

УДК 519.63/532.5

© С. П. Копысов, Л. Е. Тонков, А. А. Чернова, А. С. Сармажеева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПРЕГРАДОЙ
ПОТОКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДАМИ VOF И SPH¹**

Рассматриваются методы моделирования взаимодействия потока несжимаемой жидкости и преграды в рамках эйлерова (метод объема жидкости в ячейке, Volume of Fluid — VOF) и лагранжева (метод гидродинамики сглаженных частиц, Smoothed Particle Hydrodynamics — SPH) описаний. На примере решения задач о движении потока жидкости, вызванного распадом начального уровня жидкости (задача о разрушении плотины), оцениваются преимущества и недостатки применения метода SPH для моделирования гидродинамических нагрузок на преграду, развитой свободной поверхности и каплеобразования. Определяется влияние способа конкретной численной реализации граничных условий Дирихле на твердых стенках на величину давления и характер ее изменения во времени. Численные результаты, полученные с использованием методов VOF и SPH, сопоставляются с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическое моделирование, свободная поверхность, метод гидродинамики сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics — SPH), метод объема жидкости в ячейке (Volume of Fluid — VOF).

Введение

Основная проблема при решении сопряженных задач взаимодействия потоков жидкости с твердыми, движущимися или деформируемыми телами (FSI — Fluid Structure Interaction) связана с выбором численных методов для каждой подзадачи механики жидкости и механики твердых/деформируемых тел. Обычно подзадача динамики жидкости решается методами на основе эйлерова описания, а подзадача динамики тел — на основе лагранжева подхода. Кроме того, при моделировании задач FSI обычно используются сеточные методы (метод конечных объемов, конечных разностей или конечных элементов). В этом случае существенное значение имеет шаг сетки и погрешности интерполяции сеточных величин (давления, перемещений) порой на несогласованных сетках на границе взаимодействия жидкости и тела. Дополнительные затраты эйлерова описания возникают при перестроении и деформировании расчетной сетки для задачи гидродинамики на каждом шаге решения сопряженной задачи.

Моделирование рассматриваемых течений, взаимодействующих на границе с твердыми/деформируемыми телами, осложняется наличием еще и развитой свободной поверхности (поверхностных волн, капель, струй, пленок, пузырей и т. д.), что является характерной особенностью таких процессов, как распыление аэрозолей, нанесение покрытий и многих других.

Наибольшее распространение для моделирования развитой свободной поверхности получили два подхода. Первый из них основан на явном выделении границы раздела фаз или интерфейса, когда расчетная сетка перестраивается на каждом временном шаге согласно изменению положения и формы поверхности раздела. Такие методы используются, как правило, при моделировании поверхностных волн и малоприспособны для описания процессов слияния или дробления подобластей, занятых одной фазой. В моделях многофазных сред используются метод отслеживания фронта (Front tracking method) [1], метод объема жидкости в ячейке [2], метод частиц в ячейках и метод функции уровня (Level of Set) [3] и различные их модификации. Данные алгоритмы характеризуются высокой эффективностью расчета движения межфазных границ, но при изменении топологии границ или при обобщении на многомерный случай значительно усложняются [4, 5].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00055).

Во втором подходе для моделирования течений жидкости применяется семейство методов, в которых частицы используются как численный прием для интегрирования континуальных уравнений сплошной среды. Это метод гидродинамики сглаженных частиц и другие методы. За основу берутся континуальные уравнения сплошной среды, а частицы играют роль дискретных элементов, позволяющих свести уравнения в частных производных к разностной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Особое положение здесь занимают метод гидродинамики сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) [6, 7] и его более поздние модификации. Метод SPH относится к бессеточным методам, то есть в процессе вычислений дискретные элементы — частицы области расчета — в силу отсутствия между ними жестких топологических связей могут свободно перемещаться.

Выбор данного метода можно обосновать следующими обстоятельствами. Метод допускает решение большого круга рассматриваемых многомерных задач FSI без каких-либо существенных изменений программной реализации и имеет достаточно простой интерфейс для взаимодействия. Метод очень хорошо распараллеливается и масштабируется на современных гибридных архитектурах. Кроме того, метод предоставляет возможность моделирования развитой свободной поверхности (дробления и коагуляции) жидкости без применения тех или иных специальных алгоритмов. Важным моментом при моделировании SPH является оценка погрешности вычисления гидродинамических нагрузок при взаимодействии с преградами и телами.

Работа построена следующим образом. В первом параграфе приводятся формулировка задачи и основные допущения. Во втором параграфе рассматриваются особенности вычисления свободной границы и гидростатического давления при использовании метода конечных объемов и VOF. В третьем параграфе кратко приводится формулировка метода SPH для решения уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. Рассматриваются способы вычисления давления на стенке и аппроксимация свободной поверхности. В четвертом параграфе приводится сравнение тестовых задач с экспериментальными результатами [8, 9]. Необходимо отметить, что в [9] представлены результаты моделирования задачи с использованием метода VOF в программном комплексе COMFLOW. Качество численных результатов в [9] показалось не совсем приемлемым, и поэтому было решено провести новый вычислительный эксперимент с использованием VOF в открытом программном комплексе OpenFOAM.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о взаимодействии с недеформируемой преградой потока жидкости, вызванного распадом начального уровня жидкости. Подобные задачи принято называть задачами о разрушении плотины. Пусть область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с внешней границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (рис. 1) заполнена двухфазной средой и $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma_0 \cup \Omega_2$.

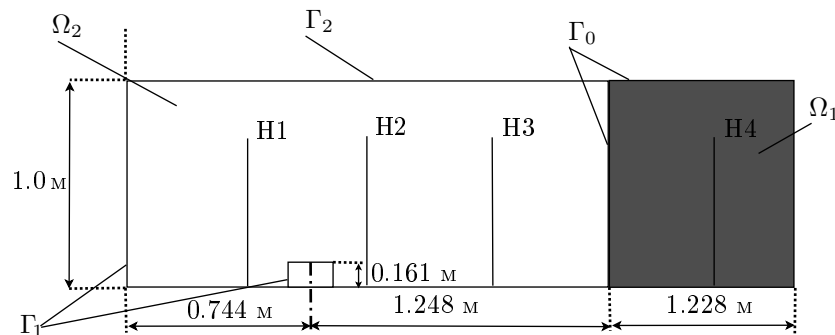


Рис. 1. Расчетная область

Для определенности будем считать, что в подобласти Ω_1 находится жидкость, а в Ω_2 — газ; Γ_0 является границей раздела фаз. Столб жидкости, имеющий в начальный момент времени форму параллелепипеда, начинает движение под действием силы тяжести, формируя течение

в затопляемом пространстве. Развивающееся течение ограничено непроницаемыми твердыми стенками Γ_1 , граница Γ_2 — открытая, с параметрами невозмущенной атмосферы.

Задача о разрушении плотины имеет ряд экспериментальных описаний [8,9], что позволяет провести апробацию различных численных схем и алгоритмов. Имеющиеся экспериментальные данные позволяют оценить как точность вычисления локальных параметров, таких как изменение во времени давления в характерных точках и уровней высот столба жидкости на интересующих участках, так и мгновенные картины течения жидкости. Таким образом, моделирование процесса обрушения столба жидкости, вызванного распадом начального разрыва уровня, позволяет провести качественную и количественную верификацию численных методов и их реализации.

§ 2. Метод объема жидкости в ячейке — VOF

Во многих практически важных случаях поставленная задача может быть сведена к рассмотрению системы из двух несмешивающихся несжимаемых вязких сред, движение каждой из которых описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности [10]:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u})_i = -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \rho_i \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad (2.2)$$

где индекс $i = \{1, 2\}$ — номер среды, ρ — плотность, \mathbf{u} — вектор скорости, p — давление, $\boldsymbol{\tau}_i = \mu_i(\nabla\mathbf{u}_i + \nabla\mathbf{u}_i^T)$ — тензор вязких напряжений, μ — динамическая вязкость, \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения. На границе раздела сред Γ_0 выполняются условия динамического равновесия:

$$(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)\mathbf{e} = (p_1 - p_2 + \sigma K)\mathbf{e}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad (2.4)$$

где \mathbf{e} — единичный нормальный вектор, внешний по отношению к Ω_1 , K — кривизна поверхности Γ_0 , σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Вводя в рассмотрение скалярную функцию

$$\alpha(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \cup \Gamma, \end{cases}$$

имеющую в данном случае смысл объемной концентрации жидкости, и определив функции плотности $\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\alpha$, давления $p = p_2 + (p_1 - p_2)\alpha$ и вязкости $\mu = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\alpha$, перепишем систему (2.1), (2.2) с учетом (2.4), (2.3) следующим образом:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \sigma K \nabla\alpha + \rho\mathbf{g}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

Система (2.5), (2.6) дополняется уравнением переноса для α :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \nabla\alpha. \quad (2.7)$$

Численное решение системы (2.5)–(2.7) строится применением метода контрольного объема для дискретизации исходных уравнений. Для упрощения дальнейшего изложения перейдем обычным образом к безразмерным переменным, обозначив через \mathbf{G} вектор объемных сил. При этом изменится форма записи только уравнения (2.5):

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\mu}\nabla\mathbf{u} + \mathbf{G}. \quad (2.8)$$

Запишем аппроксимацию уравнений (2.6), (2.8) в полудискретном виде:

$$\sum_{f \in \mathcal{N}_M} \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{u}_f^{n+1} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{3\mathbf{u}_M^{n+1} - 4\mathbf{u}_M^n + \mathbf{u}_M^{n-1}}{2\Delta t} V_M + \sum_{f \in \mathcal{N}_M} F_f \mathbf{u}_f^{n+1} - \sum_{f \in \mathcal{N}_M} \bar{\mu} \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{u}^{n+1})_f = -(\nabla p)_M V_M, \quad (2.10)$$

здесь \mathbf{u}_M^n — скорость в центре ячейки с номером M на n -ом временном шаге; V_M — объем ячейки; \mathbf{F}_f — поток через грань с номером f , \mathcal{N}_M — множество номеров соседних ячеек; \mathbf{S}_f — вектор внешней нормали к грани с номером f , по модулю равный площади этой грани.

Конкретизировав способ реконструкции потоков на гранях ячеек по значениям переменных в их центрах и метод вычисления градиента в (2.10), получим систему алгебраических уравнений, которая решается численно.

При численном решении уравнений динамики несжимаемой жидкости вида (2.5), (2.6) необходимо применение специальных методов для получения на каждом шаге по времени согласованных полей скорости и давления, удовлетворяющих условиям консервативности и неразрывности. В данной работе используется неявная по давлению процедура расщепления операторов, предложенная Issa [11] и получившая название PISO.

Будем считать, что на n -ом шаге по времени известно поле давления p^n и соответствующее ему поле потоков через грани ячеек удовлетворяет условию консервативности.

1. Предиктор. Решается уравнение сохранения импульсов (2.10) на основе имеющегося поля давления:

$$A_0 \mathbf{u}^* = \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) - \nabla p^n + \mathbf{G}. \quad (2.11)$$

Выражение $\mathbf{H}(\mathbf{u}) + A_0 \mathbf{u}$ представляет собой дискретизацию конвективных слагаемых в (2.10), конкретный вид которой определяется выбранной численной схемой, A_0 — коэффициент при \mathbf{u}_i в записи аппроксимации для ячейки с индексом i (центральный коэффициент).

2. Корректор 1. Решается уравнение для первой поправки давления:

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla (p^* - p^n) \right] = \nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) \right], \quad (2.12)$$

что дает возможность определить на основе значений \mathbf{u}^* , p^* потоки через грани ячеек F^* , удовлетворяющие условию консервативности.

Затем корректируется поле скорости по явной схеме

$$A_0 (\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*) = \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) - \nabla (p^* - p^n). \quad (2.13)$$

3. Корректор 2. Решается уравнение для второй поправки давления:

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla (p^{**} - p^*) \right] = \nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*) \right]. \quad (2.14)$$

Действуя далее аналогично первому шагу корректора, получим поля p^{**} и \mathbf{u}^{***} , которые будем считать решением системы (2.9), (2.10) на следующем шаге по времени: p^{n+1} и \mathbf{u}^{n+1} соответственно.

В рамках рассматриваемой задачи на непроницаемых стенках ставятся условия прилипания: $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0$, а значит, и все промежуточные значения \mathbf{u}^* , \mathbf{u}^{**} , \mathbf{u}^{***} на Γ_1 также должны быть нулевыми. Тогда из (2.11), (2.13) следует

$$\nabla (p^{**} - p^*)|_{\Gamma_1} = \nabla (p^* - p^n)|_{\Gamma_1} = 0,$$

что доставляет нам граничные условия для уравнений (2.12), (2.14).

Уравнение (2.7) решается на каждом шаге по времени после отыскания решения системы (2.5), (2.6). Для этого (2.7) удобно переписать в консервативном виде:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha) + \nabla \cdot (\alpha(1 - \alpha)\mathbf{u}_r) = 0, \quad (2.15)$$

где $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ — скорость относительного движения фаз на границе раздела Γ_0 . В исходной модели Γ_0 является бесконечно-тонкой и $\mathbf{u}_r = 0$, однако из-за численной диффузии при вычислениях неизбежно появляется переходная область. Следуя методу контрольного объема, запишем аппроксимацию (2.15):

$$\frac{3\alpha_M^{n+1} - 4\alpha_M^n + \alpha_M^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{f \in \mathcal{N}_M} F_f(\alpha_M^{n+1}) + \sum_{f \in \mathcal{N}_M} (1 - \alpha)_M^n F_f^*(\alpha_M^n) = 0, \quad (2.16)$$

где

$$F^*(\alpha) = c_\alpha \max_{\Omega} \frac{|\mathbf{q}\mathbf{u}_r\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}|} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}. \quad (2.17)$$

Скалярный коэффициент c_α служит для управления искусственным сжатием решения в области разрыва для компенсации эффекта численной диффузии.

Вычислительные затраты на решение полученных систем уравнений (2.9), (2.10) с применением процедуры PISO (2.11)–(2.14) составляют (M — число ячеек сетки): на решение уравнения переноса импульса (2.5), в зависимости от количества проекций, величина затрат составляет $3M^3$; на коррекции давления, предусмотренные процедурой PISO (два шага коррекции по одному уравнению Лапласа на каждом: поправка первого порядка в первом приближении (2.12) и затем второго порядка (2.14)) и поправка на явное вычисление коррекции потоков скорости (2.13), величина данных затрат составляет $2M^3$; затраты на решение уравнения переноса скалярной величины (2.7) в рамках метода VOF составят M^3 и, в случае нарушения ортогональности сетки, затраты на дополнительные итерации коррекции на неортогональность: по дополнительному уравнению Лапласа на каждой итерации для поправки давления и одно явное вычисление поправки скорости, в зависимости от числа проекций, величина затрат на коррекцию неортогональности сетки составляет $2M^3$.

Метод VOF является наиболее надежным и требует разумного количества вычислительных ресурсов для решения широкого круга практических задач отслеживания свободной поверхности. В рассматриваемом подходе маркировка ячеек выполняется следующим образом: если $\alpha < 0.5$, то ячейки содержат газ, если $\alpha > 0.5$ — то жидкость. Все, что между ними, определяет поверхностные ячейки свободной границы. Проблема маркировки осложняется и тем, что при моделировании некоторых течений малых объемов (капля, тонкая струя и т.д.), характерный размер которых меньше ячейки, метод VOF не позволяет разрешить поверхность и приводит к появлению ячеек, которые невозможно отнести к жидкости, газу или поверхности.

§ 3. Метод гидродинамики сглаженных частиц — SPH

В методе гидродинамики сглаженных частиц [6,7] за основу берутся континуальные уравнения сплошной среды (2.1) (при $i = 1$), а частицы жидкости играют роль дискретных элементов, позволяющих свести уравнения в частных производных к разностной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. По своей сути эти методы являются континуальными, дискретность в них вводится как вычислительный алгоритм.

Пусть в пространстве Ω функция $f(\mathbf{r})$ известна в N точках:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega, \quad (3.1)$$

где $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ — сглаживающее ядро, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\int W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{r} = 1; \quad W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \geq 0; \quad W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, h); \quad W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \in C^p, \quad (3.2)$$

где h — радиус сглаживания. При $h \rightarrow 0$ выражение (3.1) сходится к

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.3)$$

Произведем приближенно замену интеграла на конечную сумму [6]:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho(\mathbf{r}_j)} f(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (3.4)$$

Для уравнений гидродинамики в объеме жидкости выделим частицу i , имеющую m_i , ρ_i — массу и плотность. Определим некоторую область сглаживания $\Omega(\mathbf{r}) = \{\mathbf{r}' : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < kh\}$, тогда аппроксимация функции и ее градиента примут вид

$$f_i = \sum_{j \in \Omega_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij}, \quad \nabla f_i = \sum_{j \in \Omega_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_j \nabla W_{ij}, \quad (3.5)$$

$\Omega_i = \Omega(\mathbf{r}_i)$ и $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$.

Для решения рассматриваемой задачи использовалась функция ядра в виде кубического сплайна:

$$W(\mathbf{r}, h) = k \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}(\frac{\mathbf{r}}{h})^2 + \frac{3}{4}(\frac{\mathbf{r}}{h})^3, & 0 \leq \frac{\mathbf{r}}{h} < 1, \\ \frac{1}{4}(2 - \frac{\mathbf{r}}{h})^3, & 1 \leq \frac{\mathbf{r}}{h} < 2, \\ 0, & \frac{\mathbf{r}}{h} \geq 2, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $k = \frac{1}{\pi h^3}$ для трехмерного пространства. Из уравнения (3.5) можно вычислить плотность заменой произвольной функции f на ρ :

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (3.7)$$

Другой способ вычисления плотности следует из SPH-аппроксимации уравнений неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho. \quad (3.8)$$

Слагаемые в правой части (3.8), записанные в SPH-форме, имеют вид

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \rightarrow \sum_j m_j \mathbf{u}_j \cdot \nabla_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h), \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho \rightarrow \sum_j m_j \cdot \nabla_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (3.10)$$

Для произвольной частицы i уравнения неразрывности примут вид

$$\frac{d\rho_i}{dt} = - \sum_j m_j (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (3.11)$$

SPH-аппроксимация в обозначениях, введенных выше для уравнений движения сплошной сжимаемой жидкости, будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_j^2} + \tau_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + \mathbf{g}_i, \quad (3.12)$$

где τ_{ij} — диссипативный член в форме Монагана [6]:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}}{\rho_{ij}}, & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0, \\ 0, & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

где $\mu_{ij} = \frac{h\mathbf{u}_{ij}\mathbf{r}_{ij}}{\mathbf{r}_{ij}^2 + \eta^2}$, $\bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$, $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$, $\eta_{ij}^2 = 0.01h^2$, α — коэффициент искусственной вязкости. Анализ записи вязкого члена, предложенного Монаганом [6], позволяет получить связь коэффициента искусственной вязкости с кинематической вязкостью: $\nu = (\alpha \cdot h \cdot \bar{c}_{ij})/\rho$. Таким образом, кинематической вязкости ($\nu = 10^{-6}$ м²/с) воды соответствуют значения $\alpha = 0.02 \div 0.03$.

Новое положение частицы вычисляется по скоростям окружающих ее частиц:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{u}_i + \varepsilon \sum_j m_j \left(\frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i}{\bar{\rho}_{ij}} \right) W_{ij}, \quad (3.14)$$

где ε — константа.

Для расчета течений несжимаемой жидкости использовалась слабосжимаемая формулировка метода WCSPH (weakly compressible SPH), предполагающая замыкание системы уравнений (3.8)–(3.14) уравнением состояния Тейта:

$$p_i = \begin{cases} B \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], & \rho_i > \rho_0, \\ 0, & \rho_i \leq \rho_0, \end{cases} \quad (3.15)$$

где $B = \rho_0 c_0^2 / \gamma$ — модуль объемного сжатия, ρ_0 — плотность жидкости на свободной поверхности ($p = 0$), c_0 — константа, имеющая физический смысл скорости звука, γ — константа, для рассматриваемых задач $\gamma = 7$.

Отметим, здесь результаты работы [12] по сравнению слабосжимаемого подхода WCSPH с чисто несжимаемым вариантом ISPH (incompressible SPH), в котором давление получается из решения системы уравнений, полученных проекционным методом. На различных задачах гидродинамики показано, что результаты вычисления давлений в WCSPH являются более точными и устойчивыми, чем в ISPH, который чувствителен к численным колебаниям.

Для интегрирования полученной системы уравнений реализовывалась схема второго порядка точности, в основе которой лежит алгоритм Верле.

3.1. Граничные условия

В методе гидродинамики сглаженных частиц условие на свободной границе не выставляется, а давление в частицах, в том числе и в тех, которые принадлежат свободной границе, рассчитывается явно из уравнения состояния (3.15). Тем самым условие постоянства давления на свободной границе удовлетворяются приближенно. Для стабилизации описания свободных поверхностей и нефизичных осцилляций плотности и давления жидкости вблизи твердой стенки применялся фильтр Шепарда:

$$\rho_i^* = \sum_j \rho_j \tilde{W}_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} = \sum_j m_j \tilde{W}_{ij} \quad (3.16)$$

с корректировкой функции ядра $\tilde{W}_{ij} = W_{ij} / \sum_j (W_{ij} m_j / \rho_j)$.

Одним из наиболее важных этапов в SPH является задание граничных условий Дирихле [13]. В настоящее время существует несколько способов постановки условий Дирихле на твердых стенках и появляются все новые и комбинируются известные [13]. Обоснование выбора того или иного подхода для конкретной задачи требует обязательного тестирования. Поэтому ограничимся описанием только используемого далее подхода.

Рассмотрим граничные частицы ($\mathbf{u}_b = 0$), удовлетворяющие некоторым уравнениям состояния и неразрывности (квазижидкость). Определим давление в граничной частице (индекс b) и взаимодействующей с ней жидкой частице (индекс a), ограничиваясь первым приближением при разложении уравнения состояния в ряд Тейлора при условии, что скорость звука c постоянна:

$$p_a = c^2(\rho_a - \rho_{0a}), \quad p_b = c^2(\rho_b - \rho_{0b}). \quad (3.17)$$

Уравнения движения (3.12) для жидкой частицы с учетом (3.17) примут вид

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -m_b c^2 \left(\frac{(\rho_b - \rho_0)}{\rho_b^2} + \frac{(\rho_a - \rho_0)}{\rho_a^2} + \tau_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g}_a. \quad (3.18)$$

Из аппроксимации (3.7) для жидкой и граничной частиц запишем

$$\rho_a = m_b W_{ab} + m_a W_{aa}, \quad \rho_b = m_a W_{ab} + m_b W_{bb}. \quad (3.19)$$

С учетом того, что для любой частицы в SPH-методе $m_a = m_b = m$ и функция ядра $W_{aa} = W_{bb} = W_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i, h)$, определим плотность частиц:

$$\rho_a = \rho_b = \rho = m(W_{ab} + W_0), \quad \rho_0 = mW_0. \quad (3.20)$$

С учетом всех преобразований скорость жидкой частицы, взаимодействующей с граничной частицей b , определится как

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = - \left(2c^2 \frac{W_{ab}}{(W_{ab} + W_0)^2} + m\tau_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g}_a. \quad (3.21)$$

Таким образом, граничные частицы описывают основные черты физического процесса взаимодействия: воздействуют нормальной силой на частицы жидкости при приближении на расстояние ($\mathbf{r} < 2h$); прикладываемая сила не зависит от расположения частицы жидкости; энергия взаимодействия частицы жидкости будет сохраняться при отсутствии вязкости ($\tau_{ab} = 0$).

Для тестирования рассмотренных выше условий с динамическими граничными частицами была дополнительно решена задача об обрушении столба несжимаемой жидкости (воды), имеющая подробное экспериментальное описание с измеренными значениями давления на стенке [8]. В бассейне $1.61 \times 0.15 \times 0.3$ м (рис. 2) размещен ограниченный внутренней перегородкой столб жидкости $0.6 \times 0.15 \times 0.3$ м. В начальный момент времени ($t = 0$ с) перегородка мгновенно удаляется. Для измерения давления в эксперименте использовались датчики давления с диаметром зондирования 4.2 мм.

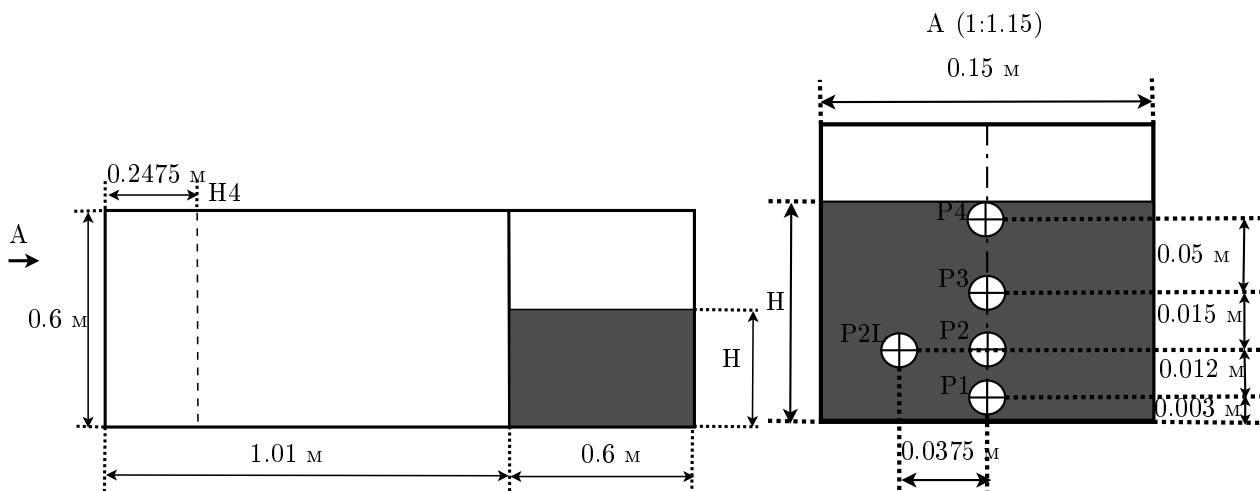


Рис. 2. Расчетная область

Моделирование процесса разрушения столба жидкости производилось с использованием метода WCSPH. В расчетной области рассматривалось 17758560 частиц, расположение которых в начальный момент времени задавалось гексаэдрической решеткой. В вычислительных экспериментах использовался GPU-ускоритель GeForce GTX 680 4 Гб. Общее время решения задачи составило 29 часов, а вычислительные затраты на один расчетный шаг — 0,68 с. Для жидкости (вода) задавались следующие параметры: начальная плотность: $\rho_0 = 1000$ кг/м³, коэффициент искусственной вязкости: $\alpha = 0.021$. Величина длины сглаживания составила $h = 0.001871$ м, а число Куранта — $C = 0.2$.

В результате вычислительного эксперимента получены графики изменения давлений в местах расположения датчиков. Определение гидродинамических нагрузок (давлений) на твердых поверхностях в рамках метода гидродинамики сглаженных частиц является непростой задачей, как и определение собственно самих граничных условий. Так значение давления восстанавливается с помощью уравнений состояния Тейта из известных плотностей частиц жидкости (частица 3, рис. 3), взаимодействующих со стенкой (частица 1, рис. 3). Таким образом, при определении давления на твердых поверхностях на значение гидравлических нагрузок оказывает влияние как число частиц, участвующих в аппроксимации (радиус сферы влияния: $R_s = 2 \cdot h$), так и используемый тип граничных частиц (1, 2, рис. 3). Поэтому при обработке численных результатов точка P1 расположения датчиков была смещена от стенки в сторону потока жидкости P1* (рис. 3).

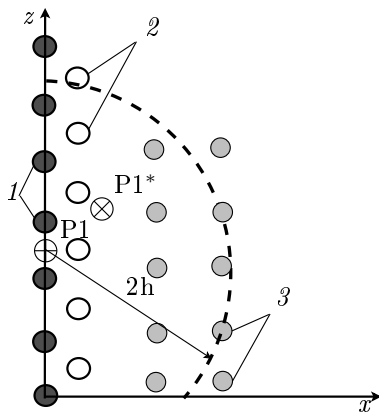


Рис. 3. Положение расчетной точки P1* относительно датчика P1: 1 — граничные частицы твердой стенки; 2 — граничные псевдочастицы; 3 — частицы жидкости.

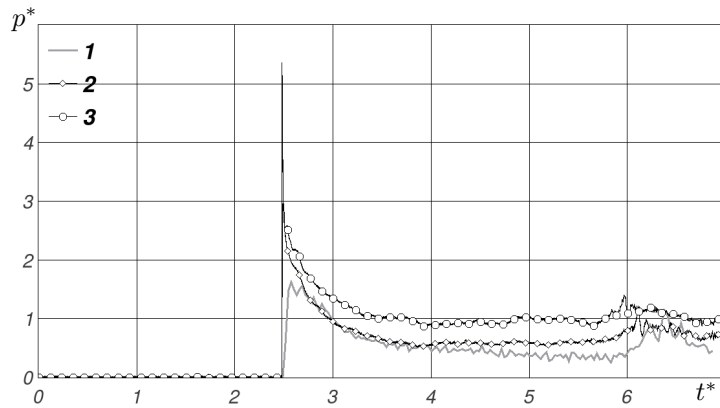


Рис. 4. Зависимость давления в точке P1 от времени: 1 — WCSPH; 2, 3 — эксперимент [8] (кривые, соответствующие минимальным и максимальным значениям)

Отметим, что в рамках физического эксперимента [8] было проведено 100 опытов, по результатам обработки которых определены доверительные интервалы, а также максимальные и минимальные значения безразмерных гидродинамических нагрузок ($p^* = p/(\rho g H)$), действующих на боковую стенку в течение интервала безразмерного ($t^* = t\sqrt{g/H}$) времени $t^* = 7$. Сопоставление результатов расчета методом WCSPH с экспериментальными данными [8] приведено на рис. 4, 5 и демонстрирует хорошее качественное и количественное совпадение уровней давления (кривые для точек P1, P2, P2L, P3). Для датчиков P1, P2 расчетные графики изменения давления совпадают с минимальными значениями в эксперименте. Данные измерений для датчика давления в точке P2L получены в результате единственного опыта, поэтому можно провести только качественное сопоставление результатов.

