УДК 517.912, 514.1

© *В. А. Кыров*

ВЛОЖЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(\mathbf{N}, \mathbf{2})$ В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(\mathbf{N}+\mathbf{1}, \mathbf{2})$

В данной работе предлагается новый метод классификации метрических функций феноменологически симметричных геометрий двух множеств. Он называется методом вложения, суть которого состоит в нахождении метрических функций феноменологически симметричных геометрий двух множеств высокого ранга по известной феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга на единицу ниже. Так по ранее известной метрической функции феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(2,2)$ находится метрическая функция феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(3,2)$, по феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(3,2)$ находится феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(4,2)$. Затем доказывается, что вложение феноменологически симметричной геометрии двух множеств $(4,2)$ в феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(5,2)$ отсутствует. Для решения поставленной задачи составляются специальные функциональные уравнения, которые сводятся к хорошо известным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: феноменологически симметричная геометрия двух множеств, метрическая функция, дифференциальное уравнение.

DOI: 10.20537/vm160302

Введение

В середине 60-х годов 20 века из анализа строения физических законов была создана теория физических структур (ТФС) [1], основной задачей которой является классификация метрических функций феноменологически симметричных (ФС) геометрий как на одном множестве [2], так и на двух множествах (ГДМ) [3]. Феноменологическая симметрия означает существование функциональной связи между значениями метрической функции для определенного числа произвольно взятых точек. Функциональным методом найдена метрическая функция однометрической ФС ГДМ ранга $(2,2)$:

$$f = x + \xi. \tag{0.1}$$

В данной работе методом вложения находятся метрические функции ФС ГДМ высоких рангов. Так, по известной метрической функции (0.1) ФС ГДМ ранга $(2,2)$ [1] находится метрическая функция ФС ГДМ ранга $(3,2)$, по метрической функции ФС ГДМ ранга $(3,2)$ находится метрическая функция ФС ГДМ ранга $(4,2)$. Затем доказывается, что вложение ФС ГДМ ранга $(4,2)$ в ФС ГДМ ранга $(5,2)$ отсутствует.

Предложенный здесь метод вложения апробирован для ФС геометрий на одном множестве, с помощью которого построены вложения евклидовых, псевдоевклидовых, симплектических и гельмгольцевых геометрий [5–7].

§ 1. Определение ФС ГДМ ранга $(m+1,2)$

В этом параграде дается общее определение. Пусть имеются два гладких многообразия M и N, причем $\dim M = 1$ и $\dim N = m$. Класс гладкости многообразий и функций на них везде предполагается не ниже C^m. Для сокращения записей ниже будем говорить просто о гладкости, подразумевая вышесказанное. Точки первого многообразия обозначаются строчными латинскими буквами: $i, j, k \ldots$, а точки второго многообразия — строчными греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Рассматривается также гладкая функция $f : M \times N \to R$, называемая *метрической*, сопоставляющая паре точек $\langle i, \alpha \rangle$ из открытой и плотной области определения $S_f \subseteq M \times N$ число $f(i, \alpha)$. В локальных координатах

$$f = f(i, \alpha) = f(x, \xi^1, \ldots, \xi^m),$$

где x — локальная координата точки i, а $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ — локальные координаты точки α.

В отношении метрической функции предполагается выполнение аксиомы невырожденности [3, 8]:

Аксиома невырожденности. Выполняются неравенства

$$\frac{\partial f(i, \alpha)}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial (f(i_1, \alpha), \ldots, f(i_m, \alpha))}{\partial (\xi^1, \ldots, \xi^m)} \neq 0,$$

причем первое неравенство справедливо для плотного в $M \times N$ множества пар точек $\langle i, \alpha \rangle$, а второе — для плотного в $M^m \times N$ множества последовательностей точек $\langle i_1, \ldots, i_m, \alpha \rangle$.

Определение 1. Будем говорить, что метрическая функция $f : M \times N \to R$ на многообразиях M и N задает *феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (*ФС ГДМ*) *ранга* $(m + 1, 2)$, если кроме аксиомы невырожденности дополнительно выполняется аксиома феноменологической симметрии.

Аксиома феноменологической симметрии. Существует плотное множество последовательностей $\langle i_1, \ldots, i_{m+1}, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ в $M^{m+1} \times N^2$, где $\langle i_\nu, \alpha_s \rangle \in S_f$, $\nu = 1, \ldots, m + 1$, $s = 1, 2$, такое, что для каждой из них найдется такая гладкая функция $\Phi : R^{2(m+1)} \to R$ с $\operatorname{rang} \Phi = 1$, для которой выполняется равенство

$$\Phi(f(i_1, \alpha_1), \ldots, f(i_{m+1}, \alpha_2)) = 0.$$

§ 2. Гипотеза о вложении ФС ГДМ ранга $(n, 2)$ в ФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$

В данном параграфе ставится задача о вложении ФС ГДМ ранга $(m_1 + 1, 2)$ в ФС ГДМ ранга $(m_2 + 1, 2)$, причем $m_1 = n - 1$, $m_2 = n$.

Гипотеза о вложении. *В окрестности произвольной точки области определения S_f существует такая локальная система координат, в которой метрическую функцию f ФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$ можно представить в следующем виде:*

$$f(i, \alpha) = \chi(g(x, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}), \xi^n); \tag{2.1}$$

здесь $\alpha = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $\chi = \chi(u, v)$ — гладкая функция двух переменных,

$$g = g(i, \overline{\alpha}) = g(x, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) \tag{2.2}$$

— метрическая функция ФС ГДМ ранга $(n, 2)$, $\overline{\alpha}$ — проекция точки α, задаваемая координатами $(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$.

Ограничения на функцию χ вытекают из аксиомы невырожденности метрической функции f, которые записываются в виде следующих двух неравенств:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial (f(i_1\alpha), \ldots, f(i_n\alpha))}{\partial (\xi^1, \ldots, \xi^n)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \chi}{\partial u} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial v} \neq 0.$$

Метрическая функция (2.2) сохраняет свой вид относительно некоторой $n-1$-параметрической группы Ли преобразований (движений), действующей сразу на двух многообразиях M

и N [8], то есть является ее двухточечным инвариантом, и потому выполняется условие локальной инвариантности

$$X_\omega g + \Xi_\omega g = 0, \tag{2.3}$$

где $\omega = 1, \ldots, n-1$, причем операторы X_ω и Ξ_ω образуют базисы алгебр Ли. Для алгебры Ли действия группы преобразований на первом многообразии $L(M)$ произвольный оператор определяется равенством $X = a^\omega X_\omega$, а для алгебры Ли действия группы преобразований на втором многообразии $L(N)$ — равенством $\Xi = a^\omega \Xi_\omega$, где $\omega = 1, \ldots, n-1$. Следует отметить, что алгебры Ли $L(M)$ и $L(N)$ не только изоморфны, но и эквивалентны.

Метрическая функция (2.1) для ФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ является двухточечным инвариантом n-параметрической группы движений. Поэтому по условию локальной инвариантности выполняются n дифференциальных равенств

$$Y_\mu f + \Omega_\mu f = 0, \quad \mu = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

причем операторы

$$Y_\mu = Y_\mu \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Omega_\mu = \Omega^1_\mu \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \cdots + \Omega^{n-1}_\mu \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}} + \Omega^n_\mu \frac{\partial}{\partial \xi^n},$$

где $Y_\mu(x)$, $\Omega^\epsilon_\mu(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — гладкие функции в области своего определения, $\epsilon = 1, \ldots, n$, образуют базисы алгебр Ли. Для алгебры Ли действия группы преобразований на первом многообразии $\overline{L}(M)$ произвольный оператор определяется равенством $Y = a^\mu Y_\mu$, а для алгебры Ли действия группы преобразований на втором многообразии $\overline{L}(N)$ — равенством $\Omega = a^\mu \Omega_\mu$, где $\mu = 1, \ldots, n$. В явном виде эти операторы записываются так:

$$Y = Y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Omega = \Omega^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \cdots + \Omega^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}} + \Omega^n \frac{\partial}{\partial \xi^n}, \tag{2.5}$$

где $Y(x)$, $\Omega^\epsilon(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — гладкие функции в своей области определения, $Y \neq 0$. Следует как и выше отметить, что алгебры Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$ эквивалентны. Заметим, что алгебры Ли $L(M)$ и $L(N)$ являются подалгебрами соответственно алгебр Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$.

Далее решается задача о нахождении функции f, задающей ФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ по известной функции g, задающей ФС ГДМ ранга $(n, 2)$.

Операторы (2.5) и метрическую функцию (2.1) подставляем далее в условие инвариантности (2.4) и получаем функционально-дифференциальное выражение:

$$\left(Y \frac{\partial g}{\partial x} + \Omega^1 \frac{\partial g}{\partial \xi^1} + \cdots + \Omega^{n-1} \frac{\partial g}{\partial \xi^{n-1}} \right) \frac{\partial \chi}{\partial u} + \Omega^n \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0, \tag{2.6}$$

где $u = g$, $v = \xi^n$. Очевидно,

$$Y \frac{\partial g}{\partial x} + \Omega^1 \frac{\partial g}{\partial \xi^1} + \cdots + \Omega^{n-1} \frac{\partial g}{\partial \xi^{n-1}} = \Omega^n \varkappa(u, v), \tag{2.7}$$

где $\varkappa = -\chi'_v / \chi'_u \neq 0$.

Лемма 1. *В функционально-дифференциальном выражении* (2.6) $\Omega^n \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega^n = 0$. Тогда, согласно (2.7), имеем равенство

$$Y \frac{\partial g}{\partial x} + \Omega^1 \frac{\partial g}{\partial \xi^1} + \cdots + \Omega^{n-1} \frac{\partial g}{\partial \xi^{n-1}} = 0,$$

которое представляет собой условие локальной инвариантности (2.3) для произвольных операторов (2.5). Таким образом, произвольные операторы Y и Ω алгебр Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$ удовлетворяют условию инвариантности для алгебр Ли $L(M)$ и $L(N)$. Поэтому $Y = b^\omega X_\omega$ и $\Omega = b^\omega \Xi_\omega$. Значит алгебры Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$ имеют размерность $n-1$. Противоречие. $\square$

Итак, получаем дифференциальное уравнение на функцию χ:

$$\varkappa(u,v)\frac{\partial\chi}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial v}=0. \tag{2.8}$$

Ниже ищутся метрические функции ФС ГДМ с точностью до локальной изотопии, которая включает локально-диффеоморфную замену локальных координат ($\varphi(x)=\overline{x}$, $\psi_1(\xi_1,\ldots,\xi_m)=$ $=\overline{\xi}_1,\ldots,\psi_m(\xi_1,\ldots,\xi_m)=\overline{\xi}_m$) и гладкое локально-обратимое преобразование метрической функции ($\kappa(f)=\overline{f}$).

§ 3. Вложение ФС ГДМ ранга $(2,2)$ в ФС ГДМ ранга $(3,2)$

В данном параграфе $n=2$, то есть рассматривается вложение ФС ГДМ ранга $(2,2)$, которое ранее было найдено в [1, 9].

Теорема 1. *Существует единственное вложение ФС ГДМ ранга* $(2,2)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции* (0.1), *в ФС ГДМ ранга* $(3,2)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции*

$$f=x\xi+\eta. \tag{3.1}$$

Доказательство. Метрическая функция ФС ГДМ ранга $(2,2)$ записывается так:

$$g=u=x+\xi;$$

поэтому равенство (2.7), в котором удобно ввести обозначения $\xi=\xi^1$, $\eta=\xi^2$, принимает вид:

$$Y+\Omega^1=\Omega^2\varkappa(u,\eta). \tag{3.2}$$

Полученное выражение выполняется тождественно по переменным x,ξ,η и поэтому является функциональным уравнением относительно неизвестных $Y(x)$, $\Omega^1(\xi,\eta)$, $\Omega^2(\xi,\eta)$, $\varkappa(u,\eta)$. По лемме 1 $\Omega^2\neq 0$. Далее, решая уравнения (3.2) и (2.8), найдем все метрические функции, задающие ФС ГДМ ранга $(3,2)$. □

Лемма 2. *В функциональном уравнении* (3.2) $Y\neq\mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $Y=\alpha=\mathrm{const}$. Тогда, дифференцируя (3.2) по x, имеем $\varkappa'_u=0$, следовательно $\varkappa=q(\eta)$. Подставляем найденное в уравнение (2.8):

$$q(\eta)\frac{\partial\chi}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial\eta}=0.$$

Интегрируя, имеем

$$f=\varphi(c_1)=\varphi\left(x+\xi-\int d\eta/q(\eta)\right).$$

Затем осуществляем замену координат и масштабное преобразование метрической функции:

$$\overline{f}=\varphi^{-1}(f),\quad \overline{\xi}=\xi-\int d\eta/q(\eta).$$

Тогда метрическая функция принимает вид:

$$\overline{f}=x+\overline{\xi}.$$

В эту метрическую функцию входит только одна координата второго многообразия N, поэтому она вырождена, то есть не задает ФС ГДМ ранга $(3,2)$. □

Далее делим уравнение (3.2) на Ω^2 и переобозначаем коэффициенты, в результате получим функциональное уравнение

$$A(\xi,\eta)Y(x)+B(\xi,\eta)=\varkappa(u,\eta),$$

где $A=1/\Omega^2\neq 0$, $B=\Omega^1/\Omega^2$. Полученное уравнение дифференцируем по x и по ξ:

$$A'_\xi Y(x)+B'_\xi=\varkappa'_u,\quad AY'(x)=\varkappa'_u. \tag{3.3}$$

Приравнивая левые части, имеем тождество

$$A'_\xi Y(x)+B'_\xi=AY'(x).$$

Дифференцируя его по x и разделяя переменные, получаем

$$A'_\xi/A=Y''(x)/Y'(x)=a=\mathrm{const}. \tag{3.4}$$

Далее возможны два случая.

1. Пусть сначала $a=0$. Тогда $A'_\xi=0$, $Y''(x)=0$, следовательно $A=A(\eta)$, $Y=bx+c$. Подставляя найденное во второе уравнение из (3.3), затем интегрируя и переобозначая коэффициенты, имеем

$$\varkappa=p(\eta)u+q(\eta),\quad p^2+q^2\neq 0. \tag{3.5}$$

Затем (3.5) подставляем в (2.8):

$$\big(p(\eta)u+q(\eta)\big)\frac{\partial\chi}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial\eta}=0. \tag{3.6}$$

Предложение 1. *Общим решением дифференциального уравнения* (3.6) *является функция*

$$f=\chi=\varphi\Big(ue^{-\int p(\eta)\,d\eta}-\int q(\eta)e^{-\int p(\eta)\,d\eta}\,d\eta\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.6) решаем методом характеристик, для чего составляется уравнение характеристик:

$$\frac{du}{p(\eta)u+q(\eta)}=\frac{d\eta}{1}.$$

Записываем далее линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{d\eta}=p(\eta)u+q(\eta),$$

решение которого приведено в книге [10]. □

Затем осуществляем замену координат и масштабное преобразование функции, полученной в предложении 1:

$$\overline{f}=\varphi^{-1}(f),\quad \overline{\xi}=e^{-\int p(\eta)\,d\eta},\quad \overline{\eta}=\xi e^{-\int p(\eta)\,d\eta}-\int q(\eta)e^{-\int p(\eta)\,d\eta}\,d\eta.$$

Тогда метрическая функция принимает вид:

$$\overline{f}=x\overline{\xi}+\overline{\eta}.$$

Итак, получена каноническая форма для ФС ГДМ ранга $(3,2)$.

2. Пусть теперь $a\neq 0$. Тогда система (3.4) имеет решение: $A=A(\eta)e^{a\xi}$, $Y=be^{ax}+c$, $b,c=\mathrm{const}$. Подставляя найденное в (3.3), интегрируя и переобозначая коэффициенты, имеем

$$\varkappa=p(\eta)e^{au}+q(\eta),\quad p^2+q^2\neq 0, \tag{3.7}$$

Затем (3.7) подставляем в (2.8):

$$\big(p(\eta)e^{au}+q(\eta)\big)\frac{\partial\chi}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial\eta}=0. \tag{3.8}$$

Предложение 2. *Общим решением дифференциального уравнения* (3.8) *является функция*

$$f = \chi = \varphi\Big(e^{-au}e^{a\int q(y)\,dy} + a\int p(y)e^{a\int q(y)\,dy}\,dy\Big).$$

Доказательство. Уравнение (3.8) решаем методом характеристик, для чего составляется уравнение характеристик:

$$\frac{du}{p(\eta)e^{au}+q(\eta)} = \frac{d\eta}{1}.$$

Записываем далее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{d\eta} = p(\eta)e^{au} + q(\eta).$$

Вводится подстановка $z = e^{au}$, тогда получаем уравнение Бернулли:

$$\frac{1}{a}\frac{dz}{d\eta} = p(\eta)z^2 + q(\eta)z.$$

Решение этого уравнения можно найти в книге [10]. □

Проведем замену координат и масштабное преобразование функции, полученной в предложении 2:

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x} = e^{-ax}, \quad \overline{\xi} = e^{-a\xi}e^{a\int q(\eta)\,d\eta}, \quad \overline{\eta} = a\int p(\eta)e^{a\int q(\eta)\,d\eta}\,d\eta.$$

Тогда для метрической функции получим выражение:

$$\overline{f} = \overline{x}\overline{\xi} + \overline{\eta}.$$

Итак, снова получена каноническая форма для ФС ГДМ ранга $(3,2)$.

Таким образом, задача вложения ФС ГДМ ранга $(2,2)$ в ФС ГДМ ранга $(3,2)$ полностью решена. □

Заметим, что единственность вложения следует из единственности решения соответствующих дифференциальных уравнений.

§ 4. Вложение ФС ГДМ ранга $(3,2)$ в ФС ГДМ ранга $(4,2)$

В данном параграфе $n = 3$. Метрическая функция ФС ГДМ ранга $(3,2)$ найдена в § 3.

Теорема 2. *Существует единственное вложение ФС ГДМ ранга* $(3,2)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции* (3.1), *в ФС ГДМ ранга* $(4,2)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции*

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \vartheta}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Выше найдена метрическая функция ФС ГДМ ранга $(3,2)$:

$$g = u = x\xi + \eta.$$

Согласно методу вложения метрическая функция ФС ГДМ ранга $(4,2)$ ищется в виде (2.1), причем для удобства вводятся обозначения $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$, $\vartheta = \xi^3$. Далее записываем равенство (2.7) в явном виде:

$$\xi Y + x\Omega^1 + \Omega^2 = \Omega^3\varkappa(u,\vartheta). \tag{4.2}$$

Последнее выражение выполняется тождественно по переменным x, ξ, η, ϑ и поэтому является функциональным уравнением относительно неизвестных $Y(x)$, $\Omega^1(\xi,\eta,\vartheta)$, $\Omega^2(\xi,\eta,\vartheta)$, $\Omega^3(\xi,\eta,\vartheta)$, $\varkappa(u,\vartheta)$. По лемме 1 $\Omega^3 \neq 0$.

Лемма 3. *В функциональном уравнении* (4.2) $Y' \neq \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Y' = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда $Y(x) = \alpha x + \beta$, причем $\alpha, \beta = \mathrm{const}$. В силу леммы 2 можно считать $\alpha \neq 0$. Найденное подставляем в (4.2) и дважды дифференцируем по x: $\varkappa''_u = 0$, следовательно $\varkappa = p(\vartheta)u + q(\vartheta)$. Далее, рассуждая как и при доказательстве теоремы 1, получаем метрическую функцию

$$\overline{f} = x\overline{\xi} + \overline{\eta},$$

которая зависит только от двух координат многообразия N. Тогда эта функция вырождена, то есть не задает ФС ГДМ ранга $(4, 2)$. $\square$

