

УДК 517.928

© Г. А. Трутнев

МОДЕЛЬ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА В МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье рассматриваются вопросы моделирования твердотельного волнового гироскопа. Приводятся общие сведения о работе данного прибора. Описываются параметры, которые определяют класс точности прибора. Рассматриваются причины ухудшения точности прибора. Описываются особенности применения разных математических моделей твердотельного волнового гироскопа. В статье предлагается рассматривать модель в виде парциального осциллятора. Исходная модель содержит «быстроменяющиеся» компоненты. Работа твердотельного волнового гироскопа основана на измерении соотношения амплитуд колебаний различных секторов резонатора. Для имитационного моделирования систем удобнее исключить из исходной модели высокочастотные изменения и оставить зависимость между медленноменяющимися амплитудами. Для приведения модели к более удобному виду обосновывается возможность применения теоремы Боголюбова. Проводятся общие выкладки для полученной модели в «медленных» переменных. Описываются важные аспекты применения модели и ее ограничения. Полученная модель подходит для целей имитационного моделирования гироскопических систем.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, математическое моделирование, теорема Боголюбова.

Твердотельный волновой гироскоп (ТВГ) — измерительный прибор, работа которого основана на эффекте инертности стоячих волн [4, 7]. Точность прибора во многом зависит от качества изготовления резонатора. В процессе изготовления ТВГ неизбежно возникают технологические погрешности, приводящие к снижению точностных характеристик прибора. Увеличение точности ТВГ остается актуальной задачей. Повышение точности прибора достигается за счет совершенствования технологий изготовления, использования систем коррекции и управления.

Система управления ТВГ компенсирует рассеивание энергии колебаний, управляет осями жесткости, угловым положением волны в резонаторе. При наличии разночастотности в резонаторе есть два устойчивых положения, в которых при свободных колебаниях в отсутствие внешних угловых скоростей стоячая волна может существовать длительное время. Резонансные частоты стоячих волн в этих положениях не равны, и их разность характеризует разночастотность. Во всех положениях между двумя устойчивыми положениями стоячая волна представляет собой сумму двух стоячих волн с разными частотами, в результате чего с течением времени исходная стоячая волна «разваливается». В случае вынужденных колебаний разные секторы резонатора перемещаются с одной частотой и разными фазами относительно силового воздействия. Система управления использует значения фаз колебаний и формирует необходимые силы, которые изменяют частотные или фазовые характеристики резонатора.

Кроме разночастотности дефекты резонатора приводят к появлению разнодобротности. Разнодобротность — это зависимость времени затухания колебаний от угловой ориентации стоячей волны. Оси с максимальной и минимальной добротностью называются осями вязкости. Разнодобротность одна из причин появления дрейфа — собственной скорости ухода стоячей волны в резонаторе ТВГ. Дрейф определяет класс точности ТВГ.

Для разработки систем управления используются математические и имитационные модели. Вопросы моделирования ТВГ рассматриваются во многих книгах и научных статьях [1, 4, 7, 8]. Математическая модель резонатора может строиться на основе физической модели тонкой оболочки [4, 7]. Для упрощения модели часто рассматривают только вторую форму колебаний оболочки, тогда из системы дифференциальных уравнений в частных производных получается система обыкновенных дифференциальных уравнений (парциальный осциллятор). Также мо-

дель ТВГ в виде обыкновенных дифференциальных уравнений получается при рассмотрении физической модели ТВГ в виде механической системы [1, 8].

Модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений во многих случаях более эффективны и предпочтительны для исследования систем управления, большинство моделей ТВГ описывают высокочастотные изменения резонатора [1, 3–8, 10], тогда как для измерения угла поворота с помощью ТВГ требуются медленноменяющиеся амплитуды колебаний. Наличие быстроменяющихся переменных в модели накладывает большие требования на точность используемых численных методов. Для целей имитационного моделирования ТВГ целесообразно использовать уравнения, описывающие медленноменяющиеся фазовые переменные волны в резонаторе, а быстроменяющиеся переменные исключить [2, 11]. В данной статье делается упор на детальное описание использования метода осреднения быстрых переменных однородных дифференциальных уравнений и получение модели в медленных переменных. Рассмотрим следующую модель ТВГ в виде парциального осциллятора [11]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 4K\Omega\dot{y} + \left(\frac{2}{\tau} + \Delta_\tau \cos(4\theta_\tau)\right)\dot{x} + \Delta_\tau \sin(4\theta_\tau)\dot{y} + (\omega^2 - \Delta_\omega \cos(4\theta_\omega))x - \Delta_\omega \sin(4\theta_\omega)y = f_x, \\ \ddot{y} + 4K\Omega\dot{x} + \left(\frac{2}{\tau} - \Delta_\tau \cos(4\theta_\tau)\right)\dot{y} + \Delta_\tau \sin(4\theta_\tau)\dot{x} + (\omega^2 + \Delta_\omega \cos(4\theta_\omega))y - \Delta_\omega \sin(4\theta_\omega)x = f_y, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — колебания, соответствующие косинусной и синусной составляющей второй формы нормальных колебаний резонатора (рис. 1);

$f_x = f_x(t)$ и $f_y = f_y(t)$ — управляющие воздействия, ограниченные кусочно-непрерывные функции, с конечным числом точек разрыва, в данной модели считаем их непрерывными справа:

$$-1 \leq f_x \leq 1, \quad -1 \leq f_y \leq 1, \quad f_x(t) = f_x(t+0), \quad f_y(t) = f_y(t+0) \quad \forall t \in [0, \infty);$$

K — масштабный коэффициент (для резонатора в виде полусферической оболочки ≈ 0.3);

$\omega_1 = \omega_0 + \delta_\omega \geq \omega_2 = \omega_0 - \delta_\omega$ — частоты в осях максимальной и минимальной жесткости соответственно, $0 \leq \delta_\omega < 0.5$ Гц, $\omega_0 > 2\pi \cdot 1000$ рад;

$\tau_1 = \tau_0 - \delta_\tau \leq \tau_2 = \tau_0 + \delta_\tau$ — постоянные времена затухания в осях минимальной и максимальной добротности, $0 \leq \delta_\tau < 10$ с, $\tau_0 > 100$ с. С точностью до второго порядка малости величины дефекта можно считать

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0 - \delta_\tau} \approx \frac{1}{\tau_0} + \frac{\delta_\tau}{\tau_0^2}, \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0 + \delta_\tau} \approx \frac{1}{\tau_0} - \frac{\delta_\tau}{\tau_0^2};$$

$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} = \frac{(\omega_0 - \delta_\omega)^2 + (\omega_0 + \delta_\omega)^2}{2} = \omega_0^2 + \delta_\omega^2 \approx \omega_0^2$ — квадрат резонансной частоты между осями жесткости (с точностью до второго порядка малости величины разночастотности);

$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tau_0 - \delta_\tau} + \frac{1}{\tau_0 + \delta_\tau} \right] = \frac{\tau_0}{\tau_0^2 - \delta_\tau^2} \approx \frac{1}{\tau_0}$ — время затухания между осями добротности (с точностью до второго порядка малости величины разноточности);

$\Omega = \Omega(t)$ — внешняя угловая скорость, $\max_t |\Omega(t)| < 2\pi \cdot 10$ рад/с, $\max_t |\dot{\Omega}(t)| < 2\pi \cdot 10$ рад/с²,

которая является решением дифференциального уравнения $\dot{\Omega} = h(\Omega)$, $\Omega(0) = \Omega_0$, где $h \in C^1(-20\pi, 20\pi)$ — непрерывная и дифференцируемая функция;

θ_τ — угол до оси наименьшей добротности (ось наибольшей вязкости);

θ_ω — угол до оси наименьшей жесткости (тяжелая ось);

$\Delta_\tau = \left[\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right] = \left[\frac{1}{\tau_0 - \delta_\tau} - \frac{1}{\tau_0 + \delta_\tau} \right] = \frac{2\delta_\tau}{\tau_0 + \delta_\tau} \approx \frac{2\delta_\tau}{\tau_0^2}$ — полуразность декрементов затухания

в оси минимальной и максимальной добротности;

$\Delta_\omega = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} = \frac{(\omega_0 + \delta_\omega)^2 - (\omega_0 - \delta_\omega)^2}{2} = 2\omega_0\delta_\omega$ — полуразность квадратов частот в оси минимальной и максимальной жесткости.

