

УДК 51–72

© *О. В. Казак, П. К. Галенко, Д. В. Александров*

ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ПОТОКА НА РОСТ ЧИСТОГО И СПЛАВНОГО ДЕНДРИТА¹

В настоящей работе приведена модель анизотропного роста дендритных кристаллов из химически чистой и бинарной жидкости (раствора или расплава) с учетом вынужденной конвекции жидкой фазы. Представлены зависимости скорости роста и радиуса вершины дендрита от переохлаждения жидкости для случаев химически чистого материала и с учетом примесей. Дан сравнительный анализ влияния вынужденной конвекции на кинетику роста дендритов. Для оценки скорости роста и морфологии дендрита используется модель высокоскоростного роста дендритов, которая учитывает вклад конвективного потока и анизотропные свойства границы раздела кристалл–жидкость. В модели также используется гиперболическое уравнение диффузии для описания неравновесного захвата примеси поверхностью кристалла, которое возникает при быстром росте кристаллов.

Ключевые слова: кристаллизация, рост дендритов, численное моделирование, конвекция.

DOI: [10.20537/vm160301](https://doi.org/10.20537/vm160301)

Введение

Проблема роста дендритных кристаллов имеет глубокие научные корни [1] и является предметом интенсивных исследований с использованием экспериментальных, теоретических и расчетных методов [2]. Особое внимание уделяется теоретическому моделированию роста дендритов и сравнению с экспериментальными данными [3–9]. Этот подход дает понимание механизмов, лежащих в основе формирования дендритов на микро- и мезо-пространственных уровнях [10], что позволяет описать широкий спектр данных, полученных в классических методах выращивания кристаллов [1] и современных методах кристаллизации [9].

В настоящей работе для оценки скорости роста и морфологии дендрита используется модель высокоскоростного роста дендритов, которая учитывает вклад конвективного потока [11, 12] и анизотропные свойства границы кристалл–жидкость [13–16]. Также модель использует гиперболическое уравнение диффузии для описания неравновесного захвата примеси поверхностью кристалла, который проявляется при быстром росте кристаллов [17, 18]. Справедливость моделей гиперболического типа была проверена методом молекулярной динамики при моделировании эффекта захвата примеси [19], а также при выводе уравнений высокоскоростных фазовых превращений с использованием фундаментальной процедуры грубозеренного осреднения [20]. В результате модель описывает кинетику роста дендритов в неизотермической бинарной смеси, что делает ее предсказания практически пригодными в экспериментах.

Основное внимание в данной работе уделено модельному описанию медленной и быстрой кинетики роста дендритов в широком диапазоне скоростей роста кристаллов порядка $10^{-5} \dots 10^2$ м/с [21, 22]. Для теоретического описания используется баланс переохлаждений, описанный в работах [17, 18] и критерий отбора устойчивого роста дендритов, полученный недавно в работах [23, 24].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Чтобы определить основные параметры кинетики первичного роста дендрита при произвольном переохлаждении, рассмотрим рост его параболической вершины при отсутствии ло-

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 16–31–06000 мол-а-дк) и конкурса постдоков УрФУ.

кального равновесия [17, 18]. Пренебрегая диффузией в твердой фазе, поле концентрации вещества в жидкой фазе определяется следующим уравнением

$$\tau_D \frac{\partial^2 C_l}{\partial t^2} + \frac{\partial C_l}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) C_l = D_C \nabla^2 C_l, \quad (1.1)$$

где C_l — концентрация растворенного вещества в жидкости, \vec{w} — скорость потока, D_C — коэффициент диффузии растворенного вещества, t — время и τ_D — время релаксации диффузионного потока к стационарному состоянию.

Экспериментальные измерения быстрого роста дендритов показывают, что скорость их роста может быть меньше, сравнимой или даже больше характерной скорости диффузии растворенного вещества в объеме [22], однако скорость их роста остается намного меньше, чем характерная скорость переноса тепла. Поэтому перенос вещества может быть описан гиперболическим уравнением (1.1), которое вводит конечное значение скорости диффузии $V_D = (D_C/\tau_D)^{1/2}$, а изменения температурных полей в фазах описывается параболическим уравнением, которое подразумевает бесконечную скорость переноса тепла. В этой связи изменение температуры жидкой фазы T_l и твердой фазы T_s описывается уравнениями

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) T_l = D_T \nabla^2 T_l, \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = D_T \nabla^2 T_s, \quad (1.2)$$

где D_T — температуропроводность.

На поверхности дендритов выполняется закон сохранения массы и энергии в виде граничных условий

$$\tau_D \frac{\partial}{\partial t} [(C_l - C_s) \vec{v} \cdot \vec{n}] + (C_l - C_s) \vec{v} \cdot \vec{n} + D_C \vec{\nabla} C_l \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.3)$$

$$T_Q \vec{v} \cdot \vec{n} = D_T (\vec{\nabla} T_s - \vec{\nabla} T_l) \cdot \vec{n}, \quad (1.4)$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к границе раздела дендритов; \vec{v} — скорость поверхности; $C_s = k_v C_l$ — концентрация в твердой фазе на поверхности дендрита; k_v — коэффициент распределения растворенного вещества, зависящий от скорости; $T_Q = Q/c_p$, Q — скрытая теплота, поступающая в единицу объема затвердевшего вещества; c_p — теплоемкость (при постоянном давлении).

Температура на поверхности дендритов $T_i = T_l = T_s$ связана с температурой кристаллизации T_0 чистой жидкости, локальной кривизной фронта $2/R$, концентрацией вещества в жидкости C_l и скоростью потока атомов в нормальном направлении роста $(\vec{v} \cdot \vec{n}) = v_n$ в виде

$$T_i = T_0 - m_v C_l - Q c_p^{-1} 2R^{-1} d(\theta) - \tilde{\beta}(\theta) v_n. \quad (1.5)$$

Здесь θ — угол между нормалью к поверхности дендрита и его предпочтительным направлением роста (например направлением кристаллов $\langle 001 \rangle$), $\tilde{\beta}$ — коэффициент анизотропии роста, $d(\theta)$ — анизотропия длины и m_v — зависящий от скорости наклон линии ликвидуса (на кинетической фазовой диаграмме бинарной системы).

Анизотропные свойства границы задаются через анизотропию поверхностной энергии и кинетики присоединения атомов к фазовой границе «кристалл–жидкость». В общем случае анизотропия кристаллических граней зависит от сферических углов, определяющих ориентацию нормали к границе раздела дендрита и направлению роста. Рассматривая случай осесимметричного параболоидального кристалла можно применить усреднение по одному сферическому углу и существенно упростить аналитическую форму анизотропных свойств границы «кристалл–жидкость» [25]. В результате такого усреднения для кубической симметрии кристалла получим, что капиллярная длина $d(\theta)$ и кинетический коэффициент роста $\beta(\theta)$ представляются в виде

$$d(\theta) = d_0 \{1 - \alpha_d \cos [4(\theta - \theta_d)]\}, \quad (1.6)$$

$$\tilde{\beta}(\theta) = \beta_0 Q c_p^{-1} \{1 - \alpha_\beta \cos [4(\theta - \theta_\beta)]\}, \quad (1.7)$$

где d_0 and β_0 — константы капиллярности и кинетического коэффициента роста, $\alpha_d \ll 1$ и $\alpha_\beta \ll \ll 1$ — параметры анизотропии, θ_d и θ_β — углы между направлением роста и предпочтительным направлением роста, которые соответствуют минимумам $d(\theta)$ и $\beta(\theta)$.

В бесконечно удаленной точке от поверхности дендритов примем, что концентрация растворенного вещества, температура и скорость потока в жидкости фиксированы:

$$C_l = C_\infty, \quad T_l = T_\infty, \quad |\vec{w}| = U, \quad (1.8)$$

U — характерная скорость потока вдали от дендрита. Семейство точных решений гидродинамической задачи можно найти в двух случаях, когда поток жидкости является потенциальным, или когда поток принимается типа Осена. В случае вязкого течения примем, что процесс описывается уравнениями переноса типа Осена:

$$U \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_1} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{w}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0, \quad (1.9)$$

где z — направление роста дендритов, ρ_1 — плотность жидкости и ν — кинематическая вязкость. Уравнение (1.9) решается с граничным условием прилипания для скорости жидкости.

Система уравнений (1.1)–(1.9) описывает рост параболического дендрита и расширяет предыдущую постановку Бен Амар и Пелсе [15] на случай анизотропного роста дендрита в локально-неравновесных условиях [26].

§ 2. Основные решения и модель для расчета роста дендрита

Модель роста вершины дендрита была рассмотрена в работах [3,4], результаты которых распространены на случаи быстрого затвердевания [5–8] и для локально неравновесной кристаллизации [17,18]. Основная идея этих работ состоит в комбинации критерия отбора устойчивого роста вершины дендритов с балансом переохлаждения на его поверхности.

2.1. Баланс переохлаждения на вершине дендрита

Общее переохлаждение $\Delta T = T_0 - m_e C_\infty - T_\infty$ представляет собой суммарный баланс переохлаждений на вершине дендрита:

$$\Delta T = \Delta T_T + \Delta T_C + \Delta T_N + \Delta T_R + \Delta T_K, \quad (2.1)$$

где C_∞ и T_∞ — исходная концентрация и температура расплава, которые принимаются постоянными вдали от вершины дендрита; ΔT_T — переохлаждение, необходимое для отвода скрытой теплоты кристаллизации вглубь переохлажденного расплава; ΔT_C — концентрационное переохлаждение, $\Delta T_N = (m_e - m_v) C_\infty$ — переохлаждение, возникающее из-за смещения линии ликвидуса от своего положения равновесия на кинетической фазовой диаграмме кристаллизации; $\Delta T_R = 2d_0 T_Q / R$ — переохлаждение, возникающее на искривленной поверхности (за счет эффекта Гиббса–Томсона); $\Delta T_K = V / \mu_k$ — кинетическое переохлаждение, необходимое для присоединения атомов (частиц) на поверхность кристалла с соответствующим кинетическим коэффициентом μ_k . В результате баланс переохлаждения (2.1) связывает температуру T_i и концентрацию C_i на вершине дендрита (см. уравнение (1.5)) с температурой T_∞ и концентрацией C_∞ в объеме переохлажденного расплава, что показывает полную согласованность с уравнением (1.5) и уравнением (2.1).

Конвекция изменяет тепло- и массоперенос в области растущего дендрита, что изменяет классическое решение Иванцова (полученное только при кондуктивном переносе тепла и/или массы). Тогда тепловое переохлаждение ΔT_T определяется модифицированной функцией Иванцова $Iv^*(P_T, P_f)$ как

$$\Delta T_T = T_Q Iv^*(P_T, P_f). \quad (2.2)$$

Здесь модифицированная функция Иванцова для тепло- и массо-переноса описывается как

$$Iv^*(P_T, P_f) = P_T \exp(P_T + P_f) I_T(P_T, P_f), \quad (2.3)$$

с интегралом

$$I_T(P_T, P_f) = \int_1^\infty \exp \left[2P_f \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - P_0 \eta' \right] \frac{d\eta'}{\eta'},$$

который полностью аналогичен интегралу в равенстве (2.11) [27]. С учетом конвекции концентрационное переохлаждение ΔT_C принимает вид

$$\Delta T_C = \begin{cases} k_v \Delta_v \frac{Iv^*(P_{CD}, P_f)}{1 - (1 - k_v)Iv^*(P_{CD}, P_f)}, & V < V_D, \\ 0, & V \geq V_D, \end{cases} \quad (2.4)$$

где модифицированная функция Иванцова для конвективного переноса массы получена из концентрации на вершине дендрита в равенстве (2.11) как

$$Iv^*(P_{CD}, P_f) = P_{CD} \exp(P_{CD} + P_f D_{TC}) I_C(P_{CD}, P_f), \quad (2.5)$$

а числа Пекле определяются соотношениями (2.10). Неравновесный интервал кристаллизации Δ_v в (2.4) зависит от скорости как

$$\Delta_v = \begin{cases} m_v C_\infty (1 - k_v) / k_v, & V < V_D, \\ 0, & V \geq V_D. \end{cases} \quad (2.6)$$

В случае, если скорость вершины дендрита V больше или равна скорости диффузии растворенного вещества V_D , концентрационное переохлаждение ΔT_C равно нулю, что соответствует переходу к режиму бездиффузионной кристаллизации. Очевидно, что с нулевой скоростью конвекции ($U = 0$), функции (2.2) и (2.5) переходят в стандартные функции Иванцова $Iv(P_T)$ и $Iv(P_{CD})$, соответственно.

Наклон кинетического ликвидуса зависит от скорости V и описывается функцией [28]:

$$m_v = \begin{cases} \frac{m_e}{1 - k_e} \left\{ 1 - k_v + \ln \left(\frac{k_v}{k_e} \right) + (1 - k_v)^2 \frac{V}{V_D} \right\}, & V < V_D, \\ \frac{m_e \ln k_e}{k_e - 1} \equiv \text{const}, & V \geq V_D. \end{cases} \quad (2.7)$$

Неравновесный коэффициент распределения атомов примеси $k_v = C_s / C_i$ зависит от скорости в виде [29]:

$$k_v = \begin{cases} \frac{(1 - V^2/V_D^2)k_e + V/V_{DI}}{(1 - V^2/V_D^2)[1 - (1 - k_e)C_i] + V/V_{DI}}, & V < V_D, \\ 1, & V \geq V_D. \end{cases} \quad (2.8)$$

По сравнению с предыдущими моделями [3–8], настоящая модель включает два дополнительных кинетических параметра V_{DI} и V_D в функции k_v (см. уравнение (2.8)), что, следовательно, включается в функции ΔT_C , Δ_v и m_v в балансе переохлаждения (2.1) [30]. В локально-равновесном пределе $V_D \rightarrow \infty$ уравнения (2.1)–(2.8) преобразуются в соответствующие уравнения моделей [6, 8].

Условие (2.4) является кинетическим условием перехода к бездиффузионному затвердеванию: при $V \geq V_D$ концентрационное переохлаждение отсутствует, неравновесный интервал затвердевания становится равным нулю благодаря полному слиянию линий ликвидуса и солидуса на кинетической фазовой диаграмме сплава [17, 18]. Таким образом, скорость $V = V_D$ принимается за начало: (i) полного захвата атомов примеси (растворенного вещества), $k_v = 1$ в уравнении (2.8); (ii) кристаллизации с начальной (номинальной) концентрацией C_∞ в жидкой и твердой фазе всего кристаллизующегося объема сплава; (iii) перехода от диффузионно-лимитируемому к термически контролируемому росту дендрита с наступлением бездиффузионной кристаллизации.

Таблица 1. Материальные параметры Ni-0.7 ат. % В

Параметр	Значение	Ссылка
Номинальная концентрация, C_∞	0.7 at. %	[17]
Температуропроводность, D_T	$7.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	[17]
Коэффициент диффузии, D_C	$2.4 \times 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$	[17]
Коэффициент распределения, k_e	0.032	[17]
Наклон ликвидуса, m_e	$-20.1 \text{ К}/\text{ат. \%}$	[17]
Адиабатическая температура, $T_Q = Q/c_p$	472.65 K	[17]
Капиллярная постоянная, d_0	$7.23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	[17]
Химическая капиллярная постоянная, d_{0CD}	$1.26 \cdot 10^{-8} \text{ м}$	настоящая работа
Кинетический коэффициент роста, μ_k	0.25 м/с/К	[17]
Кинетический параметр, β_0	$8.4 \cdot 10^{-3} \text{ с}/\text{м}$	настоящая работа
Анизотропия поверхностной энергии, α_d	0.229	настоящая работа
Скорость диффузии в объеме, V_D	18.9 м/с	[17]
Скорость диффузии на поверхности, V_{DI}	11.5 м/с	[17]
Постоянная отбора, σ_0	0.3215	настоящая работа
Константа гидродинамической устойчивости, b	0.01	настоящая работа
Кинематическая вязкость, ν	$3.7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$	настоящая работа

2.2. Критерий устойчивого роста вершины дендрита

Для выбора устойчивого роста вершины дендрита, имеющей радиус R , постоянную скорость $V = v_n$ и концентрацию в жидкой фазе $C_l = C_i$ введем критерий, который найден комбинацией решений анизотропного роста дендрита в присутствии конвективных потоков [31] и локального неравновесного роста дендрита при высокоскоростной кристаллизации без конвекции [23].

Примем, что окончательный критерий отбора σ^* должен иметь скейлинг $\sigma^* \propto \beta^n$ с тем же показателем n и тем же общим видом [25], если принять во внимание анизотропию для трехмерного или двумерного пространств [23]. Существование тех же самых размерностей для двумерного и трехмерного пространств было показано в работах [32, 33]. Разница состоит только в постоянной пропорциональности скейлингов $\sigma^* \propto \beta^n$. Таким образом, в качестве критерия отбора σ^* мы будем использовать случай простейшей анизотропии, заданной выражениями (1.6) и (1.7) в предположении, что окончательное масштабирование может применяться к трехмерному случаю роста дендрита. В результате критерий отбора роста дендрита в неизотермической бинарной смеси с учетом конвекции может быть выражен в виде [24]:

$$\sigma^* = \frac{2d_0D_T}{R^2V} \equiv \frac{d_0V}{2D_T P_T^2} = \frac{\sigma_0 \alpha_d^{7/4}}{1 + b \left(\bar{\alpha} / \alpha_d^{3/4} \right)^{11/14}} \left\{ \frac{1}{\left[1 + a_1 \sqrt{\alpha_d} P_T \Lambda_T \right]^2} + \frac{2(1 - k_v) m_v C_i D_{TC}}{T_Q \left[1 + a_2 \sqrt{\alpha_d} P_{CD}^* \Lambda_C \right]^2} \left[1 + \chi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - W^2}} \right) \right]^2 \right\}, \quad (2.9)$$

где все функции и параметры приведены в Таблице 1. Термическое число Пекле P_T , химическое число Пекле P_{CD} , гидродинамическое число Пекле P_f и число Рейнольдса Re определяются как

$$P_T = \frac{RV}{2D_T}, \quad P_{CD}^* = \frac{P_{CD}}{\sqrt{1 - W^2}}, \quad P_{CD} = \frac{RV}{2D_C}, \quad P_f = \frac{RU}{2D_T}, \quad Re = \frac{RU}{\nu}. \quad (2.10)$$

Они определяют функциональные зависимости от скоростей V и U :

$$a(Re) = \frac{\exp(-Re/2)}{E_1(Re/2)}, \quad W = \frac{V}{V_D}, \quad \bar{\alpha} = (1 + 2D_{TC}) \frac{a(Re)Ud_0}{4RVP},$$

$$P = 1 + \frac{2m_v C_i (1 - k_v) D_{TC}}{T_Q}, \quad P_0 = P_f + P_T,$$

и концентрационные функциональные зависимости:

$$C_i = \frac{C_\infty}{1 - (1 - k_v)P_{CD}I_C \exp(P_0 D_{TC})}, \quad I_C = \int_1^\infty \exp \left[2P_f D_{TC} \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - P_0 D_{TC} \eta' \right] \frac{d\eta'}{\eta'},$$

$$g(\eta) = \frac{\sqrt{\eta} E_1(\operatorname{Re} \eta/2)}{2 E_1(\operatorname{Re} \eta/2)} + \frac{\exp(-\operatorname{Re} \eta/2) - \exp(-\operatorname{Re} \eta/2)}{\sqrt{\eta} \operatorname{Re} E_1(\operatorname{Re} \eta/2)},$$

$$E_1(q) = \int_q^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du, \quad (2.11)$$

где введены параметры

$$D_{TC} = \frac{D_T}{D_C}, \quad a_1 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \left(\frac{16\sigma_0}{7} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{56} \right)^{3/8},$$

$$\chi^2 = \frac{4}{7} \left(\frac{3}{56} \right)^{3/4} \alpha_d^{-3/4}, \quad \Lambda_T = 1 + \frac{\delta_0 D_T \beta_0}{d_0}, \quad \Lambda_C = 1 + \frac{\delta_0 D_C \beta_0}{d_{0CD}},$$

$$\delta_0 = 20 \sqrt{\frac{7}{24}} \left(\frac{56}{3} \right)^{3/8}, \quad d_{0CD} = \frac{T_Q d_0}{2m_e C_i (1 - k_e)}.$$

Отметим, что анизотропия кинетики роста α_β не входит в критерии отбора (2.9). Это связано с тем, что члены с α_β содержат члены более высокого порядка (и, следовательно, с меньшими значениями), чем значения, принимаемые во внимание при линейном анализе неустойчивости, проведенные в [31].