Уравнение (4.2) разделим на $\Omega^3 \neq 0$ и переобозначим коэффициенты:

$$A(\xi, \eta, \vartheta)Y(x) + xB(\xi, \eta, \vartheta) + C(\xi, \eta, \vartheta) = \varkappa(u, \vartheta), \tag{4.3}$$

где $A = \xi/\Omega^3 \neq 0$, $B = \Omega^1/\Omega^3$, $C = \Omega^2/\Omega^3$. Полученное дифференцируем по x и по η:

$$A'_\eta Y(x) + xB'_\eta + C'_\eta = \varkappa'_u, \quad AY'(x) + B = \xi\varkappa'_u. \tag{4.4}$$

Умножаем первое равенство на ξ и приравниваем левые части:

$$\xi A'_\eta Y(x) + x\xi B'_\eta + \xi C'_\eta = AY'(x) + B.$$

Дифференцируя полученное по x дважды и разделяя переменные, имеем:

$$\xi A'_\eta / A = Y'''(x)/Y''(x) = a = \mathrm{const}. \tag{4.5}$$

Далее возможны два случая

1. Пусть сначала $a = 0$. Тогда $Y'''(x) = 0$, следовательно $Y = bx^2 + cx + d$, $b, c, d = \mathrm{const}$, $b \neq 0$. Подставляя найденное в (4.3), получим $\varkappa'''_u = 0$, следовательно

$$\varkappa = p(\vartheta)u^2 + q(\vartheta)u + r(\vartheta).$$

Таким образом, уравнение (2.8) принимает вид:

$$\big(p(\vartheta)u^2 + q(\vartheta)u + r(\vartheta)\big)\frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} = 0. \tag{4.6}$$

Предложение 3. *Общим решением дифференциального уравнения* (4.6) *является функция*

$$f = \chi = \varphi\left(\frac{e^{\int q(\vartheta)\, d\vartheta} + (x\xi + \eta - u_1)\int p(\vartheta)e^{\int q(\vartheta)\, d\vartheta}\, d\vartheta}{x\xi + \eta - u_1}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4.6) решаем методом характеристик, для чего составляется уравнение характеристик:

$$\frac{du}{p(z)u^2 + q(z)u + r(z)} = \frac{dz}{1}.$$

Записываем далее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{dz} = p(z)u^2 + q(z)u + r(z),$$

которое называется уравнением Риккати, его решение можно найти в работе [10]. $\square$

Далее осуществляем замену координат и масштабное преобразование метрической функции:

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{\xi} = \int p(\vartheta)e^{\int q(\vartheta)\, d\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$\overline{\eta} = \Big(e^{\int q(\vartheta)\,d\vartheta} + \eta - u_1 \int p(\vartheta) e^{\int q(\vartheta)\,d\vartheta}\,d\vartheta\Big)/\xi, \quad \overline{\vartheta} = (\eta - u_1)/\xi.$$

Тогда метрическая функция принимает канонический вид

$$\overline{f} = \frac{x\overline{\xi} + \overline{\eta}}{x + \overline{\vartheta}}.$$

Итак, получена каноническая форма метрической функции для ФС ГДМ ранга $(4,2)$.

2. Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда из системы (4.5) следует $Y = be^{ax} + cx + d$, $b, c, d = \mathrm{const}$, $b \neq 0$. Подставляя найденное в (4.4), будем иметь

$$A(\xi,\eta,\vartheta)(be^{ax} + cx + d) + xB(\xi,\eta,\vartheta) + C(\xi,\eta,\vartheta) = \varkappa(u,\vartheta).$$

Полученное продифференцируем дважды по x: $A(\xi,\eta,\vartheta)a^2be^{ax} = \xi^2\varkappa''_u$. Затем дифференцируем найденное по ξ и по x:

$$A'_\xi(\xi,\eta,\vartheta)a^2be^{ax} = x\xi^2\varkappa'''_u + 2\xi\varkappa''_u, \quad A(\xi,\eta,\vartheta)a^3be^{ax} = \xi^3\varkappa'''_u.$$

Тогда

$$A'_\xi(\xi,\eta,\vartheta) = xA(\xi,\eta,\vartheta)a/\xi + 2A(\xi,\eta,\vartheta)/\xi.$$

Наконец, дифференцируя последнее по x, имеем $A = 0$. Противоречие.

Таким образом, задача вложения ФС ГДМ ранга $(3,2)$ в ФС ГДМ ранга $(4,2)$ полностью решена. □

Как и выше, единственность вложения следует из единственности решения соответствующих дифференциальных уравнений.

§ 5. Вложение ФС ГДМ ранга $(4,2)$ в ФС ГДМ ранга $(5,2)$

В данном параграфе рассматривается последняя задача о вложении. Пусть $n = 4$. ФС ГДМ ранга $(4,2)$ ранее найдена в § 4.

Теорема 3. *Не существует вложения ФС ГДМ ранга $(4,2)$ с метрической функцией, локально изотопной функции (4.1), в ФС ГДМ ранга $(5,2)$. В частности, ФС ГДМ ранга $(5,2)$ не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метрическая функция ФС ГДМ ранга $(4,2)$ найдена выше:

$$g = u = \frac{x\xi + \eta}{x + \vartheta}.$$

Метрическую функцию ФС ГДМ ранга $(5,2)$ ищем в виде (2.1), причем вводятся обозначения: $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$, $\xi^3 = \vartheta$, $\xi^4 = \theta$. Выражение (2.7) принимает вид:

$$\frac{x}{x+\vartheta}\Omega^1 + \frac{1}{x+\vartheta}\Omega^2 - \frac{x\xi+\eta}{(x+\vartheta)^2}\Omega^3 + \frac{\xi\vartheta-\eta}{(x+\vartheta)^2}Y = \Omega^4\varkappa(u,\theta), \tag{5.1}$$

которое выполняется тождественно по входящим координатам и поэтому является функциональным уравнением относительно неизвестных $Y(x)$, $\Omega^1(\xi,\eta,\vartheta,\theta)$, $\Omega^2(\xi,\eta,\vartheta,\theta)$, $\Omega^3(\xi,\eta,\vartheta,\theta)$, $\varkappa(u,\theta)$, причем, по лемме 1, $\Omega^4 \neq 0$. Далее делим (5.1) на Ω^4, затем группируем и переобозначаем коэффициенты:

$$\frac{A(\xi,\eta,\vartheta,\theta)Y(x) + x^2B(\xi,\eta,\vartheta,\theta) + xC(\xi,\eta,\vartheta,\theta) + D(\xi,\eta,\vartheta,\theta)}{(x+\vartheta)^2} = \varkappa(u,\theta), \tag{5.2}$$

где $A = (\xi\vartheta - \eta)/\Omega^4 \neq 0$, $B = \Omega^1/\Omega^4$, $C = (\vartheta\Omega^1 + \Omega^2 - \xi\Omega^3)/\Omega^4$, $D = (\vartheta\Omega^2 - \eta\Omega^3)/\Omega^4$. Полученное уравнение дифференцируем по x, по ξ, по η и по ϑ:

$$\frac{AY'(x) + 2xB + C}{(x+\vartheta)^2} - 2\frac{AY(x) + x^2B + xC + D}{(x+\vartheta)^3} = \frac{\xi\vartheta - \eta}{(x+\vartheta)^2}\varkappa'_u, \tag{5.3}$$

$$\frac{A'_\xi Y(x)+x^2B'_\xi+xC'_\xi+D'_\xi}{x+\vartheta}=x\varkappa'_u,$$
$$\frac{A'_\eta Y(x)+x^2B'_\eta+xC'_\eta+D'_\eta}{x+\vartheta}=\varkappa'_u, \tag{5.4}$$
$$\frac{A'_\vartheta Y(x)+x^2B'_\vartheta+xC'_\vartheta+D'_\vartheta}{(x+\vartheta)^2}-2\frac{AY(x)+x^2B+xC+D}{(x+\vartheta)^3}=-\frac{x\xi+\eta}{(x+\vartheta)^2}\varkappa'_u. \tag{5.5}$$

Далее из (5.5) вычитаем (5.3), а потом левую и правую части умножаем на $x+\vartheta$:

$$\frac{A'_\vartheta Y(x)+x^2B'_\vartheta+xC'_\vartheta+D'_\vartheta}{x+\vartheta}-\frac{AY'(x)+2xB+C}{x+\vartheta}=-\xi\varkappa'_u. \tag{5.6}$$

Затем (5.6) складываем с равенством (5.4), умноженным на ξ, после чего левую и правую части умножаем на $x+\vartheta$:

$$A'_\vartheta Y(x)+x^2B'_\vartheta+xC'_\vartheta+D'_\vartheta-AY'(x)-2xB-C+\xi(A'_\eta Y(x)+x^2B'_\eta+xC'_\eta+D'_\eta)=0.$$

Найденное тождество трижды дифференцируем по x, получаем функционально-дифференциальное уравнение:

$$A'_\vartheta Y'''(x)-AY''''(x)+\xi A'_\eta Y'''(x)=0. \tag{5.7}$$

Лемма 4. *В функционально-дифференциальном уравнении* (5.7) $Y''\neq\mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $Y''=2\alpha=\mathrm{const}$. Тогда $Y(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, причем $\alpha,\beta,\gamma=\mathrm{const}$. Найденное подставляем в (5.2) и приводим к общему знаменателю:

$$A(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+x^2B+xC+D=(x+\vartheta)^2\varkappa(u,\theta).$$

Полученное трижды дифференцируем по x:

$$A(2\alpha x+\beta)+2xB+C=2(x+\vartheta)\varkappa+(\xi\vartheta-\eta)\varkappa'_u,$$

$$A2\alpha+2B=2\varkappa+2\frac{\xi\vartheta-\eta}{x+\vartheta}\varkappa'_u+\frac{(\xi\vartheta-\eta)^2}{(x+\vartheta)^2}\varkappa''_u,\quad 0=\frac{(\xi\vartheta-\eta)^3}{(x+\vartheta)^4}\varkappa'''_u.$$