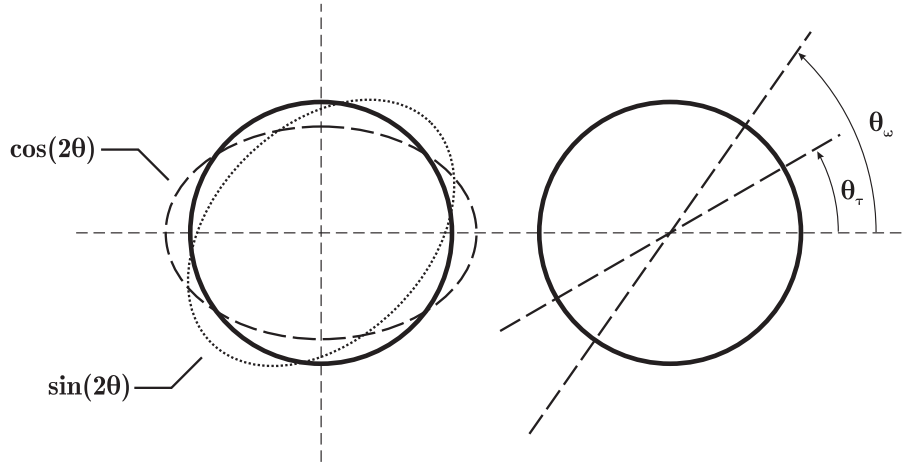


Рис. 1. Формы колебаний, оси жесткости и вязкости

Учитывая класс управляющих сигналов, система (1) является уравнением Каратеодори и удовлетворяет условиям Каратеодори. Поэтому система (1) имеет абсолютно непрерывное и единственное решение $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Для упрощения исследования исходной модели введем безразмерное время, сделав замену $\tilde{t} = t\omega$ (далее для удобства тильду будем опускать, помня о сделанной замене). В таком виде 2π единиц модельного времени равны одному периоду колебаний резонатора. После подстановки и сокращения получим

$$\begin{cases} \ddot{x} - 4K \frac{\Omega}{\omega} \dot{y} + \left(\frac{2}{\omega\tau} + \frac{\Delta_\tau}{\omega} \cos(4\theta_\tau) \right) \dot{x} + \frac{\Delta_\tau}{\omega} \sin(4\theta_\tau) \dot{y} + \left(1 - \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \cos(4\theta_\omega) \right) x - \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \sin(4\theta_\omega) y = \frac{f_x}{\omega^2}, \\ \ddot{y} + 4K \frac{\Omega}{\omega} \dot{x} + \left(\frac{2}{\omega\tau} - \frac{\Delta_\tau}{\omega} \cos(4\theta_\tau) \right) \dot{y} + \frac{\Delta_\tau}{\omega} \sin(4\theta_\tau) \dot{x} + \left(1 + \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \cos(4\theta_\omega) \right) y - \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \sin(4\theta_\omega) x = \frac{f_y}{\omega^2}. \end{cases}$$

Полученная система дифференциальных уравнений является линейной неоднородной и нестационарной. Подробнее остановимся на значениях коэффициентов системы. Угловая скорость вращения Ω не превосходит нескольких тысяч градусов в секунду $\Omega_{\max} = \max_t \{\Omega(t)\}$, резонансная частота составляет несколько килогерц ($\omega > 2\pi \cdot 1000$), поэтому

$$\frac{\Omega_{\max}}{\omega} \leq \frac{20\pi}{2000\pi} \ll 1.$$

При изготовлении резонаторов используется материал с высокой добротностью $Q = \omega\tau/2$:

$$\frac{2}{\omega\tau} = \frac{1}{Q} \leq \frac{2}{2000\pi \cdot 100} \ll 1.$$

Характеристика дефекта по добротности:

$$\frac{\Delta_\tau}{\omega} \leq \frac{\delta_\tau}{(\tau^2 - \delta_\tau^2)\omega} \leq \frac{1}{2000\pi} \ll 1.$$

Характеристика дефекта по частоте:

$$\frac{\Delta_\omega}{\omega^2} = \frac{2\delta_\omega}{\omega} \leq \frac{1}{2000\pi} \ll 1.$$

Коэффициент при управляющих воздействиях:

$$\frac{1}{\omega^2} \leq \frac{1}{(2000\pi)^2} \ll 1.$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений характеризуют угловую скорость вращения, рассеивание энергии и погрешности изготовления. Рассмотренные коэффициенты являются малыми параметрами. Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \max \left\{ \frac{\Omega_{\max}}{\omega}, \frac{2}{\omega\tau}, \frac{\Delta_\tau}{\omega} \frac{\Delta_\omega}{\omega^2}, \frac{1}{\omega^2} \right\}.$$