Прежде чем сравнивать результаты вычислений со значениями давления, полученными датчиком P3, отметим, что он расположен в области где наблюдается начало распада основного потока жидкости. При моделировании течения методом SPH в этом случае также появляется некоторое отклонение расчетного потока жидкости от стенки (см. рис. 6), обусловленное влиянием граничных условий. Максимальное расчетное давление в данной точке ниже, чем в эксперименте, хотя закономерность падения давления качественно совпадает с имеющимися экспериментальными данными. Второй пик давления хорошо согласуется с данными эксперимента, что соответствует промежутку времени, когда датчик находится в сплошном потоке жидкости и сильных колебаний расчетного давления не наблюдается.

Датчик давления в точке P4 (рис. 2), в которой отмечается существенное отклонение фонтана жидкости от стенки ($t = 4.93$, рис. 6, a), и расчетные давления достигают лишь 60 % уровня относительно экспериментальных минимальных значений гидродинамических нагрузок

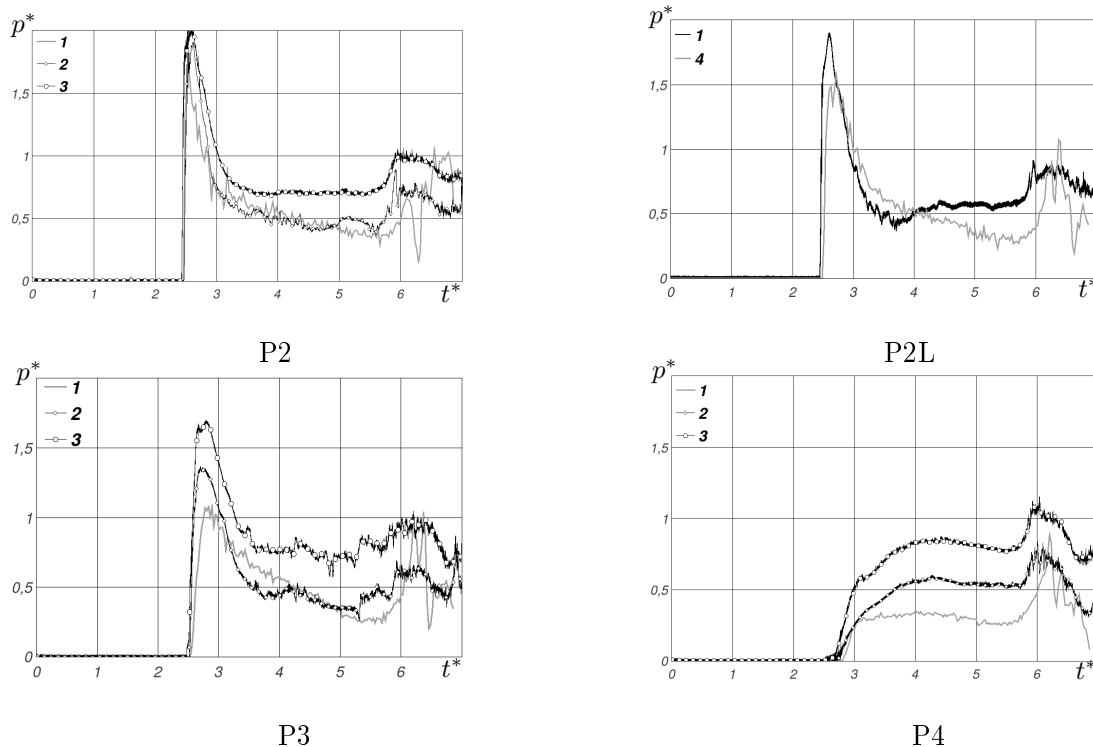


Рис. 5. Графики зависимости давления от времени: 1 — WCSPH; 2, 3, 4 — эксперимент [8] (кривые, соответствующие минимальным и максимальным значениям)

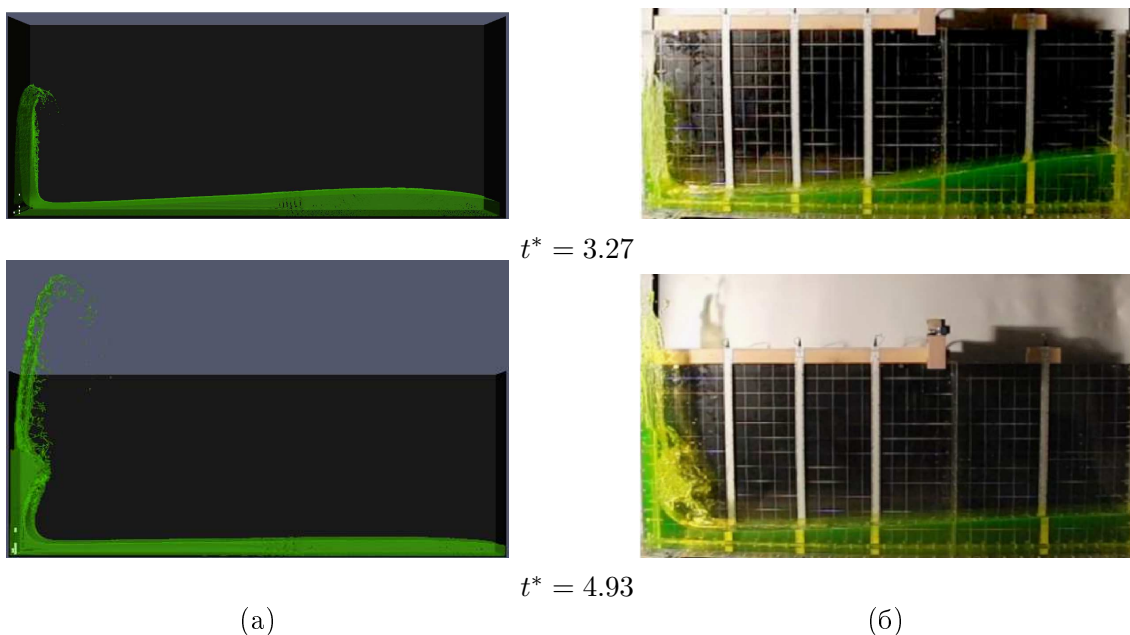


Рис. 6. Обрушение столба жидкости: (а) WCSPH; (б) эксперимент [8]

зок (рис. 5).

§ 4. Численное моделирование

Рассмотрим задачу о взаимодействии потока несжимаемой жидкости с преградой [9]: столб жидкости заключен между стенками $x = 0$ и $x = b$ (рис. 7). В начальный момент времени $t = 0$ перегородка $x = b$ мгновенно удаляется и столб жидкости начинает движение под действием силы тяжести. На поверхности преграды в точках P1–P8 измеряется давление, а в сечениях H1–H4 — высота столба жидкости.

В отличие от предыдущей рассмотренной задачи здесь характерной особенностью является процесс разрушения свободной поверхности с интенсивным каплеобразованием при взаимодействии потока жидкости с препятствием. Именно поэтому представляет значительный интерес сравнение вычисленных и экспериментальных зависимостей давления от времени на вертикальных и горизонтальных поверхностях преграды. Следует отметить, что представленные в [9] экспериментальные результаты получены только по одному испытанию.

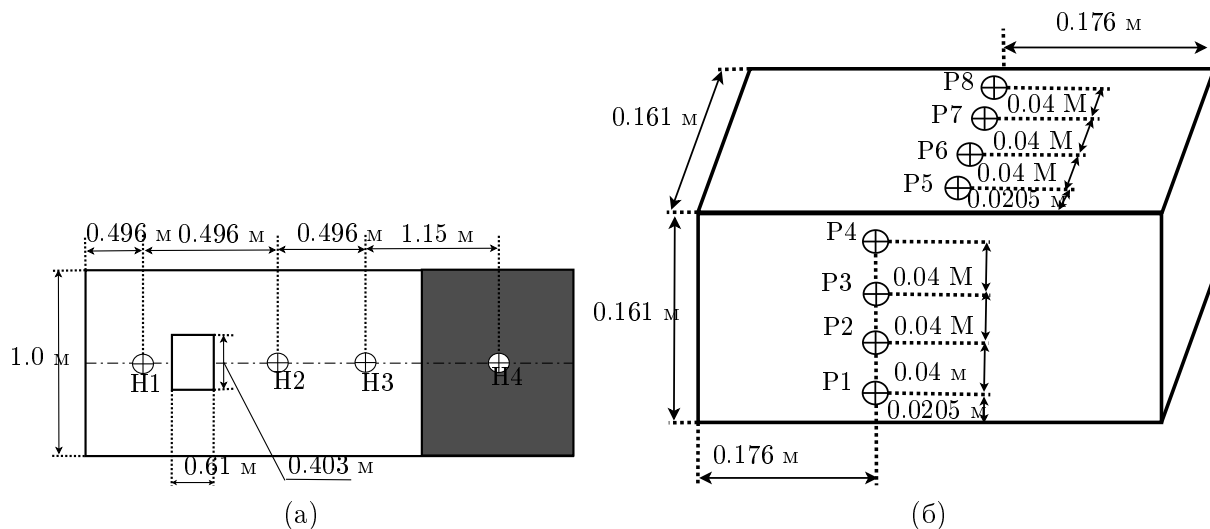


Рис. 7. Расчетная область: (а) схема бассейна; (б) расположение датчиков давления на поверхности преграды

Моделирование процесса обрушения столба жидкости и взаимодействия образующегося потока с преградой производилось с использованием методов WCSPH и VOF. В методе гидродинамики сглаженных частиц жидкость моделировалась 1146276 частицами, расположение которых в начальный момент времени задавалось гексаэдрической решеткой. При решении поставленной задачи методом VOF, в открытом программном комплексе OpenFOAM 2.3.0, использовалась ортогональная сетка, состоящая из 1972608 шестигранников.

Программная реализация метода WCSPH позволяет производить расчеты на графических процессорах. В вычислительных экспериментах использовался GPU-ускоритель GeFORCE GTX 680 4Гб. Расчеты методом VOF в OpenFOAM выполнялись с применением MPI-реализации на 8 ядрах CPU (два 4-ядерных процессора Intel Xeon E5420, 2.5 GHz). Общее время решения задачи составило 4.25 и 32.45 часа для методов SPH и VOF соответственно. Вычислительные затраты на один расчетный шаг составили: 0.08 с для WCSPH и 41.25 с для VOF. Жидкость (вода) определялась следующими параметрами: начальная плотность — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, коэффициент искусственной вязкости для WCSPH — $\alpha = 0.021$ (что соответствует кинематическому коэффициенту — $\nu = 0.0007 \text{ м}^2/\text{с}$), коэффициент кинематической вязкости для VOF — $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Величина длины сглаживания $h = 0.003 \text{ м}$, а число Куранта — $C = 0.2$ и $C = 0.85$ для WCSPH и VOF соответственно. Распределение частиц жидкости и вид расчетной сетки для шага по времени $t = 0.96 \text{ с}$ приведены на рис. 8.

В результате расчетов была определена высота столба жидкости в сечениях Н1–Н4 (рис. 9). На графиках хорошо видны характерные максимумы высоты, зафиксированные в различные моменты времени. Результаты, полученные методами VOF и SPH, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Для метода VOF можно отметить наличие осцилляций в сечении Н2, что свидетельствует о необходимости применения дополнительной процедуры реконструкции свободной поверхности на основе вычисленного параметра α .

Графики зависимости давления от времени в точках P1, P4, P5 и P8 на поверхности преграды представлены на рис. 10. Максимальное значение давления, зафиксированное на вертикальных стенках преграды (точки P1, P4) в момент соударения фронта жидкости с преградой (рис. 10), совпадает с экспериментальными как для WCSPH, так и метода VOF. Необходи-

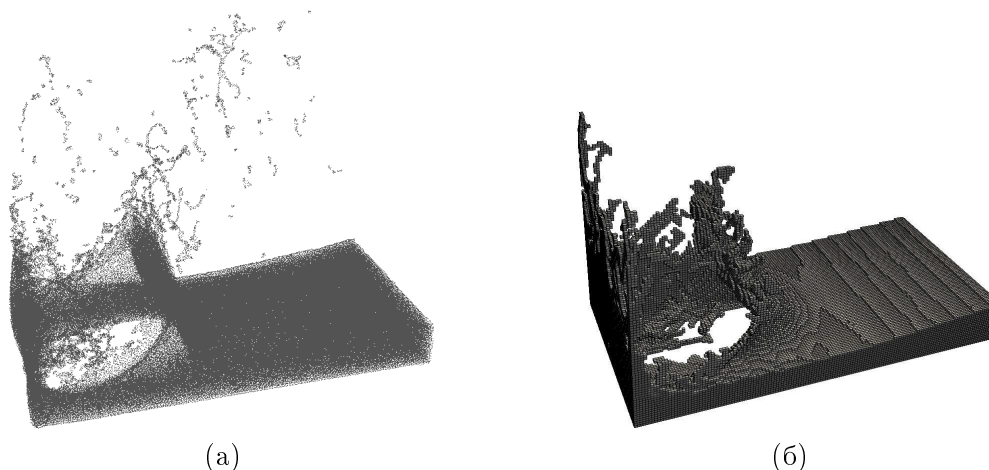


Рис. 8. Положение расчетных ячеек для шага $t = 0.96$ с: (а) WSPH; (б) VOF ($\alpha \geq 0.5$)

мо отметить, что изменение давления, вычисляемое алгоритмом PISO при конечно-объемной аппроксимации уравнений Навье–Стокса в точках P5, P8, расположенных на горизонтальной поверхности препятствия, по величине хорошо согласуется с экспериментальными с некоторым опережением в начальные моменты времени.

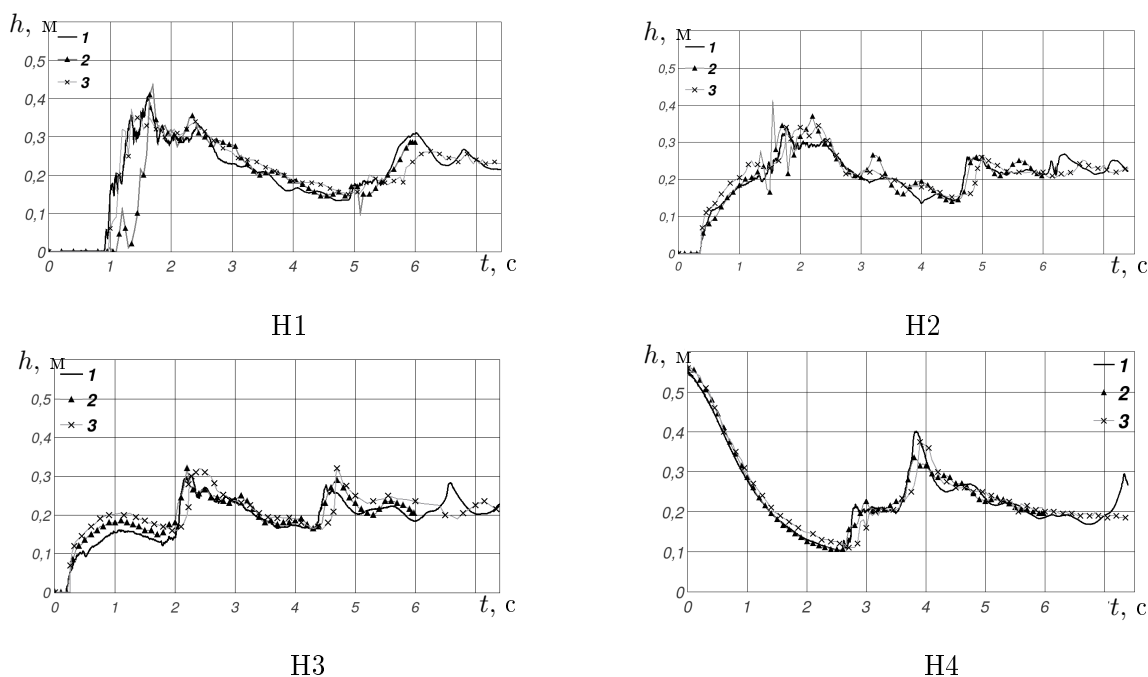


Рис. 9. Графики зависимости высоты столба жидкости от времени: 1 – эксперимент [9]; 2 – VOF; 3 – WSPH

Как показывают графики (рис. 10, точки P5, P8), применение метода WSPH приводит в некоторых случаях к сильным осцилляциям давления. Это объясняется тем, что давление вычисляется на основе гипотезы о слабой сжимаемости по изменениям плотности частиц жидкости (3.15) и в случае горизонтальной поверхности преграды, где поток жидкости существенно разрывается на отдельные фрагменты (капли), давление повторяет колебания плотности. Очевидно, необходима дополнительная коррекция вычисления давления в подобных условиях. Для сравнения с экспериментальными данными датчиков, расположенных на горизонтальной поверхности, выполнялось смещение вглубь потока точки осреднения давления по частицам, принадлежащим жидкости и стенке.

На рис. 11 приведены картины течений для различных моментов времени, полученные

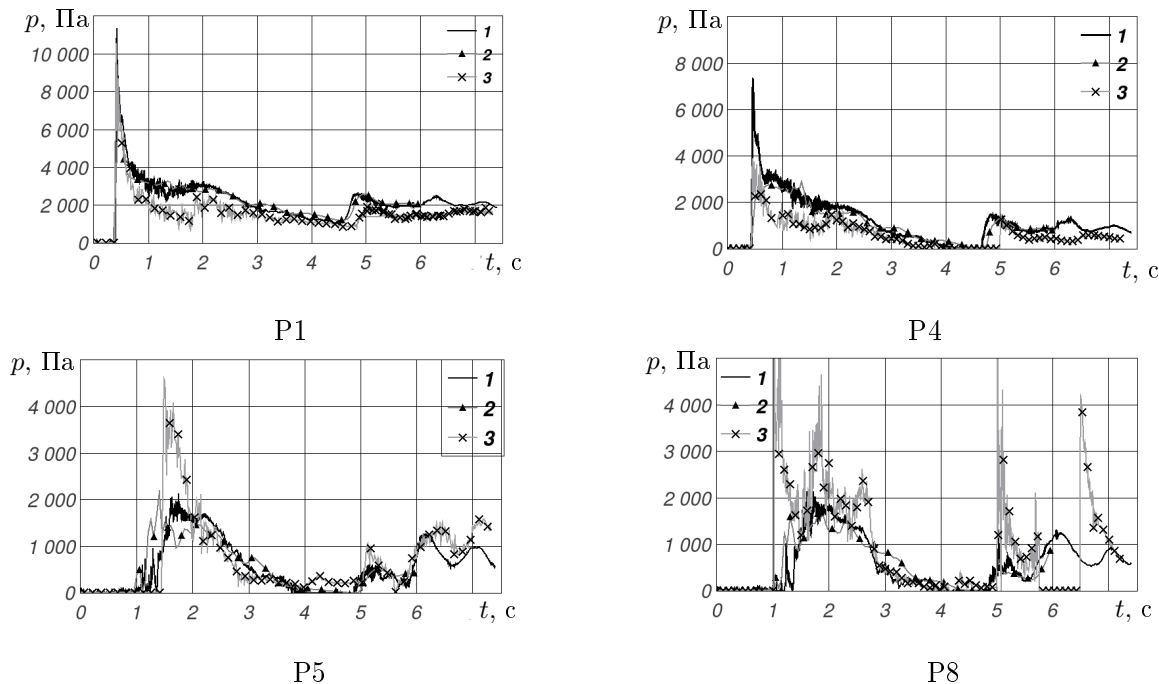


Рис. 10. Графики зависимости давления от времени: 1 — эксперимент [9]; 2 — VOF; 3 — WCSPH

методами WCSPH, VOF, и экспериментальные данные [9]. При соударении несжимаемой жидкости с преградой наблюдается образование развитой свободной поверхности с образованием отдельных капель (рис. 11). При сопоставлении результатов выделим лишь высоту фонтана отдельных капель WCSPH, которая превышает экспериментально зафиксированные значения. Картины течения, полученные VOF-методом и представленные на рис. 11, б, приведены для всего диапазона значений $\alpha > 0.1$. Картина течения качественно соответствует эксперименту, хотя говорить о точном представлении свободной поверхности в виде отдельных капель в этом случае не имеет смысла.

§ 5. Заключение

Проведено тестирование двух методов моделирования течений с развитой свободной поверхностью. Первый из них основан на явном выделении межфазных границ (метод объема жидкости в ячейке (VOF)), второй — на представлении жидкости набором лагранжевых частиц — дискретных ячеек, центры которых рассматриваются как расчетные узлы для построения аппроксимаций, позволяющих свести уравнения в частных производных к разностной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH)).

На задачах о разрушении плотины, имеющих подробное экспериментальное описание, проведена оценка погрешности вычисления давления для метода гидродинамики сглаженных частиц и влияния используемого вида граничных частиц на гидродинамические нагрузки.

Сравнение методов VOF и WCSPH показало, что метод VOF для разрешения развитой свободной поверхности требует существенно более детальную дискретизацию расчетной области по пространству, чем методы SPH. Для более корректного выделения межфазных границ требуются дополнительные затраты на реконструкцию свободной поверхности. Применение метода VOF для моделирования процесса каплеобразования, подразумевающего подробное разрешение нестационарной во времени развитой свободной поверхности, ограничивается высокими вычислительными затратами.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили эффективность использования метода WCSPH для решения уравнений гидродинамики, включая моделирование развитой

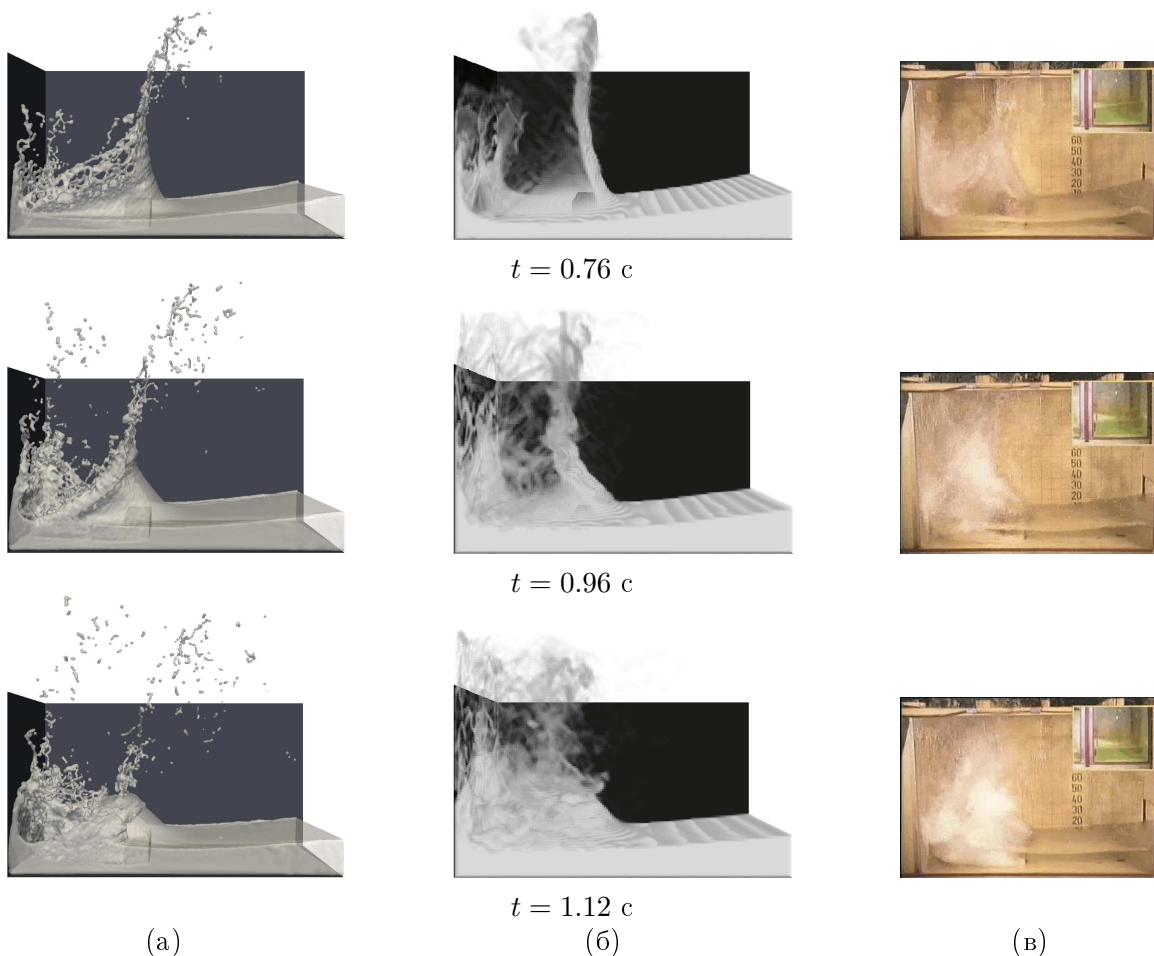


Рис. 11. Обрушение столба жидкости: (а) WSPH; (б) VOF ($\alpha > 0.1$); (в) эксперимент [9]

свободной поверхности с произвольными вращательными и сдвиговыми течениями, распадениями односвязных и слияниями многосвязных расчетных областей. Вместе с тем показано, что применение метода WSPH осложняется необходимостью предотвращения осцилляций при вычислении давления на стенках, взаимодействующих с потоками жидкости, а также существенным влиянием на решение способа реализации граничных условий Дирихле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations // *Journal of Computational Physics*. 1988. Vol. 79. № 1. P. 12–49.
2. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics*. 1981. Vol. 39. № 1. P. 201–225.
3. Sethian J.A. Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science. Cambridge: Cambridge University Press. 1999.
4. Тонков Л.Е. Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости методом функции уровня // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2010. Вып. 3. С. 134–140.
5. Osher S., Fedkiw R. Level set methods and dynamic implicit surfaces. Springer, 2002.
6. Monaghan J.J. Simulating free surface flows with SPH // *Journal of Computational Physics*. 1994. Vol. 110. № 2. P. 399–406.
7. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 1977. Vol. 181. P. 375–389.
8. Lobovsky L., Botia-Vera E., Castellana F., Mas-Soler J., Souto-Iglesias A. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break // *Journal of Fluids and Structures*. 2014. Vol. 48. P. 407–434.

9. Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems // *Journal of Computational Physics*. 2005. Vol. 206. № 1. P. 363–393.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
11. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *Journal of Computational Physics*. 1986. Vol. 62. № 1. P. 40–65.
12. Chen Z., Zong Z., Liu M.B., Li H.T. A comparative study of truly incompressible and weakly compressible SPH methods for free surface incompressible flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2013. Vol. 73. № 9. P. 813–829.
13. Violeau D. Fluid mechanics and the SPH method. Theory and applications. Oxford University Press, 2012. 616 p.

Поступила в редакцию 29.06.2015

Копысов Сергей Петрович, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: s.kopysov@gmail.com

Тонков Леонид Евгеньевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: tnk@udman.ru

Чернова Алена Алексеевна, к.т.н., научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: alicaaa@gmail.com

Сармакеева Анастасия Семеновна, младший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: asarmakeeva@gmail.com

S. P. Kopysov, L. E. Tonkov, A. A. Chernova, A. S. Sarmakeeva

Modeling of the incompressible liquid flow interaction with barriers using VOF and SPH methods

Keywords: mathematical modeling, free surface, smoothed particle hydrodynamics — SPH, volume of fluid — VOF.

MSC: 76D27, 76M25

The paper considers the methods of modeling of the incompressible fluid flow interaction with barriers in Euler formulation (volume of fluid — VOF) and Lagrangian (smoothed particle hydrodynamics — SPH) description. By the example of solving the problems of motion of the fluid flow caused by the collapse of the initial liquid level (dam break problem), the authors estimate advantages and disadvantages of using the SPH method for the simulation of hydrodynamic loads, free-form surface and formation of drops. The influence of the specific numerical implementation of the Dirichlet boundary conditions on solid walls on both the pressure magnitude and its time behavior is determined. Numerical results obtained by the methods of VOF and SPH are compared with known experimental data.

REFERENCES

1. Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, 1988, vol. 79, no. 1, pp. 12–49.
2. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 39, no. 1, pp. 201–225.
3. Sethian J.A. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
4. Tonkov L.E. Computation of viscous drop dynamics with level set method, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 134–140 (in Russian).

5. Osher S., Fedkiw R. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Springer, 2002.
6. Monaghan J.J. Simulating free surface flows with SPH, *Journal of Computational Physics*, 1994, vol. 110, no. 2, pp. 399–406.
7. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 1977, vol. 181, pp. 375–389.
8. Lobovsky L., Botia-Vera E., Castellana F., Mas-Soler J., Souto-Iglesias A. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break, *Journal of Fluids and Structures*, 2014, vol. 48, pp. 407–434.
9. Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems, *Journal of Computational Physics*, 2005, vol. 206, no. 1, pp. 363–393.
10. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Fluid mechanics), Moscow: Nauka, 1978, 736 p.
11. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting, *Journal of Computational Physics*, 1986, vol. 62, no. 1, pp. 40–65.
12. Chen Z., Zong Z., Liu M.B., Li H.T. A comparative study of truly incompressible and weakly compressible SPH methods for free surface incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013, vol. 73, no. 9, pp. 813–829.
13. Violeau D. *Fluid mechanics and the SPH method. Theory and applications*, Oxford University Press, 2012, 616 p.

Received 29.06.2015

Kopysov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: s.kopysov@gmail.com

Tonkov Leonid Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: tnk@udman.ru

Chernova Alena Alekseevna, Candidate of Engineering, Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: alicaaa@gmail.com

Sarmakeeva Anastasiya Semenovna, Junior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: asarmakeeva@gmail.com