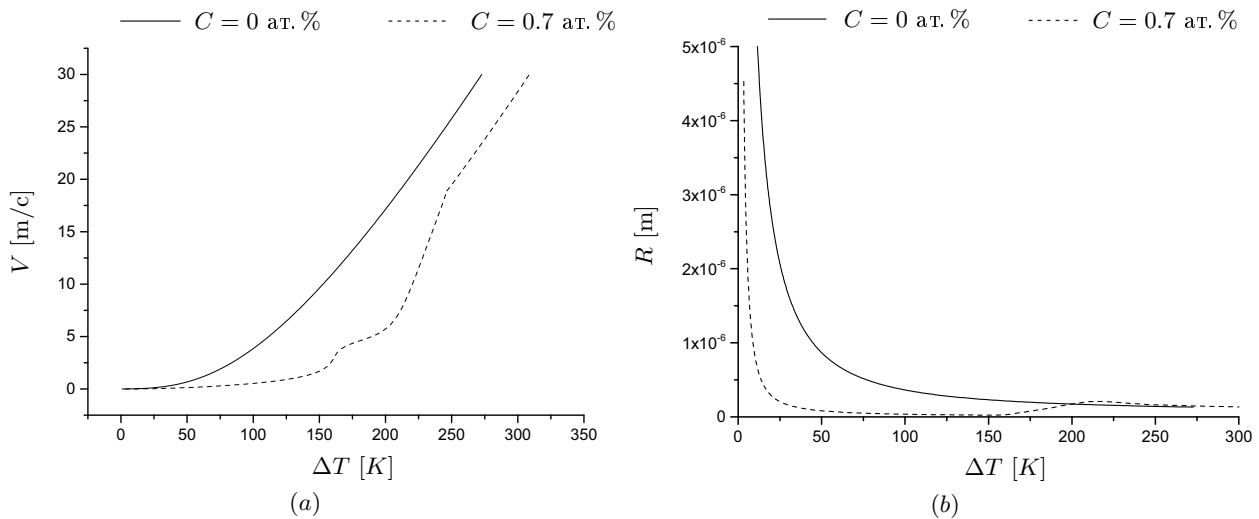


Рис. 1. Скорость роста V (a) и радиус вершины R (b) сплавного (т. е. химически двухкомпонентного, бинарного, $C = 0.7\%$) дендрита и чистого (т. е. химически однокомпонентного, $C = 0\%$) дендрита как функция переохлаждения ΔT .

Выражение (2.9) содержит ранее известные критерии. Во-первых, при отсутствии конвекции ($U = 0$, $\bar{\alpha} = 0$) и концентрации растворенного вещества ($C_i = 0$) критерий (2.9) переходит в известное выражение $\sigma^* = \sigma_0 \alpha_d^{7/4}$, полученное в работах Лангера и Пелсе с соавторами [13, 14] в пределе малых чисел Пекле ($P_T \rightarrow 0$). Во-вторых, при малых скоростях роста ($P_T \ll 1$, $P_{CD} \ll 1$, $W \ll 1$) и при $U = 0$ критерий (2.9) сводится к критерию Бен Амар и Пелсе [15]. В-третьих, в случае чистого вещества ($C_i = 0$) и при малых скоростях роста ($P_T \ll 1$ и $W \ll 1$) уравнение (2.9) совпадает с критерием Буассу и Пелсе [34]. В-четвертых, в пределе малых чисел Пекле ($P_T \rightarrow 0$, $P_{CD} \rightarrow 0$) в рамках параболического механизма массопереноса ($W = 0$) критерий (2.9) соответствует полученному ранее критерию, выведенному в работе [27]. В-пятых, в случае неподвижной жидкости ($U = 0$), локально-равновесного затвердевания с

произвольным числом Пекле ($W = 0$) и при отсутствии кинетики роста ($\beta_0 = 0$) вышеупомянутый критерий сводится к выражению, полученному Мюллером–Крумбхааром с соавторами в работе [35]. В-шестых, при тех же предположениях этот критерий переходит в критерий, полученный в работе [26] для термо-концентрационной задачи с произвольным числом Пекле. В-седьмых, в случае однокомпонентного расплава ($C_i = 0$) в пределе малых чисел Пекле ($P_T \ll 1$ и $P_{CD} \ll 1$) без конвекции ($U = 0$) и $W = 0$ критерий (2.9) приводит к критерию Бренера [16]. Таким образом, критерий отбора (2.9) обобщает известные ранее критерии по термическому и диффузионному ограничению роста дендритов.

§ 3. Результаты моделирования и обсуждение

Уравнения (2.1)–(2.8) описывают (I) ограниченный диффузией рост (т. е. концентрационный рост дендритов при малых переохлаждениях), (II) ограниченный диффузией и переносом тепла рост (т. е. концентрационный и термический рост дендритов в промежуточном диапазоне переохлаждений) и (III) чисто термический рост дендритов при наиболее высоких переохлаждениях. Описание роста дендритов во всем диапазоне переохлаждений стало возможным за счет введения отклонения от локального равновесия на границе раздела, а также в объеме системы.

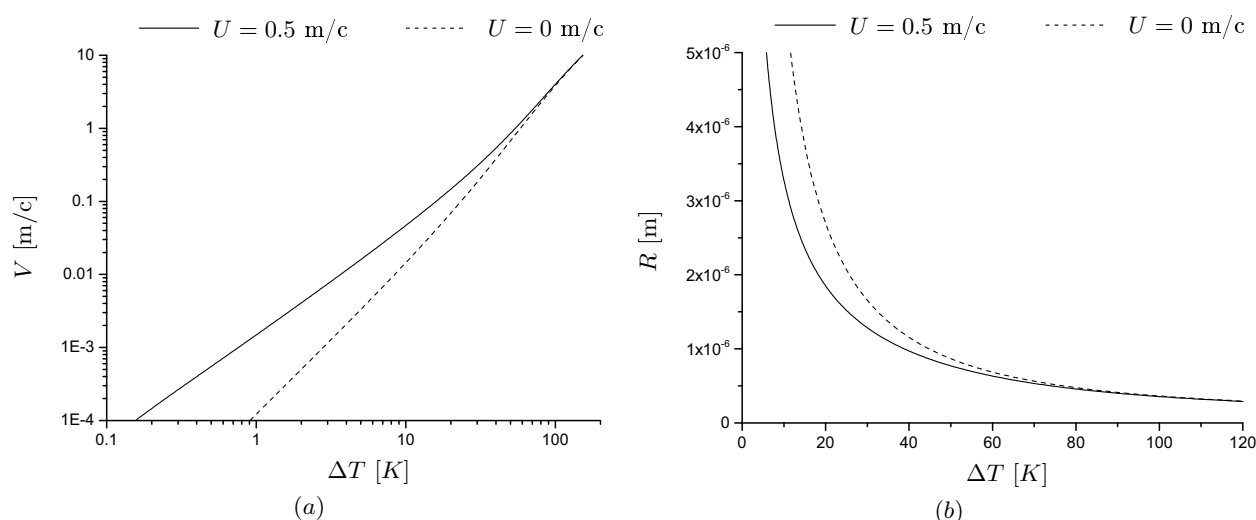


Рис. 2. Скорость роста V (a) и радиус вершины R (b) дендрита никеля как функции переохлаждения ΔT . Показано изменение кинетики дендритного роста в случае встречного потока расплава со скоростью $U = 0.5$ м/с по сравнению с ростом дендрита в неподвижном расплаве $U = 0$ м/с.