Значит $\varkappa'''_u=0$. Тогда $\varkappa=p(\theta)u^2+q(\theta)u+r(\theta)$. Подставляя найденное в уравнение (2.8), получаем уравнение (4.5), интегрируя которое и переобозначая переменные, имеем метрическую функцию:

$$\overline{f}=\frac{x\overline{\xi}+\overline{\eta}}{x+\overline{\vartheta}}.$$

Очевидно, она вырождена, так как не содержит четвертой координаты второго многообразия N, то есть не задает ФС ГДМ ранга (5,2). □

Итак, в тождестве (5.7) $Y'''(x)\neq 0$, следовательно его можно привести к виду:

$$(A'_\vartheta+\xi A'_\eta)/A=Y''''(x)/Y'''(x).$$

Разделяя переменные, имеем:

$$Y''''(x)/Y'''(x)=a=\mathrm{const}. \tag{5.8}$$

Возможны два случая.

1. Пусть сначала $a=0$. Тогда $Y''''(x)=0$, следовательно $Y=bx^3+cx^2+dx+k$, где $b,c,d,k=\mathrm{const}$, $b\neq 0$. Подставляя найденное в (5.2), будем иметь

$$\frac{A(bx^3+cx^2+dx+k)+x^2B+xC+D}{(x+\vartheta)^2}=\varkappa(u,\theta).$$

Далее приводим к общему знаменателю и трижды дифференцируем по x:

$$A(b3x^2+2cx+d)+2xB+C=2(x+\vartheta)\varkappa+(\xi\vartheta-\eta)\varkappa'_u,$$

$$A(b6x+2c)+2B=2\varkappa+2\frac{\xi\vartheta-\eta}{x+\vartheta}\varkappa'_u+\frac{(\xi\vartheta-\eta)^2}{(x+\vartheta)^2}\varkappa''_u,\quad Ab6=\frac{(\xi\vartheta-\eta)^3}{(x+\vartheta)^4}\varkappa'''_u.$$

Значит

$$6bA(x+\vartheta)^4=(\xi\vartheta-\eta)^3\varkappa'''_u. \tag{5.9}$$

Полученное тождество дифференцируем по переменной x:

$$24bA(x+\vartheta)^3=\frac{(\xi\vartheta-\eta)^4}{(x+\vartheta)^2}\varkappa''''_u. \tag{5.10}$$

Так как $b\neq 0$ и $A\neq 0$, то $\varkappa'''_u\neq 0$ и $\varkappa''''_u\neq 0$, поэтому равенство (5.10) делим на (5.9):

$$4(x+\vartheta)=(\xi\vartheta-\eta)\varkappa''''_u/\varkappa'''_u=(\xi\vartheta-\eta)(\ln\varkappa'''_u)'_u,$$

или

$$(\ln\varkappa'''_u)'_u=4\frac{x+\vartheta}{\xi\vartheta-\eta}. \tag{5.11}$$

Продифференцируем последнее равенство по ξ и по η:

$$\frac{x}{x+\vartheta}(\ln\varkappa'''_u)''_u=-4\frac{(x+\vartheta)\vartheta}{(\xi\vartheta-\eta)^2},\quad \frac{1}{x+\vartheta}(\ln\varkappa'''_u)''_u=-4\frac{x+\vartheta}{(\xi\vartheta-\eta)^2}.$$

Из данной системы, очевидно, следует $(\ln\varkappa'''_u)''_u=0$, тогда $(\ln\varkappa'''_u)'_u=q(\theta)$. Поэтому (5.11) имеет вид: $q(\theta)=4(x+\vartheta)/(\xi\vartheta-\eta)$, что недопустимо. Противоречие.

2. Пусть теперь $a\neq 0$. Тогда для уравнения (5.8) получаем решение $Y=be^{ax}+cx^2+dx+k$, $b\neq 0$. Подставляя найденное в (5.2), будем иметь выражение

$$\frac{A(be^{ax}+cx^2+dx+k)+x^2B+xC+D}{(x+\vartheta)^2}=\varkappa(u,\theta),$$

которое приводим к общему знаменателю и трижды дифференцируем по x:

$$A(bae^{ax}+2cx+d)+2xB+C=2(x+\vartheta)\varkappa+(\xi\vartheta-\eta)\varkappa'_u,$$

$$A(ba^2e^{ax}+2c)+2B=2\varkappa+2\frac{\xi\vartheta-\eta}{x+\vartheta}\varkappa'_u+\frac{(\xi\vartheta-\eta)^2}{(x+\vartheta)^2}\varkappa''_u,\quad Aba^3e^{ax}=\frac{(\xi\vartheta-\eta)^3}{(x+\vartheta)^4}\varkappa'''_u.$$

Значит

$$\overline{A}e^{ax}(x+\vartheta)^4=\varkappa'''_u,\quad \overline{A}=ba^3A/(\xi\vartheta-\eta)^3.$$

Полученное тождество дифференцируем по η и по x:

$$\overline{A}'_\eta e^{ax}(x+\vartheta)^4=\frac{1}{x+\vartheta}\varkappa''''_u,\quad \overline{A}e^{ax}(a(x+\vartheta)^4+4(x+\vartheta)^3)=\frac{\xi\vartheta-\eta}{(x+\vartheta)^2}\varkappa''''_u.$$