Далее запишем систему дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = -\varepsilon(c_{11}\dot{x} + c_{12}\dot{y} + k_{11}x + k_{12}y - w\dot{y} - u), \\ \ddot{y} + y = -\varepsilon(c_{21}\dot{x} + c_{22}\dot{y} + k_{21}x + k_{22}y + w\dot{x} - v), \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{\omega\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\tau}{\omega} \cos(4\theta_\tau), & c_{12} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\tau}{\omega} \sin(4\theta_\tau), \\ c_{21} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\tau}{\omega} \sin(4\theta_\tau), & c_{22} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{\omega\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\tau}{\omega} \cos(4\theta_\tau), \\ k_{11} &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \cos(4\theta_\omega), & k_{12} &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \sin(4\theta_\omega), \\ k_{21} &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \sin(4\theta_\omega), & k_{22} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta_\omega}{\omega^2} \cos(4\theta_\omega), \\ u = u(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{f_x(t)}{\omega^2}, & v = v(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{f_y(t)}{\omega^2}, & w = w(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{4K\Omega(t)}{\omega}. \end{aligned}$$

Все коэффициенты ограничены: $|c_{ij}| \leq 2$, $|k_{ij}| \leq 2$ для всех $i, j = 1, 2$, $|w| \leq 4K$, $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Параметр ε является малым. В системах с малым параметром процессы протекают в двух масштабах: «быстрое» и «медленное» время. Переменная t характеризует «быстрое» время, за время около 2π быстроменяющаяся часть системы пройдет один период колебаний, медленноменяющиеся функции за это время практически не изменятся. Существенные изменения медленноменяющихся функций заметны в масштабе εt . Выражение εt характеризует «медленное» время. Для получения медленноменяющейся компоненты необходимо привести систему ДУ к стандартному виду, затем по теореме Боголюбова можно провести осреднение по «быстрому» времени [4]:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon G_0(t, z, \varepsilon), & z(0) &= z_0, \\ \dot{X} &= \varepsilon G(X, \varepsilon), & X(0) &= z_0, & G &= \frac{1}{T} \int_0^T G_0(t, z, \varepsilon) dt, \end{aligned}$$

где T — период колебаний $G_0(t, z, \varepsilon)$ по t . Чтобы провести осреднение, достаточно, чтобы $G_0(t, z, \varepsilon)$ была:

- кусочно-непрерывна, множество точек разрыва не имеет точек сгущения;
- периодична по $t \in [0, \infty)$;
- ограничена $\forall t \in [0, \infty)$, $\forall z \in Z$, Z — область изменения переменной z ;
- дифференцируема $\forall z \in Z$.

Запишем систему ДУ (2) в стандартном виде:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3, \\ \dot{z}_2 = z_4, \\ \dot{z}_3 = -z_1 - \varepsilon(c_{11}z_3 + c_{12}z_4 + k_{11}z_1 + k_{12}z_2 - wz_4 - u), \\ \dot{z}_4 = -z_2 - \varepsilon(c_{21}z_3 + c_{22}z_4 + k_{21}z_1 + k_{22}z_2 + wz_3 - v), \end{cases} \quad (3)$$

где $z_1(t) = x(t)$, $z_2(t) = y(t)$, $z_3(t) = \dot{x}(t)$, $z_4(t) = \dot{y}(t)$, $z(0) = z_0 = (x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))^T$. В матричном виде она имеет вид:

$$\dot{z}(t) = [A - \varepsilon B - \varepsilon W(t)] \cdot z(t) + \varepsilon U(t), \quad z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))^T, \quad z \in R^4, \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{11} & k_{12} & c_{11} & c_{12} \\ k_{21} & k_{22} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -w(t) \\ 0 & 0 & w(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Если рассматривать случай идеального невращающегося резонатора без трения, то есть $\varepsilon = 0$, то общее решение записывается как

$$\begin{cases} z_1(t) = X_c \cos(t) + X_s \sin(t), \\ z_2(t) = Y_c \cos(t) + Y_s \sin(t), \\ z_3(t) = -X_c \sin(t) + X_s \cos(t), \\ z_4(t) = -Y_c \sin(t) + Y_s \cos(t), \end{cases} \quad (5)$$

где X_c, X_s, Y_c, Y_s — произвольные постоянные интегрирования. Для исследования системы (3) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Общее решение системы (3) запишем в виде

$$\begin{cases} z_1 = X_c \cos(\nu t) + X_s \sin(\nu t), \\ z_2 = Y_c \cos(\nu t) + Y_s \sin(\nu t), \\ z_3 = -\nu X_c \sin(\nu t) + \nu X_s \cos(\nu t), \\ z_4 = -\nu Y_c \sin(\nu t) + \nu Y_s \cos(\nu t). \end{cases}$$

Или в матричном виде:

$$z(t) = C(t) \cdot X(t), \quad X(t) = (X_c, X_s, Y_c, Y_s)^T, \quad (6)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(\nu t) & \sin(\nu t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \\ -\nu \sin(\nu t) & \nu \cos(\nu t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sin(\nu t) & \nu \cos(\nu t) \end{pmatrix},$$

где ν — управляемый параметр, близкий к единице, характеризует степень расстройки частоты от резонанса. Частота вынужденных колебаний выбирается близкой к резонансу и меняется в тех же пределах, что и частоты резонатора, т. е. $\nu \in \frac{\omega \pm \delta_\omega}{\omega}$, или, по-другому, $|1 - \nu| \leq \frac{\delta_\omega}{\omega^2} \leq \varepsilon$. С точностью до обозначений последнее представление решения (6) соответствует общему решению (5).

Управляющие воздействия выберем в следующем виде:

$$\begin{cases} f_x(t) = F_{X_c} \cos(\nu t) + F_{X_s} \sin(\nu t), \\ f_y(t) = F_{Y_c} \cos(\nu t) + F_{Y_s} \sin(\nu t), \\ u(t) = \frac{1}{\varepsilon \omega^2} F_{X_c} \cos(\nu t) + \frac{1}{\varepsilon \omega^2} F_{X_s} \sin(\nu t), \\ v(t) = \frac{1}{\varepsilon \omega^2} F_{Y_c} \cos(\nu t) + \frac{1}{\varepsilon \omega^2} F_{Y_s} \sin(\nu t). \end{cases}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= D(t) \cdot F(t), \\
 F(t) &= (F_{X_c}(t), F_{X_s}(t), F_{Y_c}(t), F_{Y_s}(t))^T, \\
 D(t) &= \frac{1}{\varepsilon\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\nu t) & \sin(\nu t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $F_{X_c}, F_{X_s}, F_{Y_c}, F_{Y_s}$ — кусочно-непрерывные ограниченные функции. Управление будем выбирать в таком виде, чтобы управляющие коэффициенты зависели от фазовых переменных и явно не зависели от времени t . Управление зависит от медленноменяющихся переменных, характеризующих конфигурацию волны:

$$\begin{cases} F_{X_c} = F_{X_c}(X_c(t), X_s(t), Y_c(t), Y_s(t)), \\ F_{X_s} = F_{X_s}(X_c(t), X_s(t), Y_c(t), Y_s(t)), \\ F_{Y_c} = F_{Y_c}(X_c(t), X_s(t), Y_c(t), Y_s(t)), \\ F_{Y_s} = F_{Y_s}(X_c(t), X_s(t), Y_c(t), Y_s(t)). \end{cases}$$

Подставляя общее решение (6) и управление (7) в систему (4), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{C}X + C\dot{X} &= (AC - \varepsilon BC - \varepsilon WC)X + \varepsilon DF, \\
 \dot{X} &= (C^{-1}AC - \varepsilon C^{-1}BC - \varepsilon C^{-1}WC - C^{-1}\dot{C})X + \varepsilon C^{-1}DF, \\
 C^{-1}(t) &= \frac{1}{\nu} \begin{pmatrix} \nu \cos(\nu t) & 0 & -\sin(\nu t) & 0 \\ \nu \sin(\nu t) & 0 & \cos(\nu t) & 0 \\ 0 & \nu \cos(\nu t) & 0 & -\sin(\nu t) \\ 0 & \nu \sin(\nu t) & 0 & \cos(\nu t) \end{pmatrix}, \quad \dot{C}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\nu^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 C^{-1}AC - C^{-1}\dot{C} &= C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C + C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \nu^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} C(t) = \\
 &= -(1 - \nu^2)C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C.
 \end{aligned}$$

Обозначим $(1 - \nu)(1 + \nu) = \varepsilon\mu(1 + \nu)$, при этом $|\mu| \leq 1$. Обозначим

$$E = -\mu(1 + \nu) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда систему (3) можно представить в виде

$$\dot{X} = \varepsilon(C^{-1}(E - B - W)CX + C^{-1}DF).$$

В общем виде:

$$\dot{X} = \varepsilon G(t, X, F(X), \Omega, \varepsilon), \quad X = (X_c, X_s, Y_c, Y_s)^T, \quad F = (F_{X_c}, F_{X_s}, F_{Y_c}, F_{Y_s})^T.$$

Далее добавим к фазовым переменным угловую скорость Ω . С учетом введенных ранее замен запишем

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\omega} h(\Omega), \quad \frac{1}{\omega} < \frac{\Omega_{\max}}{\omega} \leq \varepsilon, \quad \dot{\Omega} = \varepsilon \tilde{h}(\Omega), \quad \tilde{h}(\Omega) = a \cdot h(\Omega), \quad |a| < 1, \quad |h(\Omega)| \leq \dot{\Omega}_{\max}.$$

Дополним дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon G_0(t, X, F(X), \Omega, \varepsilon), \\ \dot{\Omega} = \varepsilon \tilde{h}(\Omega). \end{cases}$$

Обозначим $\bar{X} = (X_c, X_s, Y_c, Y_s, \Omega)^T$, и далее можно записать

$$\dot{\bar{X}} = \varepsilon G_0(t, \bar{X}, F(\bar{X}), \varepsilon).$$

Используя теорему Боголюбова [4], можно осреднить систему по явно входящему времени t :

$$\dot{\bar{X}} = \varepsilon G(\bar{X}, F(\bar{X}), \varepsilon), \quad G(\bar{X}, F(\bar{X}), \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T G_0(t, \bar{X}, F(\bar{X}), \varepsilon) dt.$$

Под $T = 2\pi/\nu$ понимается период колебаний.

Опустим из-за громоздкости промежуточные выкладки и, вернувшись к первоначальным обозначениям, запишем систему ДУ в «медленных» переменных:

$$\dot{X} = (G_\tau + G_{\delta\tau} + G_\Omega + G_{\Delta\omega} + G_\nu) \cdot X + G_f \cdot F, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} G_\tau &= -\frac{1}{\omega\tau} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & G_{\delta\tau} &= -\frac{\Delta_\tau}{2\omega} \begin{pmatrix} \cos 4\theta_\tau & 0 & \sin 4\theta_\tau & 0 \\ 0 & \cos 4\theta_\tau & 0 & \sin 4\theta_\tau \\ \sin 4\theta_\tau & 0 & -\cos 4\theta_\tau & 0 \\ 0 & \sin 4\theta_\tau & 0 & -\cos 4\theta_\tau \end{pmatrix}, \\ G_\Omega &= \frac{2K\Omega}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_{\Delta\omega} &= \frac{\Delta_\omega}{2\nu\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & -\cos 4\theta_\omega & 0 & -\sin 4\theta_\omega \\ \cos 4\theta_\omega & 0 & \sin 4\theta_\omega & 0 \\ 0 & -\sin 4\theta_\omega & 0 & \cos 4\theta_\omega \\ \sin 4\theta_\omega & 0 & -\cos 4\theta_\omega & 0 \end{pmatrix}, \\ G_\nu &= \frac{1-\nu^2}{2\nu} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & G_f &= \frac{1}{2\nu\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Метод осреднения не является методом приближенного решения, это приведение системы дифференциальных уравнений к более удобному виду для исследования. Данная модель (8) является линейной относительно решения и нелинейной относительно управления по параметру ν ; также модель является нестационарной вследствие наличия медленноменяющейся функции Ω .

Отметим некоторые ограничения модели. Параметры разночастотности и разнодобротности ТВГ могут меняться с изменением температуры окружающей среды. Если внешняя температура окружающей среды постоянная, характеристики ТВГ могут меняться при нагревании резонатора из-за внутреннего трения. Данные эффекты не учитываются в описанном выше подходе. Модель может быть расширена, если ввести в исходное уравнение в быстрых переменных зависимость параметров разночастотности и разнодобротности от времени, зависимости от времени являются медленноменяющимися. Для получения модели в медленных переменных с переменными значениями разночастотности и разнодобротности необходимо проделать операции, аналогичные вышеописанным.

В данной работе рассматривались вопросы моделирования работы ТВГ в «медленных» переменных. Полученная модель является нелинейной и нестационарной, но не содержит быстроменяющихся компонентов. Модель может использоваться для создания имитационной модели работы системы управления ТВГ, настройки параметров обратной связи, исследования влияния шумов и задержек на точность прибора, разработки и тестирования самонастраивающихся контуров управления и компенсации. Также модель может быть использована для разработки алгоритмов оценки параметров резонатора по данным с реального прибора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонштедт А.В., Кузьмин С.В., Мачехин П.К. Восемиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. № 1. С. 135–214.
2. Бонштедт А.В., Зайцев В.А., Мачехин П.К., Тонков Е.Л. Оптимизация управления твердотельным волновым гироскопом // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. №1. С. 189–214.
3. Жбанов Ю.К. Контур управления амплитудой в волновом твердотельном гироскопе с автоматической компенсацией разнородности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 17–22.
4. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
5. Журавлёв В.Ф. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 5. С. 12–24.
6. Журавлёв В.Ф. О дрейфе волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) на вращающемся основании при управлении квадратурой в режимах «быстрого» и «медленного» времени // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 13–18.
7. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа: Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 168 с.
8. Трутнев Г.А. Шестнадцатиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 2. С. 135–146.
9. Финогенко И.А. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. 82 с.
10. Юрин В.Е. Устойчивость колебаний волнового твердотельного гироскопа // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 20–31.
11. Loveday P.W., Rogers C.A. The influence of control system design on the performance of vibratory gyroscopes // Journal of Sound and Vibration. 2002. Vol. 255. № 3. P. 417–432.

Поступила в редакцию 30.07.2015

Трутнев Георгий Александрович, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: TrutnevGA@gmail.com

G. A. Trutnev

The model of hemispherical resonator gyroscope in terms of slow variables

Keywords: hemispherical resonator gyroscope, mathematical modeling, theorem of Bogolyubov.

MSC: 34A25

The paper refers to the issues of designing a hemispherical resonator gyroscope. General information on the operation of this kind of device is given. Parameters that determine the accuracy class of the device are described. Causes of degradation of the device accuracy are examined. The features of application of different mathematical models of hemispherical resonator gyroscope are described. The author proposes to examine a model as a partial oscillator. An initial model contains “fast-changing” components. Operation of hemispherical resonator gyroscope is based on measuring the correlation between amplitudes of vibrations in different sectors of resonator. For the simulation modeling of systems it is more convenient to exclude high-frequency changes from the initial model, and to leave dependence between slowly changing amplitudes. In order to bring a model to a more suitable form, it is possible to apply the theorem of Bogolyubov. General calculations for constructing a model in “slow” variables are established. Important aspects of its application and restrictions are described. Obtained model is appropriate for simulation modeling of gyro systems.

REFERENCES

1. Bonshtedt A.V., Kuz'min S.V., Machehin P.K. Eight-point model of the hemispherical resonator gyro, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2007, no. 1, pp. 135–214 (in Russian).

2. Bonstedt A.V., Zaitsev V.A., Machehin P.K., Tonkov E.L. Optimization of control by hardbody wave gyroscope, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2005, no. 1, pp. 189–214 (in Russian).
3. Zhibanov J.K. Amplitude control contour in a hemispherical resonator gyro with automatic compensation for difference in Q-factors, *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 328–332.
4. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop* (Hemispherical resonator gyro), Moscow: Nauka, 1985, 125 p.
5. Zhuravlev V.F. The electric model of hemispherical resonator gyro, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 1995, no. 5, pp. 12–24 (in Russian).
6. Zhuravlev V.F. On the drift of a hemispherical resonator gyro on a rotating base during the quadrature control in fast-time and slow-time modes, *Mechanics of Solids*, 2003, no. 3, pp. 8–11.
7. Matveev V.A., Lipatnikov V.I. Alekhin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* (Designing a hemispherical resonator gyro), Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 1997, 168 p.
8. Trutnev G.A. Sixteen points' model of hemispherical wave gyroscope, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 135–146 (in Russian).
9. Finogenko I.A. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous right-hand side), Irkutsk: Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 2013, 82 p.
10. Yurin V.E. Stability of oscillations for wave solid-state gyroscope, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 1993, no. 3, pp. 20–31 (in Russian).
11. Loveday P.W., Rogers C.A. The influence of control system design on the performance of vibratory gyroscopes, *Journal of Sound and Vibration*, 2002, vol. 255, no. 3, pp. 417–432.

Received 30.07.2015

Trutnev Georgii Aleksandrovich, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: TrutnevGA@gmail.com