Для расчета роста дендритов используются параметры Ni–0.7 ат. % В из Таблицы 1. Капиллярная постоянная d_{0CD} была рассчитана как $d_{0CD} = \frac{d_0 T_Q k_e}{m_e (1 - k_e) C_\infty}$, а кинетический параметр β_0 был рассчитан как $\beta_0 = 1/(\mu_k T_Q)$.

На рис. 1 представлены скорость роста вершины дендрита V и радиус R как функции переохлаждения для двух случаев чистого Ni и сплава Ni–В. В случае сплава первый режим соответствует низкой скорости роста при $\Delta T = 100$ (К), когда рост дендрита ограничен диффузией и обусловлен концентрацией. Скорость роста вершины дендрита постепенно увеличивается и радиус вершины дендрита уменьшается до минимума. Вторым интервалом представляет переходный режим, в котором рост дендрита ограничен как диффузией растворенного вещества, так и переносом тепла. В начале этого интервала дендрит достигает скорости абсолютной химической стабильности: скорость вершины достигает «плато», а радиус вершины дендрита начинает увеличиваться. В конце этого переходного режима скорость резко возрастает и радиус вершины дендрита приближается к своему максимальному значению. Такое поведение

является результатом резкого уменьшения толщины пограничного слоя растворенного вещества на границе вершины дендрита вследствие интенсивного неравновесного захвата примеси. Интервал заканчивается в критической точке переохлаждения $\Delta T = 150$ (К). Здесь концентрация растворенного вещества становится равной исходной, и рост дендрита начинает контролироваться только переносом тепла. Третий режим начинается при высоких переохлаждениях выше $\Delta T = 250$ (К). При этом наблюдается резкое изменение наклона кривой скорости роста дендрита. Это объясняется бездиффузионным ростом дендритов с полным захватом примеси. Таким образом, соотношение скорость роста от температуры переохлаждения имеют характерный вид, характеризующий три режима роста дендритов: ограниченный диффузией рост, переходный режим и термически контролируемый режим. Как показано на рис. 1 для сплава, скорость дендритов монотонно возрастает во всем диапазоне переохлаждений, но имеет точку излома при $V = V_D$, т. е. при скорости дендрита равной скорости диффузии растворенного вещества в объеме жидкости. Эта критическая точка согласуется с прекращением химического вклада в баланс переохлаждений $\Delta T = \Delta T^*(V_D)$, $\Delta T_C = 0$ в балансе (2.1), как результат решения (2.4). Таким образом, при $V \geq V_D$ сплавной дендрит растет без перераспределения растворенного вещества как химически однокомпонентный.

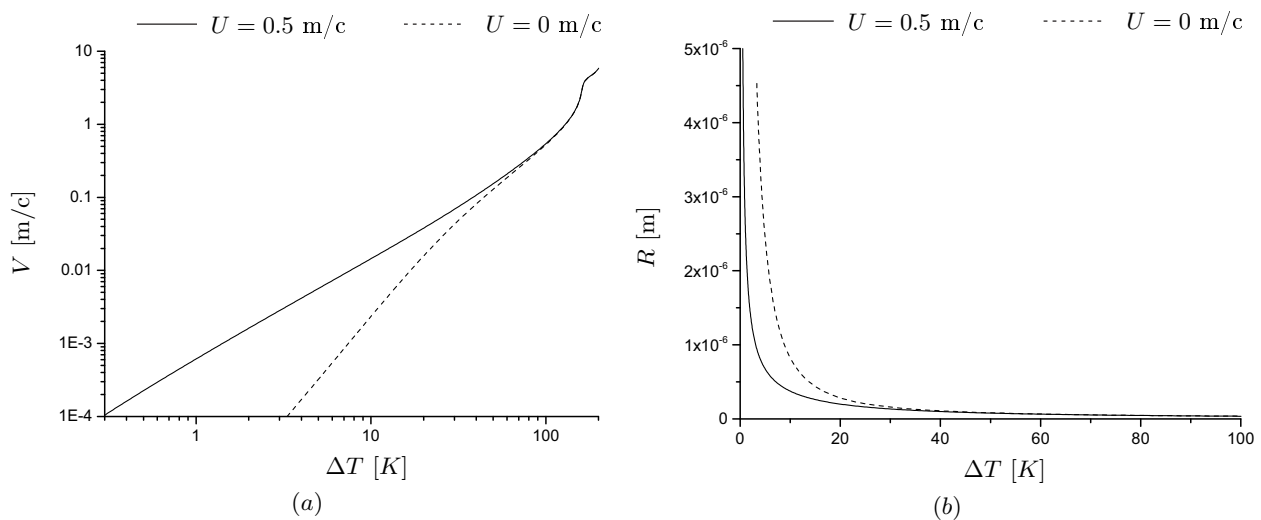


Рис. 3. Скорость роста V (a) и радиус вершины R (b) дендрита в расплаве Ni–0.7 ат. % В как функции переохлаждения ΔT . Показано изменение кинетики дендритного роста в случае встречного потока расплава со скоростью $U = 0.5$ м/с по сравнению с ростом дендрита в неподвижном расплаве $U = 0$ м/с.

На рис. 2 представлено влияние конвекции на процесс роста дендрита никеля при скорости набегающего потока $U = 0.5$ м/с. График скорости роста вершины дендрита на рис. 2, a представлен в логарифмическом масштабе, а график радиуса вершины дендрита рис. 2, b — в линейном масштабе. Видно, что набегающий на дендрит поток ускоряет рост и утоняет дендрит. Это происходит вследствие лучшего теплоотвода конвекцией теплоты, выделяющейся на поверхности дендрита при кристаллизации. Далее, на рис. 3 представлено влияние конвекции на сплавной дендрит, растущий из переохлажденного расплава Ni–0.7 ат. % В. На графике зависимости скорости роста дендрита (рис. 3, a), представленного в логарифмическом масштабе, прослеживаются три характерных участка с разными преобладающими механизмами роста дендрита, описанные выше для рис. 1. Скорость роста дендрита по-прежнему выше для Ni–0.7 ат. % В при наличии конвекции, а радиус вершины дендрита уменьшается при наличии конвекции, что свидетельствует о его утонении. Это также происходит благодаря более интенсивному теплоотводу при наличии конвекции, чем в неподвижном расплаве. Сравнивая рисунки 2 и 3, следует, однако, отметить различное количественное влияние конвекции на рост дендрита Ni и сплавного дендрита Ni–0.7 ат. % В. Это происходит из-за различных пространственных масштабов действия конвекции на тепловой и концентрационный дендриты.

Заключение

В работе представлена модель анизотропного роста дендритов с учетом вынужденной конвекции. Проведен расчет скорости роста и радиуса вершины дендрита в бинарном и чистом сплаве в неизотермических условиях. При малых скоростях процесс роста дендрита ограничен диффузией растворенного вещества. При умеренных скоростях роста процесс определяется диффузией и тепловым полем. При высоких скоростях роста дендрита процесс определяется термическими условиями переноса. С введением конечной скорости диффузии V_D в модель, скорость роста дендрита и радиус вершины имеют критическое переохлаждение, выше которого сплавной дендрит растет без перераспределения растворенного вещества, как чистый (химически однокомпонентный) кристалл. Расчеты показывают, что модель предсказывает увеличение скорости роста дендритов при наличии конвекции, т. е. при существовании набегающего потока расплава на дендрит. В этом смысле модель способна уменьшить разногласие между теоретическими предсказаниями и экспериментальными данными при малых скоростях роста, где ранее наблюдалось систематическое отклонение экспериментальных данных от теории [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flemings M.C. Solidification processing. New York: McGraw-Hill, 1974.
2. Chernov A.A. Modern crystallography III. Crystal growth. Berlin–Heidelberg: Springer, 1984. DOI: [10.1007/978-3-642-81835-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81835-6)
3. Kurz W., Fisher D.J. Dendrite growth at the limit of stability: tip radius and spacing // Acta Metallurgica. 1981. Vol. 29. Issue 1. P. 11–20. DOI: [10.1016/0001-6160\(81\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(81)90082-1)
4. Lipton J., Glicksman M.E., Kurz W. Dendritic growth into undercooled alloy metals // Materials Science and Engineering. 1984. Vol. 65. Issue 1. P. 57–63. DOI: [10.1016/0025-5416\(84\)90199-X](https://doi.org/10.1016/0025-5416(84)90199-X)
5. Boettinger W.J., Coriell S.R. Microstructure formation in rapidly solidified alloys // Science and Technology of the Undercooled Melt / Sahm P.R., Jones H., Adam C.M. Springer, 1986. P. 81–109. DOI: [10.1007/978-94-009-4456-5_5](https://doi.org/10.1007/978-94-009-4456-5_5)
6. Lipton J., Kurz W., Trivedi R. Rapid dendrite growth in undercooled alloys // Acta Metallurgica. 1987. Vol. 35. Issue 4. P. 957–964. DOI: [10.1016/0001-6160\(87\)90174-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(87)90174-X)
7. Trivedi R., Lipton J., Kurz W. Effect of growth rate dependent partition coefficient on the dendritic growth in undercooled melts // Acta Metallurgica. 1987. Vol. 35. Issue 4. P. 965–970. DOI: [10.1016/0001-6160\(87\)90175-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(87)90175-1)
8. Boettinger W.J., Coriell S.R., Trivedi R. Application of dendritic growth theory to the interpretation of rapid solidification microstructures // Rapid Solidification Processing: Principles and Technologies IV / Mehrabian R., Parrish P.A. Claitor, 1988.
9. Herlach D.M., Matson D.M. (Eds.) Solidification of containerless undercooled melts. Wiley, 2012. DOI: [10.1002/9783527647903](https://doi.org/10.1002/9783527647903)
10. Hoyt J.J., Asta M., Karma A. Atomistic and continuum modeling of dendritic solidification // Materials Science and Engineering: R: Reports. 2003. Vol. 41. Issue 6. P. 121–163. DOI: [10.1016/S0927-796X\(03\)00036-6](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(03)00036-6)
11. Funke O., Phanikumar G., Galenko P.K., Chernova L., Reutzel S., Kolbe M., Herlach D.M. Dendrite growth velocity in levitated undercooled nickel melts // Journal of Crystal Growth. 2006. Vol. 297. Issue 1. P. 211–222. DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2006.08.045](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2006.08.045)
12. Binder S., Galenko P.K., Herlach D.M. Faceting of a rough solid–liquid interface of a metal induced by forced convection // Philosophical Magazine Letters. 2013. Vol. 93. Issue 10. P. 608–617. DOI: [10.1080/09500839.2013.830201](https://doi.org/10.1080/09500839.2013.830201)
13. Langer J.S., Hong D.C. Solvability conditions for dendritic growth in the boundary-layer model with capillary anisotropy // Physical Review A. 1986. Vol. 34. Issue 2. P. 1462–1471. DOI: [10.1103/PhysRevA.34.1462](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.34.1462)
14. Pelcé P., Bensimon D. Theory of dendrite dynamics // Nuclear Physics B – Proceedings Supplements. 1987. Vol. 2. P. 259–270. DOI: [10.1016/0920-5632\(87\)90022-3](https://doi.org/10.1016/0920-5632(87)90022-3)
15. Ben Amar M., Pelcé P. Impurity effect on dendritic growth // Physical Review A. 1989. Vol. 39. Issue 8. P. 4263–4269. DOI: [10.1103/PhysRevA.39.4263](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.4263)
16. Brenner E.A. Effects of surface energy and kinetics on the growth of needle-like dendrites // Journal of Crystal Growth. 1990. Vol. 99. Issues 1–4. P. 165–170. DOI: [10.1016/0022-0248\(90\)90505-F](https://doi.org/10.1016/0022-0248(90)90505-F)

17. Galenko P.K., Danilov D.A. Local nonequilibrium effect on rapid dendritic growth in a binary alloy melt // *Physics Letters A*. 1997. Vol. 235. Issue 3. P. 271–280. DOI: [10.1016/S0375-9601\(97\)00562-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00562-8)
18. Galenko P.K., Danilov D.A. Model for free dendritic alloy growth under interfacial and bulk phase nonequilibrium conditions // *Journal of Crystal Growth*. 1999. Vol. 197. Issue 4. P. 992–1002. DOI: [10.1016/S0022-0248\(98\)00977-4](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(98)00977-4)
19. Yang Y., Humadi H., Buta D., Laird B.B., Sun D., Hoyt J.J., Asta M. Atomistic simulations of nonequilibrium crystal-growth kinetics from alloy melts // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. Issue 2. 025505. 4 p. DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.025505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.025505)
20. Jou D., Galenko P. Coarse graining for the phase-field model of fast phase transitions // *Physical Review E*. 2013. Vol. 88. Issue 4. 042151. 8 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.88.042151](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.042151)
21. Herlach D.M. Non-equilibrium solidification of undercooled metallic metals // *Materials Science and Engineering: R: Reports*. 1994. Vol. 12. Issues 4–5. P. 177–272. DOI: [10.1016/0927-796X\(94\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0927-796X(94)90011-6)
22. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable solids from undercooled melts*. Amsterdam: Elsevier, 2007.
23. Alexandrov D.V., Danilov D.A., Galenko P.K. Selection criterion of a stable dendrite growth in rapid solidification // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016. Vol. 101. P. 789–799. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.085](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.085)
24. Galenko P.K., Danilov D.A., Reuther K., Alexandrov D.V., Rettenmayr M., Herlach D.M. Effect of convective flow on stable dendritic growth in rapid solidification of a binary alloy // *Journal of Crystal Growth*. 2016. DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2016.07.042](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.07.042)
25. Barbieri A., Langer J.S. Predictions of dendritic growth rates in the linearized solvability theory // *Physical Review A*. 1989. Vol. 39. Issue 10. P. 5314–5325. DOI: [10.1103/PhysRevA.39.5314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.5314)
26. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Peclet numbers with convection // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. 062403. 5 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.87.062403](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062403)
27. Александров Д.В., Галенко П.К. Дендритный рост с вынужденной конвекцией: методы анализа и экспериментальные тесты // *Успехи физических наук*. 2014. Т. 184. Вып. 8. С. 833–850. DOI: [10.3367/UFNr.0184.201408b.0833](https://doi.org/10.3367/UFNr.0184.201408b.0833)
28. Galenko P. Solute trapping and diffusionless solidification in a binary system // *Physical Review E*. 2007. Vol. 76. Issue 3. 031606. 9 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.76.031606](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.031606)
29. Galenko P. Extended thermodynamical analysis of a motion of the solid-liquid interface in a rapidly solidifying alloy // *Physical Review B*. 2002. Vol. 65. Issue 14. 144103. 11 p. DOI: [10.1103/PhysRevB.65.144103](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.144103)
30. Hartmann H., Galenko P.K., Holland-Moritz D., Kolbe M., Herlach D.M., Shuleshova O. Nonequilibrium solidification in undercooled Ti₄₅Al₅₅ melts // *Journal of Applied Physics*. 2008. Vol. 103. Issue 7. 073509. DOI: [10.1063/1.2903920](https://doi.org/10.1063/1.2903920)
31. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2015. Vol. 17. P. 19149–19161. DOI: [10.1039/C5CP03018H](https://doi.org/10.1039/C5CP03018H)
32. Ben Amar M. Theory of needle-crystal // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1988. Vol. 31. Issue 3. P. 409–423. DOI: [10.1016/0167-2789\(88\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90006-1)
33. Brener E., Melnikov V.I. Velocity selection and instability spectrum in 3D dendritic growth // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1995. Vol. 80. No. 2. P. 341–345. http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_080_02_0341.pdf
34. Bouissou P., Pelcé P. Effect of a forced flow on dendritic growth // *Physical Review A*. 1989. Vol. 40. Issue 11. P. 6673–6680. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.6673](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.6673)
35. Müller-Krumbhaar H., Abel T., Brener E., Hartmann M., Eissfeldt N., Temkin D. Growth-morphologies in solidification and hydrodynamics // *JSME International Journal Series B*. 2002. Vol. 45. No. 1. P. 129–132. DOI: [10.1299/jsmeb.45.129](https://doi.org/10.1299/jsmeb.45.129)

Поступила в редакцию 15.05.2016

Казак Олег Викторович, к. т. н., научный сотрудник, отдел математической физики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: olegkazak@yandex.ru

Галенко Пётр Константинович, д. ф.-м. н., профессор, физико-астрономический факультет, Университет Фридриха Шиллера, 07743, Германия, г. Йена, Лёбдерграбен штрассе, 32.

E-mail: Peter.Galenko@uni-jena.de

Александров Дмитрий Валерьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, лаборатория многомасштабного математического моделирования, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
E-mail: dmitri.alexandrov@urfu.ru

O. V. Kazak, P. K. Galenko, D. V. Alexandrov

Influence of convective flow on the growth of pure and alloyed dendrite

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 299–311 (in Russian).

Keywords: crystallization, dendrite growth, numerical simulation, convection.

MSC2010: 76D07, 76M45

DOI: [10.20537/vm160301](https://doi.org/10.20537/vm160301)

The paper presents the model of anisotropic growth of dendritic crystallization of chemically pure and binary liquid (solution or melt) based on forced convection of the liquid phase. The dependencies of the growth rate and the radius of the top of a dendrite from under-cooling fluid in cases of a chemically pure material and alloys are presented. A comparative analysis of the influence of forced convection on the dendrite growth kinetics is carried out. Evaluation of growth rate and morphology of dendrite by high-speed crystal growth model was done. The contribution of convective flow and the anisotropic properties of the liquid-crystal boundary were taking into account. The model is also used hyperbolic diffusion equation to describe the non-equilibrium impurity capture by crystal surface, which occurs under the rapid crystals growth.

REFERENCES

1. Flemings M.C. *Solidification processing*, New York: McGraw-Hill, 1974.
2. Chernov A.A. *Modern crystallography III. Crystal growth*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1984.
DOI: [10.1007/978-3-642-81835-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81835-6)
3. Kurz W., Fisher D.J. Dendrite growth at the limit of stability: tip radius and spacing, *Acta Metallurgica*, 1981, vol. 29, issue 1, pp. 11–20. DOI: [10.1016/0001-6160\(81\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(81)90082-1)
4. Lipton J., Glicksman M.E., Kurz W. Dendritic growth into undercooled alloy metals, *Materials Science and Engineering*, 1984, vol. 65, issue 1, pp. 57–63. DOI: [10.1016/0025-5416\(84\)90199-X](https://doi.org/10.1016/0025-5416(84)90199-X)
5. Boettinger W.J., Coriell S.R. Microstructure formation in rapidly solidified alloys, *Science and Technology of the Undercooled Melt*, Eds.: Sahm P.R., Jones H., Adam C.M. Springer, 1986, pp. 81–109.
DOI: [10.1007/978-94-009-4456-5_5](https://doi.org/10.1007/978-94-009-4456-5_5)
6. Lipton J., Kurz W., Trivedi R. Rapid dendrite growth in undercooled alloys, *Acta Metallurgica*, 1987, vol. 35, issue 4, pp. 957–964. DOI: [10.1016/0001-6160\(87\)90174-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(87)90174-X)
7. Trivedi R., Lipton J., Kurz W. Effect of growth rate dependent partition coefficient on the dendritic growth in undercooled melts, *Acta Metallurgica*, 1987, vol. 35, issue 4, pp. 965–970.
DOI: [10.1016/0001-6160\(87\)90175-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(87)90175-1)
8. Boettinger W.J., Coriell S.R., Trivedi R. Application of dendritic growth theory to the interpretation of rapid solidification microstructures, *Rapid Solidification Processing: Principles and Technologies IV*, Eds.: Mehrabian R., Parrish P.A. Claitor, 1988.
9. Herlach D.M., Matson D.M. (Eds.) *Solidification of containerless undercooled melts*, Wiley, 2012.
DOI: [10.1002/9783527647903](https://doi.org/10.1002/9783527647903)
10. Hoyt J.J., Asta M., Karma A. Atomistic and continuum modeling of dendritic solidification, *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 2003, vol. 41, issue 6, pp. 121–163.
DOI: [10.1016/S0927-796X\(03\)00036-6](https://doi.org/10.1016/S0927-796X(03)00036-6)
11. Funke O., Phanikumar G., Galenko P.K., Chernova L., Reutzel S., Kolbe M., Herlach D.M. Dendrite growth velocity in levitated undercooled nickel melts, *Journal of Crystal Growth*, 2006, vol. 297, issue 1, pp. 211–222. DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2006.08.045](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2006.08.045)
12. Binder S., Galenko P.K., Herlach D.M. Faceting of a rough solid–liquid interface of a metal induced by forced convection, *Philosophical Magazine Letters*, 2013, vol. 93, issue 10, pp. 608–617.
DOI: [10.1080/09500839.2013.830201](https://doi.org/10.1080/09500839.2013.830201)
13. Langer J.S., Hong D.C. Solvability conditions for dendritic growth in the boundary-layer model with capillary anisotropy, *Physical Review A*, 1986, vol. 34, issue 2, pp. 1462–1471.
DOI: [10.1103/PhysRevA.34.1462](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.34.1462)

14. Pelcé P., Bensimon D. Theory of dendrite dynamics, *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements*, 1987, vol. 2, pp. 259–270. DOI: [10.1016/0920-5632\(87\)90022-3](https://doi.org/10.1016/0920-5632(87)90022-3)
15. Ben Amar M., Pelcé P. Impurity effect on dendritic growth, *Physical Review A*, 1989, vol. 39, issue 8, pp. 4263–4269. DOI: [10.1103/PhysRevA.39.4263](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.4263)
16. Brener E.A. Effects of surface energy and kinetics on the growth of needle-like dendrites, *Journal of Crystal Growth*, 1990, vol. 99, issues 1–4, pp. 165–170. DOI: [10.1016/0022-0248\(90\)90505-F](https://doi.org/10.1016/0022-0248(90)90505-F)
17. Galenko P.K., Danilov D.A. Local nonequilibrium effect on rapid dendritic growth in a binary alloy melt, *Physics Letters A*, 1997, vol. 235, issue 3, pp. 271–280. DOI: [10.1016/S0375-9601\(97\)00562-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00562-8)
18. Galenko P.K., Danilov D.A. Model for free dendritic alloy growth under interfacial and bulk phase nonequilibrium conditions, *Journal of Crystal Growth*, 1999, vol. 197, issue 4, pp. 992–1002. DOI: [10.1016/S0022-0248\(98\)00977-4](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(98)00977-4)
19. Yang Y., Humadi H., Buta D., Laird B.B., Sun D., Hoyt J.J., Asta M. Atomistic simulations of nonequilibrium crystal-growth kinetics from alloy melts, *Physical Review Letters*, 2011, vol. 107, issue 2, 025505, 4 p. DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.025505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.025505)
20. Jou D., Galenko P. Coarse graining for the phase-field model of fast phase transitions, *Physical Review E*, 2013, vol. 88, issue 4, 042151, 8 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.88.042151](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.042151)
21. Herlach D.M. Non-equilibrium solidification of undercooled metallic melts, *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 1994, vol. 12, issues 4–5, pp. 177–272. DOI: [10.1016/0927-796X\(94\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0927-796X(94)90011-6)
22. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable solids from undercooled melts*, Amsterdam: Elsevier, 2007.
23. Alexandrov D.V., Danilov D.A., Galenko P.K. Selection criterion of a stable dendrite growth in rapid solidification, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 101, pp. 789–799. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.085](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.085)
24. Galenko P.K., Danilov D.A., Reuther K., Alexandrov D.V., Rettenmayr M., Herlach D.M. Effect of convective flow on stable dendritic growth in rapid solidification of a binary alloy, *Journal of Crystal Growth*, 2016. DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2016.07.042](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.07.042)
25. Barbieri A., Langer J.S. Predictions of dendritic growth rates in the linearized solvability theory, *Physical Review A*, 1989, vol. 39, issue 10, pp. 5314–5325. DOI: [10.1103/PhysRevA.39.5314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.5314)
26. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Peclet numbers with convection, *Physical Review E*, 2013, vol. 87, 062403, 5 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.87.062403](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062403)
27. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Dendrite growth under forced convection: analysis methods and experimental tests, *Physics-Uspokhi*, 2014, vol. 57, issue 8, pp. 771–786. DOI: [10.3367/UFNe.0184.201408b.0833](https://doi.org/10.3367/UFNe.0184.201408b.0833)
28. Galenko P. Solute trapping and diffusionless solidification in a binary system, *Physical Review E*, 2007, vol. 76, issue 3, 031606, 9 p. DOI: [10.1103/PhysRevE.76.031606](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.031606)
29. Galenko P. Extended thermodynamical analysis of a motion of the solid-liquid interface in a rapidly solidifying alloy, *Physical Review B*, 2002, vol. 65, issue 14, 144103, 11 p. DOI: [10.1103/PhysRevB.65.144103](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.144103)
30. Hartmann H., Galenko P.K., Holland-Moritz D., Kolbe M., Herlach D.M., Shuleshova O. Nonequilibrium solidification in undercooled Ti₄₅Al₅₅ melts, *Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 103, issue 7, 073509. DOI: [10.1063/1.2903920](https://doi.org/10.1063/1.2903920)
31. Alexandrov D.V., Galenko P.K. Thermo-solutal and kinetic regimes of an anisotropic dendrite growing under forced convective flow, *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2015, vol. 17, pp. 19149–19161. DOI: [10.1039/C5CP03018H](https://doi.org/10.1039/C5CP03018H)
32. Ben Amar M. Theory of needle-crystal, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1988, vol. 31, issue 3, pp. 409–423. DOI: [10.1016/0167-2789\(88\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90006-1)
33. Brener E., Melnikov V.I. Velocity selection and instability spectrum in 3D dendritic growth, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1995, vol. 80, no. 2, pp. 341–345. http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_080_02_0341.pdf
34. Bouissou P., Pelcé P. Effect of a forced flow on dendritic growth, *Physical Review A*, 1989, vol. 40, issue 11, pp. 6673–6680. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.6673](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.6673)
35. Müller-Krumbhaar H., Abel T., Brener E., Hartmann M., Eissfeldt N., Temkin D. Growth-morphologies in solidification and hydrodynamics, *JSME International Journal Series B*, 2002, vol. 45, no. 1, pp. 129–132. DOI: [10.1299/jsmeb.45.129](https://doi.org/10.1299/jsmeb.45.129)

МАТЕМАТИКА

2016. Т. 26. Вып. 3

Kazak Oleg Viktorovich, Candidate of Engineering, Researcher, Department of Mathematical Physics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: olegkazak@yandex.ru

Galenko Peter Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Physics and Astronomy, Friedrich Schiller University, Jena, D-07743, Germany.

E-mail: Peter.Galenko@uni-jena.de

Alexandrov Dmitri Valer'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Laboratory of Multi-Scale Mathematical Modeling, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: dmitri.alexandrov@urfu.ru