ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 3

УДК 519.214.5, 519.217.2

© *Н. М. Меженная*

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА СЕРИЙ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, УПРАВЛЯЕМОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА[1]

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотических свойств числа серий в последовательности дискретных случайных величин, управляемых цепью Маркова с конечным числом состояний. Состояние цепи на каждом шаге определяет закон распределения знаков в управляемой последовательности на этом шаге. Такая случайная последовательность представляет собой модель скрытой марковской цепи. При помощи метода Чена–Стена получена оценка расстояния по вариации между распределением числа серий длины не меньше заданной в случайной последовательности, управляемой цепью Маркова, и сопровождающим распределением Пуассона. Для ее вывода сначала рассматривалась последовательность из независимых неоднородных полиномиальных случайных величин, а затем использован прием, позволяющий получить оценку расстояния по вариации между смешанным пуассоновским распределением и пуассоновским распределением с параметром, равным среднему числу серий длины не меньше заданной. Эта оценка строится на основе дисперсии параметра смешанного пуассоновского распределения и выведенной ранее оценки для расстояния по вариации для полиномиальной схемы. Отдельно рассмотрен случай стационарной цепи Маркова. При помощи полученных оценок доказаны пуассоновская и нормальная предельные теоремы для числа серий длины не меньше заданной, а также найдено предельное распределение для наибольшей длины серии в управляемой случайной последовательности.

Ключевые слова: марковская цепь, полиномиальная случайная последовательность, число серий, предельная теорема Пуассона, расстояние по вариации, метод Чена–Стена.

DOI: 10.20537/vm160303

Введение

Статистические свойства чисел серий событий широко применяются для проверки и контроля свойств дискретной случайной последовательности (см. [1, главы 1, 3, 8] и библиографию там же). Свойства числа серий в последовательностях независимых случайных величин, в том числе и многомерные, хорошо изучены (см. [1, главы 5, 7] и библиографию там же). Также изучены свойства этих величин в марковских последовательностях ([1, глава 5], [2–4]), последовательностях m–зависимых случайных величин (см. [5]), последовательностях с разладкой и т. д. В работах [2] и [3] изучались распределения времени до появления серии в цепи Маркова с двумя состояниями, а также распределения ряда других случайных величин, связанных с моментами появления серий в такой последовательности. В работах [6, 7] найдено точное распределение чисел серий в марковской случайной последовательности с двумя и тремя состояниям. Для исследования в этих и ряде других работ используется прием, состоящий в том, что характеристики исходной последовательности выражаются через характеристики цепи Маркова специального вида (см. также [8]). В работе [4] получены оценки скорости сходимости для распределения чисел появлений серий в стационарной однородной марковской цепи к сложному пуассоновскому распределению. В работе [5] доказана многомерная теорема Пуассона для чисел появлений серий заданных длин в последовательности m–зависимых случайных величин с оценками скорости сходимости. В работе [8] получены точные значения и оценки для функции распределения числа появившихся цепочек специального вида без самопересечений в последовательности независимых случайных величин и в цепи Маркова.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 14–01–00318-а) и Министерством образования и науки РФ (тема 1.2640.2014).

В последнее время особый интерес представляет анализ свойств скрытых цепей Маркова в связи с решением прикладных задач, таких как распознавание образов, машинное обучение, анализа текста и т. д. (см. [9, 10], [11, главы 10, 11], [12, главы 2, 5]). Основные свойства таких моделей подробно описаны в книге [13, главы 1–3]. Интересным представляется вопрос о сравнении свойств распределений чисел серий, в том числе многомерных, в последовательностях независимых случайных величин или в марковских случайных последовательностях и в последовательности, представляющей скрытую марковскую цепь.

В настоящей работе мы рассмотрим одну модификацию скрытой марковской цепи, а именно, полиномиальную последовательность, управляемую цепью Маркова. Такая последовательность может трактоваться как последовательность, полученная укрупнением состояний марковской цепи, и как скрытая марковская цепь (см. [13, глава 1]). Такая модифицированная последовательность рассматривалась в [14], где было изучено предельное распределение для чисел пар совпавших знаков.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств распределений числа серий в управляемой цепью Маркова случайной последовательности.

§ 1. Формулировки результатов

Начнем с более простой постановки задачи. Пусть случайные величины $Y_1, \ldots, Y_T, \ldots$ независимы и принимают значения из множества $A_N = \{1, \ldots, N\}$, причем

$$\mathbf{P}\{Y_j = k\} = p_k^{(j)}, \quad k \in A_N, \quad j \in \{1, \ldots, M\},$$

а наборы $\{p_k^{(j)}\}$ при каждом j удовлетворяют условию $\sum\limits_{k \in A_N} p_k^{(j)} = 1$.

Пусть $s \geqslant 1$, $\tilde{\nu}_t^a = I\{Y_{t-1} \neq a, Y_t = \ldots = Y_{t+s-1} = a\}$ — индикатор случайного события, состоящего в том, что в момент t началась серия из знаков a длины не меньше s (для краткости будем писать a-серия),

$$\tilde{\zeta}_s^a = \sum_{t=1}^{T} \tilde{\nu}_t^a$$

— число a-серий длины не меньше s с началом в последовательности $Y_0, \ldots, Y_T$. Ее математическое ожидание определяется формулой

$$\mathbf{E}\tilde{\zeta}_s^a = \sum_{t=1}^{T} \mathbf{E}\tilde{\nu}_t^a = \sum_{t=1}^{T} (1 - p_a^{(t-1)}) \prod_{j=t}^{t+s-1} p_a^{(j)}. \tag{1.1}$$

Начнем с исследования асимптотических свойств распределений случайных величин $\tilde{\zeta}_s^a$.

Будем использовать обозначения $\mathcal{L}(X)$ для закона распределения случайной величины X и $\mathrm{Pois}(\mu)$ для распределения Пуассона с параметром μ.

Расстояние по вариации ρ_{TV} (см. [15, глава 3, § 9]) между распределениями случайных величин η_1 и η_2, принимающих значения в множестве неотрицательных целых чисел, выражается формулой

$$\rho_{TV}(\mathcal{L}(\eta_1), \mathcal{L}(\eta_2)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{P}\{\eta_1 = k\} - \mathbf{P}\{\eta_2 = k\}|.$$

Лемма 1. *При $T \geqslant s \geqslant 1$ выполнена оценка*

$$\rho_{TV}(\mathcal{L}(\tilde{\zeta}_s^a), \mathrm{Pois}(\mathbf{E}\tilde{\zeta}_s^a)) \leqslant (2s+1)(1 - p_{a*})(p_a^*)^s, \tag{1.2}$$

где $p_a^* = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant T} \{p_a^{(j)}\}, \quad p_{a*} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant T} \{p_a^{(j)}\}, \quad a \in A_N.$

Полученная оценка позволяет вывести известные теоремы для числа серий в полиномиальной случайной последовательности. Оценка (1.2) зависит только от максимальной и минимальной вероятностей появлений знака a для всех возможных распределений, поэтому она в дальнейшем будет использована при выводе аналогичной оценки в последовательности, управляемой цепью Маркова, которая будет рассмотрена ниже. Доказательство леммы 1 будет приведено в начале параграфа 2.

Теперь перейдем к задаче об управляемой последовательности. Пусть $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1, Z_2, \ldots)$ — однородная непериодическая неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $E_M = \{1, \ldots, M\}$,

$$\pi_k(t) = \mathbf{P}\{Z_t = k\}, \quad \pi_{kl}^{(m)} = \mathbf{P}\{Z_{t+m} = l | Z_t = k\}, \quad k, l \in E_M,$$

на множестве $A_N = \{1, \ldots, N\}$ заданы M вероятностных распределений $\{p_a^{(j)}\}$, $a \in A_N$, $j = 1, \ldots, M$.

Известно (см. [16, часть 2, § 3]), что существует единственное стационарное распределение $\tilde{\pi}_k = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_k(n)$, $k = 1, \ldots, M$, и константы $C, \alpha > 0$, при которых

$$\max_{k,l\in E_M} |\pi_{lk}^{(n)} - \tilde{\pi}_k| \leqslant C\tilde{\pi}_k e^{-\alpha n}, \quad \max_{k,l\in E_M} |\pi_k(n) - \tilde{\pi}_k| \leqslant C\tilde{\pi}_k e^{-\alpha n}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_0, X_1, \ldots, X_T, \ldots$, принимающих значения из множества A_N с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X_j = k\} = p_k^{(Z_j)}, \quad k \in A_N, \ j \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $X_0, \ldots, X_T, \ldots$ при фиксированной последовательности $\mathbf{Z}$ имеет такое же распределение, как рассмотренная выше последовательность $Y_1, \ldots, Y_T, \ldots$, при подходящем выборе наборов вероятностей $\{p_k^{(j)}\}$. Действительно, при фиксированном значении $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$

$$\mathbf{P}\{X_j = k\} = p_k^{(z_j)} = \mathbf{P}\{Y_j = k\},$$

если $\{p_k^{(j)}\} = \{p_k^{(z_j)}\}$.

Пусть $s \geqslant 1$ — фиксированное число, $\nu_t^a = I\{X_{t-1} \neq a, X_t = \ldots = X_{t+s-1} = a\}$,

$$\varsigma_s^a = \sum_{t=1}^{T} \nu_t^a \tag{1.4}$$

— число a-серий длины не меньше s с началом в последовательности $X_0, \ldots, X_T$.

Математическое ожидание случайной величины ς_s^a (см. (1.4)) определяется формулой

$$\mathbf{E}\varsigma_s^a = \mathbf{E}\lambda_s^a(\mathbf{Z}),$$

где

$$\lambda_s^a(\mathbf{Z}) = \mathbf{E}(\varsigma_s^a|\mathbf{Z}) = \sum_{t=1}^{T} (1 - p_a^{(Z_{t-1})}) \prod_{j=t}^{t+s-1} p_a^{(Z_j)}. \tag{1.5}$$

Лемма 2. *Пусть $T, s \to \infty$, $a \in A_N$ — фиксированный знак. Тогда*

$$\mathbf{E}\varsigma_s^a = \lambda_s^a \left(1 + O(T^{-1})\right), \tag{1.6}$$

где

$$\lambda_s^a = T \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} (1 - p_a^{(k_0)})\tilde{\pi}_{k_0} \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j}. \tag{1.7}$$

Замечание 1. Если начальное распределение цепи Маркова совпадает со стационарным, то формула (1.6) выполняется в форме точного равенства: $\mathbf{E}\varsigma_s^a = \lambda_s^a$.

Перейдем к задаче о поведении распределения случайной величины ς_s^a при фиксированном M и $T, s \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть число M фиксировано, $a \in A_N$ — фиксированный знак, $T, s \to \infty$. Тогда*

$$\rho_{TV}\left(\mathcal{L}(\varsigma_s^a), \mathrm{Pois}(\lambda_s^a)\right) = O\left(s(p_a^*)^s\right). \tag{1.8}$$

Замечание 2. Если цепь $\mathbf{Z}$ стационарна, то (1.8) имеет вид

$$\rho_{TV}\left(\mathcal{L}(\varsigma_s^a), \mathrm{Pois}(\lambda_s^a)\right) \leqslant (2s+1)(1-p_{a*})(p_a^*)^s + \frac{2C\lambda_s^a}{T(e^\alpha - 1)}. \tag{1.9}$$

Следствие 1. *Пусть число M фиксировано, $a \in A_N$ — фиксированный знак, $p_a^* \in (0,1)$, а параметры $s, T \to \infty$ так, что $\mathbf{E}\varsigma_s^a \to \lambda_a > 0$. Тогда*

$$\mathcal{L}(\varsigma_s^a) \to \mathrm{Pois}(\lambda_a).$$

Следствие 2. *Пусть число M фиксировано, $a \in A_N$ — фиксированный знак, $p_a^* \in (0,1)$, а параметры $s, T \to \infty$ так, что $\mathbf{E}\varsigma_s^a \to \infty$. Тогда*

$$\mathcal{L}\left(\frac{\varsigma_s^a - \mathbf{E}\varsigma_s^a}{\sqrt{\mathbf{D}\varsigma_s^a}}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Пусть ξ_a — длина наибольшей a-серии с началом в последовательности $Y_0, \ldots, Y_T$. Равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_a < s\} = \mathbf{P}\{\varsigma_s^a = 0\}$$

позволяет доказать следующий результат.

Следствие 3. *Пусть число M фиксировано, $a \in A_N$ — фиксированный знак, $p_a^* \in (0,1)$, а параметры $s, T \to \infty$. Тогда*

$$\left|\mathbf{P}\{\xi_a < s\} - e^{-\mathbf{E}\varsigma_s^a}\right| = O\left(s(p_a^*)^s\right).$$

§ 2. Доказательства

Доказательство леммы 1. Не ограничивая общности будем считать, что $a = 1$, $M = 2$. Для каждого $t \in \{1, \ldots, T\}$ определим множество $O(t)$ равенством

$$O(t) = \{t' \in \{1, \ldots, T\} : |t' - t| \leqslant s\}.$$

Тогда случайный индикатор $\tilde{\nu}_t^1$ и набор случайных индикаторов $\left(\tilde{\nu}_{t'}^1\right)$, $t' \notin O(t)$, независимы. Согласно теореме 1 работы [17], расстояние по вариации между распределением случайной величины $\tilde{\varsigma}_s^1$ и сопровождающим пуассоновским распределением $\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\tilde{\varsigma}_s^1)$ оценивается как

$$\rho_{TV}(\mathcal{L}(\tilde{\varsigma}_s^1), \mathrm{Pois}(\mathbf{E}\tilde{\varsigma}_s^1)) \leqslant \frac{1 - e^{-\mathbf{E}\tilde{\varsigma}_s^1}}{\mathbf{E}\tilde{\varsigma}_s^1}(S_1 + S_2), \tag{2.1}$$

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant t \leqslant T} \sum_{t' \in O(t)} \mathbf{E}\tilde{\nu}_t^1 \mathbf{E}\tilde{\nu}_{t'}^1, \qquad S_2 = \sum_{1 \leqslant t \leqslant T} \sum_{t' \in O(t) \setminus \{t\}} \mathbf{E}\tilde{\nu}_t^1 \tilde{\nu}_{t'}^1.$$

Начнем с оценивания первой суммы S_1:

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}\tilde{\nu}_t^1 \sum_{t' \in O(t)} \mathbf{E}\tilde{\nu}_{t'}^1 = \sum_{1 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}\tilde{\nu}_t^1 \sum_{t' \in O(t)} (1 - p_1^{(t'-1)}) \prod_{j=t'}^{t'+s-1} p_1^{(j)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}\tilde{\nu}_t^1\sum_{t'\in O(t)}(1-p_{1*})(p_1^*)^s \leqslant (2s+1)(1-p_{1*})(p_1^*)^s\sum_{1\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}\tilde{\nu}_t^1 =$$

$$= (2s+1)(1-p_{1*})(p_1^*)^s\mathbf{E}\tilde{\varsigma}_s^1. \tag{2.2}$$

(в силу формулы (1.1)).

Теперь перейдем к оцениванию S_2. Заметим, что события, соответствующие случайным индикаторам $\tilde{\nu}_t^1$ и $\tilde{\nu}_{t'}^1$, $t'\in O(t)\backslash\{t\}$, несовместны. Действительно, при $t+1\leqslant t'\leqslant t+s$ событие $\{\tilde{\nu}_t^1=\tilde{\nu}_{t'}^1=1\}$ означает, что вместе должны произойти две цепочки равенств $\{X_{t-1}\neq a, X_t = \ldots = X_{t+s-1}=a\}$ и $\{X_{t'-1}\neq a, X_{t'}=\ldots=X_{t'+s-1}=a\}$. Это невозможно, так как в первой цепочке $X_{t'-1}=a$, а во второй — $X_{t'-1}\neq a$. Значит, $\mathbf{P}\{\tilde{\nu}_t^1=\tilde{\nu}_{t'}^1=1\}=0$. Аналогично при $t-s\leqslant t'\leqslant t-1$. Поэтому $S_2=0$.

Из оценок (2.1) и (2.2) получаем, что

$$\rho_{TV}(\mathcal{L}(\tilde{\varsigma}_s^1),\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\tilde{\varsigma}_s^1)) \leqslant (2s+1)(1-p_{1*})(p_1^*)^s.$$

Из последней формулы вытекает (1.2). Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся неравенством треугольника

$$\rho_{TV}(\mathcal{L}(\varsigma_s^a),\mathrm{Pois}(\lambda_s^a)) \leqslant \rho_{TV}\big(\mathcal{L}(\varsigma_s^a),\mathrm{Pois}(\lambda_s^a(\mathbf{Z}))\big)+\rho_{TV}\big(\mathrm{Pois}(\lambda_s^a(\mathbf{Z})),\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\varsigma_s^a)\big)+$$

$$+\rho_{TV}\big(\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\varsigma_s^a),\mathrm{Pois}(\lambda_s^a)\big). \tag{2.3}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $T,s\to\infty$. Тогда*

$$\rho_{TV}\big(\mathrm{Pois}(\lambda_s^a(\mathbf{Z})),\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\varsigma_s^a)\big) = O\big(s(p_a^*)^s\big). \tag{2.4}$$

Напомним (см. [18]), что случайная величина X имеет смешанное распределение Пуассона с дискретным случайным параметром Λ, принимающем значения в множестве $\mathcal{E}$, если

$$\mathbf{P}\{X=n\}=\sum_{\lambda\in\mathcal{E}}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\mathbf{P}\{\Lambda=\lambda\}.$$

Для оценки слагаемых в (2.3) воспользуемся результатами лемм 1 и 3. Из (1.2) следует, что

$$\rho_{TV}\big(\mathcal{L}(\varsigma_s^a),\mathrm{Pois}(\lambda_s^a(\mathbf{Z}))\big) \leqslant (2s+1)(1-p_{a*})(p_a^*)^s. \tag{2.5}$$

Для оценки последнего слагаемого в (2.3) воспользуемся первым утверждением теоремы 1.C книги [19, глава 1, с. 12], согласно которому

$$\rho_{TV}\big(\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\varsigma_s^a),\mathrm{Pois}(\lambda_s^a)\big) \leqslant \min\left\{1,\frac{1}{\sqrt{\lambda_s^a}}\right\}|\mathbf{E}\varsigma_s^a-\lambda_s^a|.$$

Из (1.6) и (1.7) имеем

$$\mathbf{E}\varsigma_s^a-\lambda_s^a = O\left(T^{-1}\lambda_s^a\right)=O\big((p_a^*)^s\big),$$

$$\rho_{TV}\left(\mathrm{Pois}(\mathbf{E}\varsigma_s^a),\mathrm{Pois}(\lambda_s^a)\right)=O\big((p_a^*)^s\big). \tag{2.6}$$

Подставляя (2.4), (2.5) и (2.6) в правую часть неравенства (2.3), получаем оценку (1.8). Теорема 1 доказана. □

Доказательство леммы 2. Из формулы (1.5) следует, что

$$\mathbf{E}\varsigma_s^a=\mathbf{E}\lambda_s^a(\mathbf{Z})=\mathbf{E}\sum_{t=1}^{T}\big(1-p_a^{(Z_{t-1})}\big)\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}=$$

$$= \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} \sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(k_0)}) \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \mathbf{P}\{Z_{t-1}=k_0, Z_t=k_1,\ldots,Z_{t+s-1}=k_s\} =$$

$$= \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} \sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(k_0)}) \pi_{k_0}(t-1) \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j}.$$

Из последней формулы и из (1.7) получаем

$$\mathbf{E}\varsigma_s^a - \lambda_s^a = \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} \sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(k_0)}) \pi_{k_0}(t-1) \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j} -$$

$$- T \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} (1-p_a^{(k_0)}) \tilde{\pi}_{k_0} \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j} =$$

$$= \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} \sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(k_0)}) (\pi_{k_0}(t-1) - \tilde{\pi}_{k_0}) \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j}.$$

Тогда из оценки (1.3) следует, что

$$|\mathbf{E}\varsigma_s^a - \lambda_s^a| \leqslant \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} \sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(k_0)}) C \tilde{\pi}_{k_0} e^{-\alpha(t-1)} \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j}.$$

Так как

$$\sum_{t=1}^{T} e^{-\alpha(t-1)} = \frac{e^{\alpha}(1-e^{-\alpha T})}{e^{\alpha}-1} \leqslant \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1},$$

то

$$|\mathbf{E}\varsigma_s^a - \lambda_s^a| \leqslant C \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1} \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} (1-p_a^{(k_0)}) \tilde{\pi}_{k_0} \prod_{j=1}^{s} p_a^{(k_j)} \pi_{k_{j-1}k_j} = C \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1} \lambda_s^a T^{-1} = O\left(\lambda_s^a T^{-1}\right).$$

Отсюда получаем (1.7). Лемма 2 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Воспользуемся вторым утверждением теоремы 1.C книги [19, глава 1, с. 12], которое в нашем случае формулируется следующим образом:

$$\rho_{TV}\big(\mathrm{Pois}(\lambda_s^a(\mathbf{Z})), \mathrm{Pois}(\mathbf{E}\varsigma_s^a)\big) \leqslant \frac{1-e^{-\mathbf{E}\varsigma_s^a}}{\mathbf{E}\varsigma_s^a} \mathbf{D}\lambda_s^a(\mathbf{Z}). \tag{2.7}$$

Вычислим сначала второй момент случайной величины $\lambda_s^a(\mathbf{Z})$. Согласно (1.5)

$$\mathbf{E}(\lambda_s^a(\mathbf{Z}))^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(Z_{t-1})}) \prod_{j=t}^{t+s-1} p_a^{(Z_j)} \right)^2 =$$

$$= \mathbf{E} \sum_{t=1}^{T} \sum_{t'=1}^{T} (1-p_a^{(Z_{t-1})}) \prod_{j=t}^{t+s-1} p_a^{(Z_j)} (1-p_a^{(Z_{t'-1})}) \prod_{j'=t'}^{t'+s-1} p_a^{(Z_{j'})}. \tag{2.8}$$

Оценим отдельно слагаемые в правой части формулы (2.8). Для этого введем обозначения

$$D_1 = \mathbf{E} \sum_{t=1}^{T} (1-p_a^{(Z_{t-1})})^2 \prod_{j=t}^{t+s-1} (p_a^{(Z_j)})^2,$$

$$D_2 = \mathbf{E} \sum_{t=1}^{T} \sum_{t'\colon 0<|t'-t|\leqslant s} (1-p_a^{(Z_{t-1})}) \prod_{j=t}^{t+s-1} p_a^{(Z_j)} (1-p_a^{(Z_{t'-1})}) \prod_{j'=t'}^{t'+s-1} p_a^{(Z_{j'})},$$

$$D_3 = \mathbf{E}\sum_{t=1}^{T}\sum_{t+s+1\leqslant t'\leqslant T}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_a^{(Z_{t'-1})})\prod_{j'=t'}^{t'+s-1}p_a^{(Z_{j'})},$$

$$D_4 = \mathbf{E}\sum_{t=1}^{T}\sum_{1\leqslant t'\leqslant t-s-1}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_a^{(Z_{t'-1})})\prod_{j'=t'}^{t'+s-1}p_a^{(Z_{j'})}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}(\lambda_s^a(\mathbf{Z}))^2 = \sum_{j=1}^{4}D_j.$$

Начнем с D_1. Заметим, что

$$D_1 = \mathbf{E}\sum_{t=1}^{T}(1-p_a^{(Z_{t-1})})^2\prod_{j=t}^{t+s-1}(p_a^{(Z_j)})^2 \leqslant (1-p_{a*})(p_a^*)^s\mathbf{E}\sum_{t=1}^{T}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)} =$$
$$= (1-p_{a*})(p_a^*)^s\mathbf{E}\varsigma_s^a. \qquad (2.9)$$

Пусть $0<|t'-t|\leqslant s$. Рассмотрим отдельно одно из слагаемых, входящих в сумму D_2. Аналогично предыдущему случаю

$$\mathbf{E}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_a^{(Z_{t'-1})})\prod_{j'=t'}^{t'+s-1}p_a^{(Z_{j'})} \leqslant \mathbf{E}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_{a*})(p_a^*)^s.$$

Тогда

$$D_2 \leqslant 2s\sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_{a*})(p_a^*)^s = 2s(1-p_{a*})(p_a^*)^s\mathbf{E}\varsigma_s^a. \qquad (2.10)$$

Теперь перейдем к D_3. При $t'\geqslant t+s+1$ имеем

$$\mathbf{E}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_a^{(Z_{t'-1})})\prod_{j'=t'}^{t'+s-1}p_a^{(Z_{j'})} =$$
$$= \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}\mathbf{P}\{Z_{t-1}=k_0,\ldots,Z_{t+s-1}=k_s,Z_{t'-1}=l_0\ldots,Z_{t'+s-1}=l_s\}\cdot$$
$$\cdot(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}(1-p_a^{(l_0)})\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})} =$$
$$= \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\pi_{k_0}(t-1)(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\pi_{k_sl_0}^{(t'-t-s)}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}.$$

Воспользуемся оценками (1.3). Тогда правая часть последней формулы оценивается сверху выражением

$$(1+Ce^{-\alpha(t-1)})(1+Ce^{-\alpha(t'-t-s)})\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde\pi_{k_0}(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$
$$\cdot\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde\pi_{l_0}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}. \qquad (2.11)$$

Значит, подставляя оценку (2.11) в определение суммы D_3, получаем

$$D_3 \leqslant \sum_{t=1}^{T}\sum_{t+s+1\leqslant t'\leqslant T}(1+Ce^{-\alpha(t-1)})(1+Ce^{-\alpha(t'-t-s)})\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde\pi_{k_0}(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$

$$\cdot \sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde{\pi}_{l_0}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}. \tag{2.12}$$

Далее, так как при указанном в условиях леммы изменении параметров

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{t+s+1\leqslant t'\leqslant T}(1+Ce^{-\alpha(t-1)})(1+Ce^{-\alpha(t'-t-s)})=\frac{1}{2}T(T-2s-1)+O(T),$$

из (2.12) получаем

$$D_3=\left(\frac{1}{2}T(T-2s-1)+O(T)\right)\left(\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde{\pi}_{k_0}(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\right)^2=$$

$$=\lambda_s^a\left(\frac{1}{2}\lambda_s^a+O(\lambda_s^aT^{-1})\right). \tag{2.13}$$

Наконец, рассмотрим сумму D_4. Ее оценивание проводится аналогично D_3: при $t'\leqslant t-s-1$ одно слагаемое суммы D_4 оценивается как

$$\mathbf{E}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_a^{(Z_{t'-1})})\prod_{j'=t'}^{t'+s-1}p_a^{(Z_{j'})}=$$

$$=\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}\mathbf{P}\{Z_{t'-1}=k_0,\ldots,Z_{t'+s-1}=k_s,Z_{t-1}=l_0\ldots,Z_{t+s-1}=l_s\}\cdot$$

$$\cdot(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}(1-p_a^{(l_0)})\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}=$$

$$=\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\pi_{k_0}(t'-1)(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\pi_{k_sl_0}^{(t-t'-s)}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}\leqslant$$

$$\leqslant(1+Ce^{-\alpha(t'-1)})(1+Ce^{-\alpha(t-t'-s)})\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde{\pi}_{k_0}(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$

$$\cdot\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde{\pi}_{l_0}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}.$$

Поэтому

$$D_4\leqslant\sum_{t=1}^{T}\sum_{1\leqslant t'\leqslant t-s-1}(1+Ce^{-\alpha(t'-1)})(1+Ce^{-\alpha(t-t'-s)})\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde{\pi}_{k_0}(1-p_a^{(l_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$

$$\cdot\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde{\pi}_{l_0}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}.$$

Меняя порядок суммирования по t и t' в последней формуле, получаем

$$D_4\leqslant\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t'+s+1\leqslant t\leqslant T}(1+Ce^{-\alpha(t'-1)})(1+Ce^{-\alpha(t-t'-s)})\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde{\pi}_{k_0}(1-p_a^{(l_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$

$$\cdot\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde{\pi}_{l_0}\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}.$$

Таким образом, правая часть последней оценки совпадает с оценкой (2.12) для суммы D_3. Значит
$$D_4 = \lambda_s^a \left(\frac{1}{2}\lambda_s^a + O(\lambda_s^a T^{-1})\right). \tag{2.14}$$

Подставив оценки (2.9)–(2.14) в (2.8), получим, что
$$\mathbf{E}(\lambda_s^a(\mathbf{Z}))^2 \leqslant \mathbf{E}\varsigma_s^a \left((2s+1)(1-p_{a*})(p_a^*)^s + \lambda_s^a \left(1+O(T^{-1})\right)\right),$$
$$\mathbf{D}\lambda_s^a(\mathbf{Z}) = \mathbf{E}\varsigma_s^a \left((2s+1)(1-p_{a*})(p_a^*)^s + O(\lambda_s^a T^{-1})\right).$$

Из формулы (1.7) следует, что
$$\lambda_s^a \leqslant T \sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M} (1-p_{a*})\tilde{\pi}_{k_0} \prod_{j=1}^{s} p_a^* \pi_{k_{j-1}k_j} = T(1-p_{a*})(p_a^*)^s.$$

Значит
$$\mathbf{D}\lambda_s^a(\mathbf{Z}) = \mathbf{E}\varsigma_s^a (1-p_{a*}) O\left(s(p_a^*)^s\right).$$

Оценка (2.4) получается из последней формулы и (2.7). Лемма 3 доказана. □

Замечание 3. Если цепь Маркова $\mathbf{Z}$ стационарна, то неравенство (2.11) можно записать в виде равенства
$$\mathbf{E}\sum_{t=1}^{T}\sum_{t'=t+s+1}^{T}(1-p_a^{(Z_{t-1})})\prod_{j=t}^{t+s-1}p_a^{(Z_j)}(1-p_a^{(Z_{t'-1})})\prod_{j'=t'}^{t'+s-1}p_a^{(Z_{j'})} =$$
$$= \sum_{t=1}^{T}\sum_{t'=t+s+1}^{T}\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde{\pi}_{k_0}(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$
$$\cdot\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde{\pi}_{l_0}(1+Ce^{-\alpha(t'-t-s)})\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}}.$$

Значит формула (2.12) примет вид
$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k_0,\ldots,k_s\in E_M}\tilde{\pi}_{k_0}(1-p_a^{(k_0)})\prod_{j=1}^{s}p_a^{(k_j)}\pi_{k_{j-1}k_j}\cdot$$
$$\cdot\sum_{l_0,\ldots,l_s\in E_M}(1-p_a^{(l_0)})\tilde{\pi}_{l_0}\left(T-t-s+\frac{C}{e^\alpha-1}\right)\prod_{j'=1}^{s}p_a^{(l_{j'})}\pi_{l_{j'-1}l_{j'}} = (\lambda_s^a)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{C}{T(e^\alpha-1)}\right)$$
и
$$\mathbf{D}\lambda_s^a(\mathbf{Z}) = \lambda_s^a\left((2s+1)(1-p_{a*})(p_a^*)^s + \frac{2C\lambda_s^a}{T(e^\alpha-1)}\right).$$

Таким образом, для стационарной цепи Маркова $\mathbf{Z}$ вместо асимптотической оценки (1.8) имеем точную оценку (1.9).

Автор выражает глубокую признательность рецензенту за ценные замечания и рекомендации, а также доктору физ.-мат. наук В. Г. Михайлову за постановку задачи и внимание к работе.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balakrishnan N., Koutras M.V. Runs and scans with applications. John Wiley & Sons, Inc., 2002. 452 p.
2. Aki S., Hirano K. Sooner and later waiting time problems for runs in Markov dependent bivariate trials // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 1999. Vol. 51. Issue 1. P. 17–29. DOI: 10.1023/A:1003874900507
3. Aki S., Hirano K. Discrete distributions related to succession events in two-state Markov chain // Statistical science and data analysis / Matusita K., Puri M.L., Hayakawa T. Zeist: VSP International Science Publishers, 1993. P. 467–474.
4. Geske M.X., Godbole A.P., Schaffner A.A., Skolnick A.M., Wallstrom G.L. Compound Poisson approximations for word patterns under Markovian hypotheses // Journal of Applied Probability. 1995. Vol. 32. No. 4. P. 877–892. DOI: 10.2307/3215201
5. Михайлов В.Г. Об асимптотических свойствах числа серий событий // Труды по дискретной математике. 2006. Т. 9. С. 152–163.
6. Савельев Л.Я., Балакин С.В. Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичных марковских последовательностях // Дискретная математика. 2004. Т. 16. № 3. С. 43–62. DOI: 10.4213/dm162
7. Савельев Л.Я., Балакин С.В. Комбинаторное вычисление моментов характеристик серий в троичных марковских последовательностях // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 76–92. DOI: 10.4213/dm1143
8. Fu J.C., Johnson B.C. Approximate probabilities for runs and patterns in i.i.d. and Markov-dependent multistate trials // Advances in Applied Probability. 2009. Vol. 41. Issue 1. P. 292–308. DOI: 10.1017/S0001867800003232
9. Mahmoudzadeh E., Montazeri M.A., Zekri M., Sadri S. Extended hidden Markov model for optimized segmentation of breast thermography images // Infrared Physics and Technology. 2015. Vol. 72. P. 19–28. DOI: 10.1016/j.infrared.2015.06.012
10. Yang W., Tao J., Ye Z. Continuous sign language recognition using level building based on fast hidden Markov model // Pattern Recognition Letters. 2016. Vol. 78. P. 28–35. DOI: 10.1016/j.patrec.2016.03.030
11. Koski T. Hidden Markov models for bioinformatics. Series: Computational biology, vol. 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. 391 p.
12. Mamon R.S., Elliott R.J. (Eds.) Hidden Markov models in finance. International series in operations research & management science. New York: Springer–Verlag, 2007. 186 p. DOI: 10.1007/0-387-71163-5
13. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov models. Applications of Mathematics, vol. 29. New York: Springer–Verlag, 1995. 382 p.
14. Меженная Н.М. О числе совпадений знаков в дискретной случайной последовательности, управляемой цепью Маркова // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 305–317. DOI: 10.17377/semi.2016.13.025
15. Ширяев А.Н. Вероятность–1. 4-е изд. Москва: МЦНМО, 2011. 552 с.
16. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. Москва: Наука, 1979. 184 с.
17. Arratia R., Goldstein L., Gordon L. Two moments suffice for Poisson approximations: the Chen–Stein method // Annals of Probability. 1989. Vol. 17. No. 1. P. 9–25. DOI: 10.1214/aop/1176991491
18. Karlis D., Xekalaki E. Mixed Poisson distributions // International Statistical Review. 2005. Vol. 73. Issue 1. P. 35–58. DOI: 10.1111/j.1751-5823.2005.tb00250.x
19. Barbour A.D., Holst L., Janson S. Poisson approximation. Oxford: Oxford University Press, 1992. 277 p.

Поступила в редакцию 23.05.2016

Меженная Наталья Михайловна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., 5/1.
E-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 3

N. M. Mezhennaya

On the limit distribution of a number of runs in polynomial sequence controlled by Markov chain

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 324–335 (in Russian).

Keywords: Markov chain, polynomial random sequence, number of runs, Poisson limit theorem, total variation distance, Chen–Stein method.

MSC2010: 60F05, 60B10, 60J10

DOI: 10.20537/vm160303

The present paper is devoted to studying the asymptotic properties of a number of runs in the sequence of discrete random variables controlled by Markov chain with a finite number of states. A chain state at each step determines the law of characters distribution in the controlled sequence at this step. This random sequence represents a model of hidden Markov chain. Using Chen–Stein method we estimate the total variation distance between the distribution of the number of runs with length not less than predetermined length in the random sequence controlled by Markov chain and the accompanying Poisson distribution. For this purpose we first consider the sequence of independent inhomogeneous polynomial random variables, and then we use an approach which allows to get the estimate for total variation distance between mixed Poisson distribution and Poisson distribution with the parameter which equals to an average number of runs with length not less than predetermined. The estimate is based on both the variance of the mixed Poisson distribution parameter and the estimate obtained earlier for the total variation distance for the polynomial scheme. Separately we consider the case of a stationary Markov chain. Using derived estimates we investigate Poisson and normal limit theorems for the number of runs with length not less than predetermined, as well as the limit distribution for the maximal run length in a controlled sequence.

REFERENCES

1. Balakrishnan N., Koutras M.V. *Runs and scans with applications*, John Wiley & Sons, Inc., 2002, 452 p.
2. Aki S., Hirano K. Sooner and later waiting time problems for runs in Markov dependent bivariate trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 1999, vol. 51, issue 1, pp. 17–29. DOI: 10.1023/A:1003874900507
3. Aki S., Hirano K. Discrete distributions related to succession events in two-state Markov chain, *Statistical science and data analysis*, Matusita K., Puri M.L., Hayakawa T. (Eds.), Zeist: VSP International Science Publishers, 1993, pp. 467–474.
4. Geske M.X., Godbole A.P., Schaffner A.A., Skolnick A.M., Wallstrom G.L. Compound Poisson approximations for word patterns under Markovian hypotheses, *Journal of Applied Probability*, 1995, vol. 32, no. 4, pp. 877–892. DOI: 10.2307/3215201
5. Mikhailov V.G. On asymptotic properties of the number of runs of events, *Tr. Diskr. Mat.*, 2006, vol. 9, pp. 152–163 (in Russian).
6. Savelyev L.Ya., Balakin S.V. The joint distribution of the number of ones and the number of 1-runs in binary Markov sequences, *Discrete Mathematics and Applications*, 2004, vol. 14, issue 4, pp. 353–372. DOI: 10.1515/1569392041938802
7. Savelyev L.Ya., Balakin S.V. A combinatorial approach to calculation of moments of characteristics of runs in ternary Markov sequences, *Discrete Mathematics and Applications*, 2011, vol. 21, issue 1, pp. 47–67. DOI: 10.1515/dma.2011.004
8. Fu J.C., Johnson B.C. Approximate probabilities for runs and patterns in i.i.d. and Markov-dependent multistate trials, *Advances in Applied Probability*, 2009, vol. 41, issue 1, pp. 292–308. DOI: 10.1017/S0001867800003232
9. Mahmoudzadeh E., Montazeri M.A., Zekri M., Sadri S. Extended hidden Markov model for optimized segmentation of breast thermography images, *Infrared Physics and Technology*, 2015, vol. 72, pp. 19–28. DOI: 10.1016/j.infrared.2015.06.012
10. Yang W., Tao J., Ye Z. Continuous sign language recognition using level building based on fast hidden Markov model, *Pattern Recognition Letters*, 2016, vol. 78, pp. 28–35. DOI: 10.1016/j.patrec.2016.03.030
11. Koski T. *Hidden Markov models for bioinformatics. Series: Computational biology, vol. 2*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001, 391 p.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 3

12. Mamon R.S., Elliott R.J. (Eds.) *Hidden Markov models in finance. International series in operations research & management science*, New York: Springer–Verlag, 2007, 186 p. DOI: 10.1007/0-387-71163-5
13. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. *Hidden Markov models. Applications of Mathematics, vol. 29*, New York: Springer–Verlag, 1995, 382 p.
14. Mezhennaya N.M. On the number of characters matchings in discrete random sequence controlled by Markov chain, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 305–317 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2016.13.025
15. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'*–1 (Probability–1), 4-th edition, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011, 552 p.
16. Rozanov Yu.A. *Sluchainye protsessy. Kratkii kurs* (Stochastic processes. Short course), Moscow: Nauka, 1979, 184 p.
17. Arratia R., Goldstein L., Gordon L. Two moments suffice for Poisson approximations: the Chen–Stein method, *Annals of Probability*, 1989, vol. 17, no. 1, pp. 9–25. DOI: 10.1214/aop/1176991491
18. Karlis D., Xekalaki E. Mixed Poisson distributions, *International Statistical Review*, 2005, vol. 73, issue 1, pp. 35–58. DOI: 10.1111/j.1751-5823.2005.tb00250.x
19. Barbour A.D., Holst L., Janson S. *Poisson approximation*, Oxford: Oxford University Press, 1992, 277 p.

Received 23.05.2016

Mezhennaya Natal'ya Mikhailovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5/1, Moscow, 105005, Russia.
E-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com