Выражая $\varkappa''''_u$ из первого равенства и подставляя во второе, получаем

$$\overline{A}(a(x+\vartheta)+4)=(\xi\vartheta-\eta)\overline{A}'_\eta.$$

Дифференцируя по x, имеем $\overline{A}=0$, поэтому $A=0$. Противоречие. Значит ФС ГДМ ранга $(5,2)$ не существует. $\square$

Заключение

Таким образом, нами решены задачи вложения однометрических: ФС ГДМ ранга $(2,2)$ в ФС ГДМ ранга $(3,2)$, ФС ГДМ ранга $(3,2)$ в ФС ГДМ ранга $(4,2)$, ФС ГДМ ранга $(4,2)$ в ФС ГДМ ранга $(5,2)$. Следует заметить, что изначально известной является ФС ГДМ ранга $(2,2)$, которая впервые была найдена Ю. И. Кулаковым и опубликована в работе [1]. Аналогично можно решить и задачи вложения для остальных ФС ГДМ: $(3,2)$ в $(3,3)$, $(3,3)$ в $(4,3)$, $(4,3)$ в $(5,3)$ и т. д. В результате можно получить полную классификацию всех феноменологически симметричных геометрий на двух множествах.

Ранее эта задача решалась технически сложными функциональными методами [3]. Предложенный в данной статье метод вложения сопряжен с меньшими техническими трудностями, применение которого для ФС ГДМ с большей метричностью, например, двуметрических, триметрических и т. д., по мнению автора, позволит продвинуться в решении классификационной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // Доклады АН СССР. 1970. Т. 193. № 1. С. 72–75.
2. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Доклады АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805.
3. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 5. С. 1056–1058.
4. Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алт. гос. ун-та, 1997. 144 с.
5. Кыров В.А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 4. С. 38–51.
6. Кыров В.А. Функциональные уравнения в симплектической геометрии // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 149–153.
7. Кыров В.А. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2012. Т. 26. № 1. С. 31–38. DOI: 10.14498/vsgtu986
8. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: Изд-во Барн. гос. пед. ун-та, 2003. 204 с.
9. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1968. 226 с.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

Поступила в редакцию 21.06.2016

Кыров Владимир Александрович, к. ф.-м. н., доцент, Горно-Алтайский государственный университет, 649000, Россия, респ. Алтай, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

V. A. Kyrov

Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N,2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N+1,2)$

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 312–323 (in Russian).

Keywords: phenomenologically symmetric geometry of two sets, metric function, differential equation.

MSC2010: 39A05, 39B05

DOI: 10.20537/vm160302

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 3

In this paper, we propose a new method of classification of metric functions of phenomenologically symmetric geometries of two sets. It is called the method of embedding, the essence of which is to find the metric functions of phenomenologically symmetric geometries of two high-rank sets for the given phenomenologically symmetric geometry of two sets having rank less by 1. By the previously known metric function of phenomenologically symmetric geometry of two sets of the rank $(2,2)$ the metric function of phenomenologically symmetric geometry of two sets of the rank $(3,2)$ is found, by the phenomenologically symmetric geometry of two sets of the rank $(3,2)$ we find phenomenologically symmetric geometry of two sets of the rank $(4,2)$. Then it is proved that embedding of phenomenologically symmetric geometry of two sets of the rank $(4,2)$ into the phenomenologically symmetric geometry of two sets of the rank $(5,2)$ is absent. To solve the problem we generate special functional equations which are reduced to well-known differential equations.

REFERENCES

1. Kulakov Yu.I. The one principle underlying classical physics, *Soviet Physics Doklady*, 1971, vol. 15, no. 7, pp. 666–668.
2. Mikhailichenko G.G. Two-dimensional geometry, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1981, vol. 24, no. 2, pp. 346–348.
3. Mikhailichenko G.G. The solution of functional equations in the theory of physical structures, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1972, vol. 13, no. 5, pp. 1377–1380.
4. Mikhailichenko G.G. *Matematicheskii apparat teorii fizicheskikh struktur* (The mathematical apparatus of the theory of physical structures), Gorno-Altaisk: Gorno-Altaisk State University, 1997, 144 p.
5. Kyrov V.A. Functional equations in pseudo-Euclidean geometry, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51 (in Russian).
6. Kyrov V.A. Functional equations in symplectic geometry, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153 (in Russian).
7. Kyrov V.A. On some class of functional-differential equation, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 26, no. 1, pp. 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986
8. Mikhailichenko G.G. *Gruppovaya simmetriya fizicheskikh struktur* (The group symmetry of physical structures), Barnaul: Barnaul State Pedagogical University, 2003, 204 p.
9. Kulakov Yu.I. *Elementy teorii fizicheskikh struktur* (Elements of the theory of physical structures), Novosibirsk: Novosibirsk State University, 1968, 226 p.
10. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* (Differential equations and the calculus of variations), Moscow: Nauka, 1969, 424 p.

Received 21.06.2016

Kyrov Vladimir Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Gorno-Altaisk State University, ul. Lenkina, 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru