), (4.11.6)]). Разумеется, $(\sigma-\mathrm{add})[\mathfrak{E}]$ и $\mathbb{A}(\mathfrak{E})$ — суть линейные пространства.

Если $x \in E$, то через $\delta_x \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E})$ обозначаем меру Дирака, сосредоточенную в точке x: при $\Sigma \in \mathfrak{E}$ имеем $\delta_x(\Sigma) \triangleq 1$, если $x \in \Sigma$, и $\delta_x(\Sigma) \triangleq 0$, если $x \notin \Sigma$. Тогда
$$\mathbf{D}(\mathfrak{E}) \triangleq \{\delta_x : x \in E\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E})\big).$$

Учитывая [13, теорема 2.8.1], получаем, что при $\mathbb{B}(E) \triangleq \{g \in \mathbb{R}^E \mid \exists\, a \in [0,\infty[\colon\ |g(x)| \leqslant a\ \forall\, x \in \in E\}$

$$B(E,\mathfrak{E}) \triangleq \big\{f \in \mathbb{B}(E) \mid f^{-1}(\,]-\infty, c[\,) \in \mathfrak{E}\ \ \forall\, c \in \mathbb{R}\big\} \tag{6.3}$$

есть (одновременно) множество всех ярусных относительно ИП $(E,\mathfrak{E})$ в/з функций на E. Если $f \in B(E,\mathfrak{E})$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E})$, то [13, (3.3.11)] определен μ-интеграл f на множестве E:

$$\int_E f\, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Отметим, наконец, что $\mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E})$ и $\mathbb{T}(\mathfrak{E})$ в оснащении естественными топологиями (имеются в виду (5.3) и относительная $*$-слабая топология на $\mathbb{T}(\mathfrak{E})$ соответственно) отождествимы [14, предложение 4.2]. В этой связи введем индикаторы подсемейств $\mathfrak{E}$: если $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathfrak{E})$, то полагаем, что

$$\mathbb{X}_{\mathcal{S}} :\ \mathfrak{E} \longrightarrow \{0;1\} \tag{6.4}$$

определяется посредством следующего правила

$$\big(\mathbb{X}_{\mathcal{S}}(S) \triangleq 1\ \ \forall\, S \in \mathcal{S}\big)\ \&\ \big(\mathbb{X}_{\mathcal{S}}(\Sigma) \triangleq 0\ \ \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E} \setminus \mathcal{S}\big). \tag{6.5}$$

Схема (6.4), (6.5) соответствует [13, (10.4.7),(10.4.8)]. В качестве семейства $\mathcal{S}$ в (6.4) может использоваться (см. 1.5), (1.6)) у/ф из $\mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E})$. При этом [4, предложение 10.4.4] $\mathbb{T}(\mathfrak{E}) = \{\mathbb{X}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E})\}$; более того, отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathbb{X}_{\mathcal{U}} :\ \mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E}) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathfrak{E})$$

является биекцией (даже гомеоморфизмом, см. [14, предложение 4.2]). При этом [4, (10.7.26)]

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) = \{\mathbb{X}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_{o,\sigma}^*(\mathfrak{E})\}. \tag{6.6}$$

Предложение 6.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \{\mathbb{X}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}_{o,\sigma}^*(\mathfrak{E})\}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество в правой части (6.7). Покажем, что $\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{X}$.

Пусть $\eta \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E})$. Тогда из (6.6) следует, что для некоторого у/ф

$$\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}_{o,\sigma}^*(\mathfrak{E}) \tag{6.8}$$

справедливо равенство $\eta = \mathbb{X}_{\mathfrak{Y}}$. Поэтому (см. (6.4), (6.5))

$$\big(\eta(U) = 1\ \ \forall\, U \in \mathfrak{Y}\big)\ \&\ \big(\eta(\Sigma) = 0\ \ \forall\, \Sigma \in \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{Y}\big). \tag{6.9}$$

Покажем, что $\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathfrak{E})$. В самом деле, допустим противное. Тогда поскольку (см. (4.18), (6.8)) $\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}_o^*(\mathfrak{E})$, имеем, что

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{Y}} U \neq \varnothing. \tag{6.10}$$

Пусть (см. (6.10)) x_* — элемент пересечения всех множеств из $\mathfrak{Y}$, то есть $x_* \in U\ \ \forall\, U \in \mathfrak{Y}$. Тогда в силу (1.7) $\mathfrak{Y} \subset (\mathfrak{E} - \mathrm{triv})[x_*]$, откуда в силу максимальности $\mathfrak{Y}$ вытекает равенство

$$\mathfrak{Y} = (\mathfrak{E} - \mathrm{triv})[x_*]. \tag{6.11}$$

Но тогда (см. (1.7), (6.8)) $\eta = \delta_{x_*}$ (действительно, из (1.7), (6.9) и (6.11) следует, что $\big(\eta(L) = 1\big) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x_* \in L)$, где $L \in \mathfrak{E}$), а потому $\eta \in \mathbf{D}(\mathfrak{E})$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathfrak{E})$. Как следствие (см. (6.8))

$$\mathfrak{Y} \in \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}_{o,\sigma}^*(\mathfrak{E}),$$

а тогда $\eta \in \mathfrak{X}$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{X}. \tag{6.12}$$

Выберем произвольно $\zeta \in \mathfrak{X}$. Тогда для некоторого у/ф

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathfrak{E}) \tag{6.13}$$

имеем равенство $\zeta = \mathbb{X}_{\mathcal{V}}$. Это означает (см. (6.5)), что

$$\big(\zeta(V) = 1 \quad \forall V \in \mathcal{V}\big) \ \& \ \big(\zeta(\Sigma) = 0 \quad \forall \Sigma \in \mathfrak{E} \setminus \mathcal{V}\big). \tag{6.14}$$

В силу (6.6) и (6.13) имеем с очевидностью включение

$$\zeta \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}). \tag{6.15}$$

С другой стороны, из (6.13) вытекает, в частности, что (см. раздел 1)

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \varnothing.$$

Это означает, что $\forall x \in E \ \exists V \in \mathcal{V}$: $x \notin V$. В силу (1.7) получаем, что

$$\mathcal{V} \neq (\mathfrak{E} - \mathrm{triv})[x] \quad \forall x \in E. \tag{6.16}$$

С учетом (6.14) и (6.16) получаем (поскольку $\mathcal{V} \subset \mathfrak{E}$), что

$$\forall x \in E \ \exists V \in \mathfrak{E}: \ (x \notin V) \ \& \ \big(\zeta(V) = 1\big); \tag{6.17}$$

(6.17) означает, что $\zeta \neq \delta_x \quad \forall x \in E$. Тогда $\zeta \notin \mathbf{D}(\mathfrak{E})$ и, стало быть (см. (6.15)), $\zeta \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E})$, чем завершается проверка вложения

$$\mathfrak{X} \subset \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}).$$

С учетом (6.12) получаем равенство $\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{X}$, что и требовалось доказать. $\square$

В силу предложений 4.5 и 6.1 получаем равенство

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \{\mathbb{X}_{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}}\}. \tag{6.18}$$

Введем теперь, следуя [2], в рассмотрение две топологии на множестве $\mathbb{A}(\mathfrak{E})$ (6.2). Для этого потребуются некоторые вспомогательные обозначения. Пусть

$$\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu, H) \triangleq \left\{\nu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E}) \ \Big| \ \int_E h\, d\mu = \int_E h\, d\nu \quad \forall h \in H\right\} \quad \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E}) \quad \forall H \in \mathcal{P}'\big(B(E, \mathfrak{E})\big). \tag{6.19}$$

С использованием (6.19) определяем специальные семейства п/м $\mathbb{A}(\mathfrak{E})$. Итак, пусть

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu) \triangleq \big\{\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu, K): \ K \in \mathrm{Fin}\big(B(E, \mathfrak{E})\big)\big\} \quad \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E}). \tag{6.20}$$

В терминах (6.20) конструируется нужная топология $\mathbb{A}(\mathfrak{E})$:

$$\begin{gathered}\widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E}) \triangleq \Big\{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{A}(\mathfrak{E})\big) \mid \forall \mu \in G \, \exists \, \Gamma \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu): \ \Gamma \subset G\Big\} = \\ = \Big\{G \in \mathcal{P}\left(\mathbb{A}(\mathfrak{E})\right) \mid \forall \mu \in G \ \exists K \in \mathrm{Fin}\left(B(E, \mathfrak{E})\right): \ \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu, K) \subset G\Big\}.\end{gathered} \tag{6.21}$$

Ясно, что при $\mu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E})$ семейство $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu)$ (6.20) есть локальная база ТП

$$\big(\mathbb{A}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})\big) \tag{6.22}$$

в точке μ, причем (см. (6.19)) все множества семейств (6.20) открыто-замкнуты в смысле (6.22). Полагая теперь

$$\widetilde{\mathcal{T}}[\mathfrak{E}] \triangleq \bigcup_{\mu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E})} \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu), \tag{6.23}$$

имеем (в виде (6.23)) базу ТП (6.22), состоящую из открыто-замкнутых множеств. Как следствие получаем, что (6.22) есть нульмерное T_2-пространство.

Условимся о следующем традиционном соглашении: если (X, τ) есть ТП, $X \neq \varnothing$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X$, то

$$\big((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} x\big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall\, H \in N_\tau(x)\, \exists\, m \in \mathbb{N} : \, x_j \in H \quad \forall\, j \in \overrightarrow{m, \infty}\big).$$

Далее, если (X, τ) — ТП, $X \neq \varnothing$, и $A \in \mathcal{P}(X)$, то полагаем

$$(\mathrm{seq}-\mathrm{cl})[A; \tau] \triangleq \Big\{x \in X \mid \exists\, (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \, (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} x\Big\}, \tag{6.24}$$

получая секвенциальное замыкание A в (X, τ); если $(\mathrm{seq}-\mathrm{cl})[A; \tau] = A$, то называем A секвенциально замкнутым в (X, τ).

Возвращаясь к (6.22), отметим, что (см. [2, 3])

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})\big) \setminus (\mathrm{seq}-\mathrm{cl})[\mathbf{D}(\mathfrak{E}); \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})], \tag{6.25}$$

причем множество $\mathbf{D}(\mathfrak{E})$ секвенциально замкнуто в ТП (6.22). Из (6.18) и (6.25) вытекает следующее утверждение об одноэлементности нароста замыкания по отношению к секвенциальному замыканию.

Теорема 6.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})\big) \setminus (\mathrm{seq}-\mathrm{cl})[\mathbf{D}(\mathfrak{E}); \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})] = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})\big) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \big\{\mathbb{X}_{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}}\big\}.$$

Итак, мы получили, что секвенциально замкнутое множество $\mathbf{D}(\mathfrak{E}) \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{A}(\mathfrak{E})\big)$ при замыкании в ТП (6.22) обладает одноэлементным наростом, определяемым в виде σ-мультипликативного свободного открытого у/ф (4.19). В заключение рассмотрим еще один вариант конструкции на основе (6.19). Итак, введем (вместо (6.20)) семейства

$$\widetilde{\mathcal{T}}^o_{\mathfrak{E}}(\mu) \triangleq \{\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu, C) : \, C \in (\mathrm{count})[B(E, \mathfrak{E})]\} \quad \forall\, \mu \in \mathbb{A}(\mathfrak{E}). \tag{6.26}$$

В терминах (6.26) определяется следующая топология $\mathbb{A}(\mathfrak{E})$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E}) \triangleq \big\{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{A}(\mathfrak{E})\big) \mid \forall\, \mu \in G\, \exists\, C \in (\mathrm{count})[B(E, \mathfrak{E})] : \, \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathfrak{E}}(\mu, C) \subset G\big\} = \\ = \big\{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{A}(\mathfrak{E})\big) \mid \forall\, \mu \in G\, \exists\, \Gamma \in \widetilde{\mathcal{T}}^o_{\mathfrak{E}}(\mu) : \, \Gamma \subset G\big\}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Ясно, что $\widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E}) \subset \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})$. Разумеется, (6.26) определяет всякий раз локальную базу топологии (6.27) в соответствующей точке $\mathbb{A}(\mathfrak{E})$; множества из семейства (6.26) являются (всякий раз) открыто-замкнутыми. Легко видеть также, что

$$\big(\mathbb{A}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})\big) \tag{6.28}$$

является нульмерным T_2-пространством. Мы заметим (см. [2]), что

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})\big) \setminus (\mathrm{seq}-\mathrm{cl})[\mathbf{D}(\mathfrak{E}); \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})],$$

причем $\mathbf{D}(\mathfrak{E})$ секвенциально замкнуто в ТП (6.28). Снова учитывая (6.18), получаем, что справедлива следующая

Теорема 6.2. *Мера* $\mathbb{X}_{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}}$ *исчерпывает нарост секвенциально замкнутого множества* $\mathbf{D}(\mathfrak{E})$ *при построении его замыкания в ТП* (6.28):

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})\big) \setminus (\mathrm{seq}-\mathrm{cl})[\mathbf{D}(\mathfrak{E}); \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})] = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})\big) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) = \{\mathbb{X}_{(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}}\}.$$

В заключение раздела отметим, что (см. [2])

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}_o(\mathfrak{E})\big) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{D}(\mathfrak{E}), \widetilde{\Upsilon}^o(\mathfrak{E})\big).$$

§ 7. Добавление, 2 (ярусные и непрерывные функции)

В настоящем разделе рассматриваются конкретизации двух важных классов в/з функций на несчетном множестве E, а именно: измеримых и непрерывных функций. В этой связи отметим, что поскольку $\mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{E}) \setminus \mathbf{D}(\mathfrak{E}) \neq \varnothing$, то (см. [4, предложение 10.9.2]) имеем следующее свойство:

$$\forall\, \mathbf{C} \in (\mathrm{count})[B(E,\mathfrak{E})]\ \exists\, H \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E):\ f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, f \in \mathbf{C}\ \ \forall\, x_1 \in H\ \ \forall\, x_2 \in H. \tag{7.1}$$

Отметим здесь же очевидное следствие (7.1), связанное с множеством непрерывных функций

$$\mathbb{C}\,(E, (\mathrm{coc})[E]) \triangleq \left\{f \in \mathbb{R}^E \mid f^{-1}(G) \in (\mathrm{coc})[E]\ \ \forall\, G \in \tau_{\mathbb{R}}\right\}, \tag{7.2}$$

где $\tau_{\mathbb{R}}$ — обычная топология $\mathbb{R}$, порожденная метрикой-модулем. В самом деле, $\mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big)\cap$ $\cap\,\mathbb{B}(E) \subset B(E, \mathfrak{E})$ (см. (6.3), (7.2)): всякая ограниченная непрерывная функция является борелевской. Поэтому из (7.1) имеем

$$\begin{gathered}\forall\, \mathbf{C} \in (\mathrm{count})\big[\mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big)\cap\mathbb{B}(E)\big]\ \exists\, H \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E):\\ f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, f \in \mathbf{C}\ \ \forall\, x_1 \in H\ \ \forall\, x_2 \in H.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Свойства (7.2), (7.3) допускают уточнение (см. [4, (10.9.64)]). Действительно, в силу (4.4)

$$\mathfrak{E} = (\mathrm{coc})[E] \cup \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big] = \big(\mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \cup \{\varnothing\}\big) \cup \mathbf{C}_E\big[\mathrm{coc})[E]\big] = \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \cup \mathbf{C}_E\big[\mathrm{coc})[E]\big],$$

так как $\varnothing \in \omega[E]$ и $\omega[E] \subset \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big]$. Поэтому

$$\mathfrak{E} = \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \cup (\omega[E] \cup \{E\}) = \omega[E] \cup \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big], \tag{7.4}$$

так как $E \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$ (см. (4.5)). Следовательно, σ-алгебра $\mathfrak{E}$ совпадает с σ-алгеброй [4, (10.9.63)] (напомним также, что в наших построениях, как и в [4, (10.9.55)], $E \notin \omega[E]$), а потому в силу [4, (10.9.64)]

$$B(E, \mathfrak{E}) = \{f \in \mathbb{B}(E) \mid \exists\, C \in \omega[E]:\ f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, x_1 \in E \setminus C\ \ \forall\, x_2 \in E \setminus C\}. \tag{7.5}$$

Поскольку семейство $\omega[E]$ замкнуто относительно конечных и счетных объединений, получаем из (7.5), что

$$\forall\, \mathbf{C} \in (\mathrm{count})[B(E,\mathfrak{E})]\ \exists\, C \in \omega[E]:\ f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, f \in \mathbf{C}\ \ \forall\, x_1 \in E \setminus C\ \ \forall\, x_2 \in E \setminus C. \tag{7.6}$$

В (7.5) и (7.6) реализуются нужные уточнения. В свою очередь, (7.6) допускает дальнейшее развитие. Для реализации этой цели введем

$$(\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}] \triangleq \left\{f \in \mathbb{R}^E \mid f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathfrak{E}\ \ \forall\, c \in \mathbb{R}\right\}, \tag{7.7}$$

тогда $B(E, \mathfrak{E}) = (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}] \cap \mathbb{B}(E)$. Как обычно, при $f \in \mathbb{R}^E$ и $g \in \mathbb{R}^E$

$$\left(f \vee g \triangleq \Big(\sup(\{f(x); g(x)\})\Big)_{x \in E} \in \mathbb{R}^E\right)\ \ \&\ \ \left(f \wedge g \triangleq \Big(\inf(\{f(x); g(x)\})\Big)_{x \in E} \in \mathbb{R}^E\right).$$

Тогда, в частности, имеем, что $\forall\, f \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\ \ \forall\, g \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]$

$$\big(f \vee g \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\big)\ \&\ \big(f \wedge g \in \mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\big). \tag{7.8}$$

Через I обозначим в/з функцию на E, тождественно равную единице: $I \in \mathbb{R}^E$, причем $I(x) \triangleq 1\ \ \forall\, x \in E$. Тогда из (7.8) вытекает, что $\forall\, f \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\ \ \forall\, c \in \mathbb{R}$

$$\big(f \vee (c\,I) \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\big)\ \&\ \big(f \wedge (c\,I) \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\big) \tag{7.9}$$

(в (7.9) имеются в виду «срезки» f константой c). С учетом (7.6), (7.9) легко следует, что

$$\forall\, f \in (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\ \exists\, C \in \omega[E]:\ f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, x_1 \in E \setminus C\ \ \forall\, x_2 \in E \setminus C. \tag{7.10}$$

Заметим, что $\mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big) \subset (\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]$, а потому из (7.10) имеем, что

$$\forall\, f \in \mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big)\ \exists\, C \in \omega[E]:\ f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, x_1 \in E \setminus C\ \ \forall\, x_2 \in E \setminus C. \tag{7.11}$$

Предложение 7.1. *Если* $f \in \mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big)$, *то* $\exists\, c \in \mathbb{R}:\ f = c\,I$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big)$. С учетом (7.11) подберем $\Omega \in \omega[E]$ такое, что

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \forall\, x_1 \in E \setminus \Omega \quad \forall\, x_2 \in E \setminus \Omega. \tag{7.12}$$

Ясно, что $E \setminus \Omega \neq \varnothing$; выберем $x_* \in E \setminus \Omega$ и полагаем $\alpha \stackrel{\triangle}{=} \varphi(x_*),\ \alpha \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности φ имеем, что

$$\Gamma \stackrel{\triangle}{=} \{x \in E \mid \varphi(x) \neq \alpha\} = \varphi^{-1}(\,]-\infty, \alpha[\,) \cup \varphi^{-1}(\,]\alpha, \infty[\,) \in (\mathrm{coc})[E]. \tag{7.13}$$

Тогда с учетом (4.2) и (7.13) получаем, что

$$\big(\Gamma \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]\big) \vee (\Gamma = \varnothing). \tag{7.14}$$

Допустим, что $\Gamma \in \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$. Тогда для некоторого $\Lambda \in \omega[E]$ имеем равенство $\Gamma = E \setminus \Lambda$, где однако $E \setminus \Lambda \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$ в силу несчетности E. Тогда $\Gamma \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$ и, как следствие,

$$\Gamma \notin \omega[E]. \tag{7.15}$$

По выбору x_* и определению α имеем, однако, вложение $\Gamma \subset \Omega$ (см. (7.12), (7.13)), а тогда $\Gamma \in \omega[E]$, что противоречит (7.15). Полученное противоречие показывает, что $\Gamma \notin \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big]$, а тогда из (7.14) следует, что $\Gamma = \varnothing$. В силу (7.14) получаем, что $\varphi(x) = \alpha \quad \forall\, x \in E$. Это означает, что $\varphi = \alpha\, I$, что и требовалось доказать. $\square$

В качестве очевидного следствия предложения 7.1 получаем равенство

$$\mathbb{C}\big(E, (\mathrm{coc})[E]\big) = \{c\, I : \, c \in \mathbb{R}\},$$

то есть непрерывными в нашем случае оказываются функции-константы и только они.

Возвращаясь к (7.10), отметим еще одно очевидное следствие, а именно:

$$\forall\, \mathbf{C} \in (\mathrm{count})\big[(\mathrm{Meas})[E; \mathfrak{E}]\big]\ \exists\, C \in \omega[E] : \ f(x_1) = f(x_2) \quad \forall\, f \in \mathbf{C} \quad \forall\, x_1 \in E \setminus C \quad \forall\, x_2 \in E \setminus C.$$

§ 8. Добавление 3: некоторые вопросы, связанные с продолжениями открытого свободного σ-мультипликативного ультрафильтра

Напомним (5.1) и попытаемся рассматривать представления свободных σ-мультипликативных у/ф на других σ-алгебрах п/м несчетного множества E с подобным свойством. В настоящем разделе фиксируем σ-алгебру $\mathcal{L} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, для которой (подобно (5.1))

$$\{x\} \in \mathcal{L} \quad \forall\, x \in E. \tag{8.1}$$

Легко видеть, что $\mathfrak{E} \subset \mathcal{L}$. Нас будут интересовать свойства у/ф из множества $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L})$; случай пустоты последнего множества не исключается.

Отметим, что из (8.1) легко следует вложение $\omega[E] \subset \mathcal{L}$.

Предложение 8.1. *Если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L})$, то справедливо равенство*

$$\mathcal{U} \cap \mathfrak{E} = (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$\omega[E] \cap \mathcal{U} = \varnothing. \tag{8.3}$$

В самом деле, допустим противное: $\omega[E] \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$. Пусть $\Omega \in \omega[E] \cap \mathcal{U}$. Ясно, что в этом случае $\Omega \in (\mathrm{count})[E]$ (см. (1.5)). Пусть $\varphi \in E^{\mathbb{N}}$ реализует Ω в виде образа:

$$\Omega = \{\varphi(j) : \, j \in \mathbb{N}\} = \varphi^1(\mathbb{N}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\varphi(j)\}.$$

Поскольку $\mathcal{U}$ — свободный у/ф, то $\{\varphi(j)\} \notin \mathcal{U} \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. В этом случае $E \setminus \{\varphi(j)\} \in \mathcal{U} \ \ \forall j \in \mathbb{N}$ (свойство у/ф алгебры множеств) и, в силу σ-мультипликативности $\mathcal{U}$,

$$E \setminus \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\varphi(j)\} \Big) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} (E \setminus \{\varphi(j)\}) \in \mathcal{U},$$

то есть $E \setminus \Omega \in \mathcal{U}$. Получили, что $\Omega \in \mathcal{U}$ и $E \setminus \Omega \in \mathcal{U}$, что невозможно (см. (1.5)). Полученное противоречие доказывает справедливость (8.3). Итак, $C \notin \mathcal{U} \ \ \forall C \in \omega[E]$. Как следствие $E \setminus C \in \in \mathcal{U} \ \forall C \in \omega[E]$. Иными словами (см. (4.1), (4.5)),

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} = \mathbf{C}_E\big[\omega[E]\big] \subset \mathcal{U}. \tag{8.4}$$

Отметим, что $\mathcal{U} \cap \mathfrak{E} \in \mathbb{F}^*(\mathfrak{E})$; см. [7, (2.4.5)]. Из (8.4) имеем с учетом предложения 4.3, что

$$(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\} \subset \mathcal{U} \cap \mathfrak{E},$$

откуда, в силу максимальности у/ф $(\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$, следует равенство (8.2).

Предложение 8.2. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L})$, *то* $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$.

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L})$. Тогда так же, как и в предложении 8.1, устанавливается, что $\omega[E] \cap \mathcal{U} = \varnothing$. Поэтому $U \notin \omega[E] \ \ \forall U \in \mathcal{U}$. Вместе с тем $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}'(E)$ в силу (1.5), (1.6). Стало быть, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}'(E) \setminus \omega[E]$, а потому (см. обозначения в начале раздела 4) $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$, что и требовалось доказать. □

Итак, имеем (в рассматриваемом случае стандартного ИП $(E, \mathcal{L})$ со свойством (8.1)), что каждый σ-мультипликативный свободный у/ф σ-алгебры $\mathcal{L}$ состоит только из несчетных п/м E.

Замечание 8.1. Рассмотрим конкретный пример несчетного множества E, σ-алгебры $\mathcal{L} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ со свойством (8.1), для которых

$$(\mathcal{L} \neq \mathfrak{E}) \ \& \ \big(\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L}) \neq \varnothing\big). \tag{8.5}$$

Итак, полагаем в данном замечании, что $E = [0,1]$, σ-алгебру $\mathfrak{E}$ п/м E понимаем в смысле раздела 4 (см. предложение 4.2). Через $\mathfrak{L}$ обозначим семейство всех п/м $E = [0,1]$, измеримых по Лебегу (см. $\mathfrak{L}^b_a$ [4, (8.5.9)] при $a = 0$, $b = 1$).

Пусть λ есть def след меры Лебега на $\mathfrak{L}$ (λ есть мера λ^b_a [4, (8.5.11)] при условии, что $a = 0$ и $b = 1$). Во всяком случае

$$\lambda \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathfrak{L}]. \tag{8.6}$$

Следуя [4, (10.14.1)], введем в рассмотрение семейства $\mathfrak{N}_\lambda \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathfrak{L} \mid \lambda(L) = 0\}$ и

$$\mathcal{F}_\lambda \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_E[\mathfrak{N}_\lambda] = \{E \setminus N : \ N \in \mathfrak{N}_\lambda\}. \tag{8.7}$$

Тогда $\lambda(F) = \lambda(E) = 1 \ \forall F \in \mathcal{F}_\lambda$. Напомним, что [4, (10.14.6)] $\mathcal{F}_\lambda \in \mathbb{F}^*(\mathfrak{L})$. Поскольку $\mathfrak{L} \in \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ (см. [4, (8.5.10)] при $a = 0$ и $b = 1$), то (см. (8.6)), согласно [4, (10.3.6), (10.3.10)], имеем подобно (4.18), что

$$\mathcal{F}_\lambda \in (\sigma - \mathbb{F})[\mathfrak{L}],$$

где $(\sigma - \mathbb{F})[\mathfrak{L}]$ определяется в [4, (10.3.10)]:

$$\begin{gathered}(\sigma - \mathbb{F})[\mathfrak{L}] \overset{\triangle}{=} \bigg\{ \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{H}) \ \& \ \Big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i \in \mathcal{H} \ \ \forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} \Big) \ \& \\ \& \ \ (\forall H \in \mathcal{H} \ \ \forall L \in \mathfrak{L} : (H \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{H})) \bigg\}. \end{gathered} \tag{8.8}$$

Через $\mathcal{L}$ обозначаем далее σ-алгебру п/м $E = [0,1]$, порожденную семейством $\mathcal{F}_\lambda$ п/м E. Тогда [4, (10.14.13)]

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}_\lambda \cup \mathbf{C}_E[\mathcal{F}_\lambda] = \mathcal{F}_\lambda \cup \mathfrak{N}_\lambda; \tag{8.9}$$

$\mathcal{L} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$. Отметим, что $\mathcal{L} \subset \mathfrak{L}$ и, согласно [4, (10.14.14)],

$$\mathcal{F}_\lambda \in \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L}) \tag{8.10}$$

(учитываем то, что $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{L}$). Заметим, что по выбору λ имеем свойство $\lambda(\{x\}) = \lambda([x,x]) = 0$ $\forall\, x \in E$. Как следствие получаем, что

$$\{x\} \in \mathfrak{N}_\lambda \quad \forall\, x \in E. \tag{8.11}$$

Поэтому с учетом (8.9) имеем, что σ-алгебра $\mathcal{L}$ обладает свойством (8.1), то есть $\{x\} \in \mathcal{L}$ при $x \in E$. При этом [11, с. 31] канторово множество $\mathbf{K} \in \mathfrak{L}$ обладает свойством $\lambda(\mathbf{K}) = 0$. Поэтому $\mathbf{K} \in \mathfrak{N}_\lambda$; вместе с тем $\mathbf{K} \in \mathcal{P}_{\mathbf{uc}}(E)$. Из (8.9) имеем, что $\mathbf{K} \in \mathcal{L}$. При этом, однако, $\mathbf{K} \notin \omega[E]$ и, как следствие, $\mathbf{K} \notin \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big]$ (см. (4.4)). Кроме того, $E \setminus \mathbf{K} \in \mathfrak{L}$ и $\lambda(E \setminus \mathbf{K}) = 1$. Поскольку, как легко видеть, $\omega[E] \subset \mathfrak{N}_\lambda$, то $E \setminus \mathbf{K} \notin \omega[E]$. С другой стороны, в силу (4.2)

$$\big(\mathbf{K} \in (\mathrm{coc})[E]\big) \Longrightarrow \big((\mathbf{K} = \varnothing) \vee (E \setminus \mathbf{K} \in \omega[E])\big). \tag{8.12}$$

Поскольку $\mathbf{K} \neq \varnothing$ и $E \setminus \mathbf{K} \notin \omega[E]$, имеем из (8.12), что $\mathbf{K} \notin (\mathrm{coc})[E]$. Поэтому

$$\big(\mathbf{K} \notin (\mathrm{coc})[E]\big) \;\&\; \big(\mathbf{K} \notin \mathbf{C}_E\big[(\mathrm{coc})[E]\big]\big).$$

В силу предложения 4.2, применяемого в случае $E = [0,1]$, получаем, следовательно, что $\mathbf{K} \notin \mathfrak{E}$. Стало быть

$$\mathbf{K} \in \mathcal{L} \setminus \mathfrak{E}. \tag{8.13}$$

Поэтому (см. (8.13)) $\mathcal{L} \setminus \mathfrak{E} \neq \varnothing$. Вместе с тем, поскольку $\mathcal{L}$ обладает свойством (8.1), то $\mathfrak{E} \subset \mathcal{L}$.

Заметим, что в силу (8.7), (8.10) и (8.11) непременно $\{x\} \notin \mathcal{F}_\lambda \;\; \forall\, x \in E$. Тогда пересечение всех множеств из $\mathcal{F}_\lambda$ пусто. В самом деле, пусть

$$x_* \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\lambda} F.$$

Тогда $\mathcal{F}_\lambda \subset (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*]$, а в силу (1.7) и максимальности $\mathcal{F}_\lambda$, имеем равенство $\mathcal{F}_\lambda = (\mathcal{L}-$ $-\mathrm{triv})[x_*]$; поэтому (см. (8.1)) $\{x_*\} \in \mathcal{F}_\lambda$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает требуемое свойство пустоты пересечения всех множеств из $\mathcal{F}_\lambda$, а потому $\mathcal{F}_\lambda \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. С учетом (8.10) имеем, что

$$\mathcal{F}_\lambda \in \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}^*_{o,\sigma}(\mathcal{L}); \tag{8.14}$$

в силу предложения 8.1 и (8.14) имеем, что $\mathcal{F}_\lambda \cap \mathfrak{E} = (\mathrm{coc})[E] \setminus \{\varnothing\}$. Требуемое свойство (8.5) установлено. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
2. Ченцов А.Г. Об измеримых пространствах, допускающих недираковские счетно-аддитивные $(0,1)$-меры // Доклады РАН. 2002. Т. 384. № 5. С. 607–610.
3. Ченцов А.Г. Структура счетно-аддитивных недираковских $(0,1)$-мер // Математический и прикладной анализ: сборник научных трудов. Вып. 1. Тюмень: Издательство Тюменского гос. ун-та. 2003. С. 218–243.
4. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2010. 542 с.
5. Илиадис С.Д., Фомин С.В. Метод центрированных систем в теории топологических пространств // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. № 4. С. 47–76.
6. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.

7. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
8. Ченцов А.Г., Пыткеев Е.Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312–329.
9. Пыткеев Е.Г., Ченцов А.Г. Некоторые свойства открытых ультрафильтров // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 140–148. http://mi.mathnet.ru/iimi314
10. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
11. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979. 336 с.
12. Ченцов А.Г. К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 212–229. DOI: 10.20537/vm150206
13. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2009. 389 с.
14. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении компактов Стоуна // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 156–174. DOI: 10.20537/vm130415

Поступила в редакцию 01.07.2016

Пыткеев Евгений Георгиевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: pyt@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

E. G. Pytkeev, A. G. Chentsov

Some representations of free ultrafilters

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 345–365 (in Russian).

Keywords: algebra of sets, measure, topology, ultrafilter.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/vm160305

Constructions related to the representation of free σ-multiplicative ultrafilters of widely interpreted measurable spaces are considered. These constructions are based on the representations connected with the application of open ultrafilters for co-finite and co-countable topologies. Such ultrafilters are preserved (as maximal filters) under the replacement of topologies by algebra and σ-algebra generated by above-mentioned topologies, respectively. In (general) case of co-countable topology, uniqueness of σ-multiplicative free ultrafilter composed of nonempty open sets is established. It is demonstrated that the given property is preserved for σ-algebras containing co-countable topology. Two topologies of the space of bounded finitely additive Borel measures with the property of uniqueness of remainder for sequentially closed set of Dirac measures under the closure construction are stated.

REFERENCES

1. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.
2. Chentsov A.G. On measurable spaces admitting non-Dirac countably additive $(0,1)$-measure, *Doklady Mathematics*, 2002, vol. 65, no. 3, pp. 425–428.

3. Chentsov A.G. Structure of countably additive non-Dirac $(0, 1)$-measures, *Matematicheskii i prikladnoi analiz: sbornik nauchnykh trudov, vyp. 1* (Mathematical and applied analysis: Transactions, issue 1), Tyumen: Tyumen State University, 2003, pp. 218–243 (in Russian).
4. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (Elements of a finitely additive measure theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 542 p.
5. Iliadis S., Fomin S. The method of centred systems in the theory of topological spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 37–62. DOI: 10.1070/RM1966v021n04ABEH004165
6. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.
7. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002, 408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
8. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. DOI: 10.1134/S0081543816020048
9. Pytkeev E.G., Chentsov A.G. Some properties of open ultrafilters, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2015, no. 2 (46), pp. 140–148 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/iimi314
10. Burbaki N. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
11. Aleksandryan R.A., Mirzakhanyan E.A. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 336 p.
12. Chentsov A.G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 212–229 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150206
13. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of a finitely additive measure theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2009, 389 p.
14. Chentsov A.G. To question about representation of Stone compactums, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 156–174 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130415

Received 01.07.2016

Pytkeev Evgenii Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: pyt@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Main Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru