УДК 517.977

© *К. А. Щелчков*

# К ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ [1]

Рассматриваются две задачи простого преследования на плоскости группой преследователей одного убегающего при условии, что все игроки обладают равными возможностями. В первой задаче множеством значений допустимых управлений игроков является невырожденный треугольник. Получены необходимые и достаточные условия на начальные положения игроков для осуществления поимки тремя преследователями. Во второй задаче множеством значений допустимых управлений игроков является выпуклый компакт с непустой внутренностью. В данной задаче получены необходимые и достаточные условия на конструкцию множества значений допустимых управлений игроков, для которого существуют начальные положения трех игроков, убегающего и двух преследователей, из которых происходит поимка.

*Ключевые слова*: дифференциальная игра, простое движение, групповое преследование.

## Введение

Естественным обобщением игр преследования–убегания двух лиц [1–3] являются задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей с одним или несколькими убегающими [4–7]. Эти игры интересны с теоретической точки зрения, так как не могут быть решены при помощи теории игр для двух лиц. Одна из причин этого состоит в том, что объединение множеств достижимости всех преследователей и объединение целевых множеств представляют собой множества, не являющиеся выпуклыми и, более того, не являющиеся связными. В работе [8] Б. Н. Пшеничного рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что скорость убегающего и преследователей по норме не превосходит единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки. Работа [9] обобщает результат Б.Н. Пшеничного на случай $l$-поимки. В работе [10] Н. Л. Григоренко получает необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от нескольких преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением и множество управлений каждого из игроков — один и тот же выпуклый компакт. Обзор работ, посвященных задаче простого преследования, представлен в [11].

В данной работе рассматриваются две задачи простого преследования на плоскости группой преследователей одного убегающего при условии, что все игроки обладают равными возможностями. В первой задаче множеством допустимых управлений игроков является невырожденный треугольник. Получены необходимые и достаточные условия на начальные положения игроков для осуществления поимки тремя преследователями. Во второй задаче множеством допустимых управлений игроков является выпуклый компакт с непустой внутренностью. В данной задаче получены необходимые и достаточные условия на конструкцию множества допустимых управлений игроков, для которого существуют начальные положения трех игроков, убегающего и двух преследователей, из которых происходит поимка.

## § 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: $n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий $E$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 14–01–31176.

Закон движения каждого из преследователей $P_i$ имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i,\ u_i \in U,\ x_i(0) = x_i^0.$$

Закон движения убегающего $E$ имеет вид

$$\dot{y} = v,\ v \in U,\ y(0) = y^0,$$

где $U$ — выпуклый компакт с непустой внутренностью. Обозначим $z_i^0 = x_i^0 - y^0$, $z^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\}$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $\sigma$ — некоторое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s < \ldots$ промежутка $[0, +\infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

**Определение 1.** *Кусочно-программной стратегией* $V$ убегающего $E$, соответствующей разбиению $\sigma$, называется семейство отображений $\{c_l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие набору

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v_l : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

**Определение 2.** *Кусочно-программной контрстратегией* $U_i$ преследователя $P_i$, соответствующей разбиению $\sigma$, называется семейство отображений $\{b_i^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие набору

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

и функции $v_l(t), t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_i^l : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

Обозначим данную игру $\Gamma(n, z^0)$.

**Определение 3.** В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит уклонение от встречи*, если существует разбиение $\sigma$, стратегия $V$ убегающего $E$, соответствующая разбиению $\sigma$, такие, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$, где $y(t)$ — траектория $E$, порожденная разбиением $\sigma$.

**Определение 4.** В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит поимка*, если для любого разбиения $\sigma$ и для любой кусочно-программной стратегии $V$ убегающего $E$ найдутся кусочно-программные контрстратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что $x_p(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $p, \tau$.

В работе [10] доказано, что в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходит поимка тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) > 0$, где

$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v), \quad \lambda_i(v) = \sup\{\lambda \mid \lambda \geqslant 0,\ -\lambda z_i^0 \in -v + U\}.$$

## § 2. Задача преследования в случае, когда $U$ — треугольник

В данном параграфе будем считать, что $U$ — треугольник с вершинами в точках $A, B, C$.

**Лемма 1.** *Пусть дан треугольник $ABC$ на плоскости ($U = \Delta ABC$), ненулевой вектор $l$ такой, что $(B - A, l) > 0$ и $(C - A, l) > 0$. Тогда для любой точки $q \in U - A$ выполнено $(q, l) \geqslant 0$, причем $(q, l) = 0$ тогда и только тогда, когда $q = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая точка $q$ множества $U - A$ представима в виде $q = \gamma(\alpha(B - A) + (1 - \alpha)(C - A))$, где $\alpha, \gamma \in [0, 1]$. Пусть $q \neq 0$, то есть $\gamma \neq 0$, тогда $(q, l) = \gamma\alpha((B - A), l) + \gamma(1 - \alpha)((C - A), l)$. Здесь оба слагаемых неотрицательны, причем хотя бы одно не равно нулю. Следовательно, для любой ненулевой точки $q \in U - A$ выполнено $(q, l) > 0$. Лемма доказана. $\square$

**Теорема 1.** *Пусть $n = 2$. Тогда из любых начальных положений происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Предположим, что $z_i^0$ параллельны. В данном случае существует ненулевой вектор $l$, для которого выполнено $(z_i^0, l) = 0, i = 1, 2$. Без ограничения общности можно считать, что $(B - A, l) > 0$, так как если $(B - A, l) < 0$, то вместо вектора $l$ можно взять вектор $-l$. Если $(B - A, l) = 0$, то, например, $(C - A, l) > 0$ либо $(A - C, l) > 0$. Следовательно, переименовав вершины, получим требуемое. Тогда если $(C - A, l) > 0$, то в силу леммы 1 для любой точки $q \in U - A$ будет выполнено неравенство $(q, l) \geqslant 0$, причем равенство будет выполняться только при $q = 0$. Докажем, что при $v = A$ будут выполнены равенства $\lambda_1(v) = \lambda_2(v) = 0$ и, соответственно, $\delta(z^0) = 0$, то есть будет происходить уклонение. Для функций $\lambda_i$ выполнены следующие включения: $-\lambda_i(v) z_i^0 \in U - A, i = 1, 2$. Тогда для того, чтобы $\lambda_1(v)$ или $\lambda_2(v)$ не равнялась нулю, необходимо существование ненулевого вектора $q \in U - A$, находящегося на той же прямой, что и векторы $z_1^0, z_2^0$, то есть такого, что $(q, l) = 0$. Поэтому если $q$ сонаправлен с $-z_1^0$, то $\lambda_1(v) > 0$, иначе $\lambda_2(v) > 0$. В силу доказанного выше такого вектора $q$ не существует. Следовательно, $\lambda_1(v) = \lambda_2(v) = 0$.

Если $(C - A, l) \leqslant 0$, то $(C - B, l) < 0$ и $(A - B, l) < 0$. В данном случае так же будет выполнена лемма 1 с вектором $-l$. Следовательно, аналогично рассмотренному выше, $\delta(z^0) = 0$ при $v = B$, то есть происходит уклонение.

Рассмотрим случай, когда векторы $z_i^0$ не параллельны. В данном случае существует ненулевой вектор $l$, для которого выполнено $(z_i^0, l) > 0, i = 1, 2$. Без ограничения общности можно считать, что $(B - A, l) > 0$. Пусть $(C - A, l) \geqslant 0$. Тогда в силу леммы $(q, l) \geqslant 0$ для всех $q \in U - A$. С другой стороны, $(-\lambda z_i^0, l) < 0$, $i = 1, 2$, для всех $\lambda > 0$. Следовательно, $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0$. Соответственно, $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение. Если $(C - A, l) < 0$, то $(A - C, l) > 0$ и $(B - C, l) > 0$. Следовательно, $\delta(z^0) = 0$ при $v = C$, то есть происходит уклонение.

Теорема доказана. □

**Теорема 2.** *Пусть $n = 3$. Для того чтобы в задаче происходила поимка, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$z_1^0 = -\gamma_1(\alpha_1(B - A) + (1 - \alpha_1)(C - A)),$$

$$z_2^0 = -\gamma_2(\alpha_2(A - B) + (1 - \alpha_2)(C - B)),$$

$$z_3^0 = -\gamma_3(\alpha_3(A - C) + (1 - \alpha_3)(B - C))$$

*для некоторых чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1]$.*

Доказательство. Пусть $z_1^0 = -\gamma_1(\alpha_1(B - A) + (1 - \alpha_1)(C - A))$, $z_2^0 = -\gamma_2(\alpha_2(A - B) + (1 - \alpha_2)(C - B))$, $z_3^0 = -\gamma_3(\alpha_3(A - C) + (1 - \alpha_3)(B - C))$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — некоторые положительные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые числа из отрезка $[0, 1]$. Достаточно рассматривать $v \in \partial U$, где $\partial U$ — граница множества $U$. Рассмотрим $v = \alpha B + (1 - \alpha) A$, где $\alpha \in [0, 1]$. Любая точка $q \in U - A$ представима в виде $q = \gamma(\alpha(B - A) + (1 - \alpha)(C - A))$, где $\alpha, \gamma \in [0, 1]$. Следовательно, $\lambda_1(A) = \|\alpha_1(B - A) + (1 - \alpha_1)(C - A)\|$. При $\alpha \in [0, 0.5]$ имеем $\lambda_1(v) \geqslant \lambda_1(A)/2$, так как треугольник с вершинами $v$, $v - \lambda_1(v) z_1^0$, $B$ подобен треугольнику с вершинами $A$, $v - \lambda_1(A) z_1^0$, $B$. То есть при $\alpha = 0.5$ отрезок, соединяющий точки $v$, $v - \lambda_1(v) z_1^0$, является средней линией треугольника с вершинами $A$, $v - \lambda_1(A) z_1^0$, $B$. Аналогично, $\lambda_2(B) = \|\alpha_2(A - B) + (1 - \alpha_2)(C - B)\|$. Тогда $\lambda_2(v) \geqslant \lambda_2(B)/2$ при $\alpha \in [0.5, 1]$.

Аналогично, рассмотрев оставшиеся стороны треугольника получим, что

$$\delta(z^0) = \min\{\lambda_1(A)/2, \lambda_2(B)/2, \lambda_2(B)/2\}.$$

Данная величина положительна. Следовательно, в данной игре происходит поимка.

Докажем необходимость. Достаточно рассмотреть случай, когда $z_1^0, z_2^0, z_3^0 \neq -\gamma_1(\alpha_1(B - A) + (1 - \alpha_1)(C - A))$ для любого $\gamma_1 > 0$ и любого $\alpha_1 \in [0, 1]$. Так как все точки $q \in U - A$ представимы в виде $q = \gamma(\alpha(B - A) + (1 - \alpha)(C - A))$, где $\alpha, \gamma \in [0, 1]$, причем $q = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$, следовательно, для любого положительного $\lambda$ выполнено $-\lambda z_1^0, -\lambda z_2^0, -\lambda z_2^0 \notin U - A$. Тогда $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda_3(A) = 0$. Отсюда $\delta(z^0) = 0$. Следовательно, в данной игре происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. □

## § 3. Поимка двумя преследователями

**Теорема 3.** *Для существования начальных положений $z_1^0$ и $z_2^0$, из которых в данной игре происходит поимка, необходимо и достаточно существование не равных между собой точек $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \partial U$, которые не находятся на одной прямой, и таких, что векторы $a_1 - b_1$ и $a_2 - b_2$ коллинеарны, $\gamma a_1 + (1-\gamma) b_1 \in \partial U$, $\gamma a_2 + (1-\gamma) b_2 \in \partial U$, где $\gamma \in [0,1]$. При этом поимка будет гарантирована из начальных положений $z_1^0 = \alpha(a_1 - b_1)$, $z_2^0 = -\beta(a_1 - b_1)$, где $\alpha, \beta > 0$.*

Доказательство. $\mathbf{1^0}$. Докажем необходимость. Пусть таких точек $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \partial U$ не существует. Для любого ненулевого вектора $l$ существуют такие числа $a$ и $b$, что для любого $q \in U$ выполнено $(q,l) \leqslant a$, $(q,l) \geqslant b$, при этом существуют точки $q_1, q_2$, в которых выполнены равенства $(q_1, l) = a$, $(q_2, l) = b$. То есть множество $U$ находится между двумя опорными прямыми. Без ограничения общности, так как предполагается невыполнение условий теоремы, можно считать, что $q_1$ — единственная точка, для которой выполнено равенство.

Рассмотрим случай, когда $z_1^0$ и $z_2^0$ параллельны, то есть $(z_1^0, l) = 0$, $(z_2^0, l) = 0$ при некотором $l$. Так как для любой точки $q \in U$, $q \neq q_1$, выполнено неравенство $(q,l) < a$, то все точки вида $-\alpha z_1^0 + q_1$, $-\alpha z_2^0 + q_1$, где $\alpha > 0$, не принадлежат множеству $U$. Следовательно, $\lambda_1(q_1) = \lambda_2(q_1) = 0$. Соответственно, $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение.

Рассмотрим случай, когда $z_1^0$ и $z_2^0$ не параллельны, то есть существует вектор $l$ такой, что $(z_1^0, l) < 0$, $(z_2^0, l) < 0$. Так как для любой точки $q \in U$ выполнено неравенство $(q,l) \leqslant a$, то все точки вида $-\alpha z_1^0 + q_1$, $-\alpha z_2^0 + q_1$, где $\alpha > 0$, не принадлежат множеству $U$. Следовательно, $\lambda_1(q_1) = \lambda_2(q_1) = 0$. Соответственно, $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение.

$\mathbf{2^0}$. Докажем достаточность. Пусть существуют точки $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \partial U$, соответствующие условию теоремы, и начальные положения имеют вид $z_1^0 = \alpha(a_1 - b_1)$, $z_2^0 = -\beta(a_1 - b_1)$, где $\alpha$ и $\beta$ — некоторые положительные числа. Тогда существует вектор $l$ и числа $a$ и $b$ такие, что для любой точки $q \in U$ выполнено $(q,l) \leqslant a$, $(q,l) \geqslant b$, при этом $(\alpha a_1 + (1-\alpha) b_1, l) = a$, $(\alpha a_2 + (1-\alpha) b_2, l) = b$, где $\alpha \in [0,1]$. Возьмем любой вектор $v \in \partial U$. Тогда прямая $l(v) = \{w \mid w = v + \gamma(a_1 - b_1),\ \gamma \in \mathbb{R}\}$ пересекает трапецию с вершинами $a_1 - v, b_1 - v, b_2 - v, a_2 - v$ параллельно основаниям, которые определяются вершинами $a_1 - v$, $b_2 - v$ и $a_2 - v$, $b_2 - v$. Следовательно, либо $\lambda_1(v) \geqslant \min\{\|a_1 - b_1\|/2, \|a_2 - b_2\|/2\}$, либо $\lambda_2(v) \geqslant \min\{\|a_1 - b_1\|/2, \|a_2 - b_2\|/2\}$. Отсюда получаем, что $\delta(z^0) \geqslant \min\{\|a_1 - b_1\|/2, \|a_2 - b_2\|/2\}$, то есть происходит поимка. Теорема доказана. □

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
4. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989.
5. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
6. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
7. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
8. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
9. Васильева Л.Г. Об одной дифференциальной игре убегания // Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. Калинин: Изд-во Калининского университета, 1979. С. 26–33.
10. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1983. № 1. С. 41–47.

11. Банников А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2013. Вып. 1 (41). С. 3–46.

Поступила в редакцию 29.07.2015

Щелчков Кирилл Александрович, студент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: incognitobox@mail.ru

***K. A. Shchelchkov***

**To the problem of group pursuit on a plane**

*Keywords*: differential game, simple motion, group pursuit.

MSC: 49N70, 49N75

The paper deals with two simple pursuit problems on a plane with a group of pursuers and one evader. All the participants have equal capabilities. In the first problem the admissible control for every participant takes the value in a non-degenerate triangle. Necessary and sufficient conditions on initial positions of all participants are obtained for capture by three pursuers of one evader. In the second problem the admissible control for every participants takes the value in a compact set with non-empty interior. Within this problem, necessary and sufficient conditions on the structure of this compact set are received for the existence of initial positions of two pursuers and one evader from which the capture occurs.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. Translated under the title *Differentsial'nyie igry*, Moscow: Mir, 1967, 480 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyie differentsial'nyie igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 458 p.
3. Petrosyan L.A. *Differentsial'nyie igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
4. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nyie igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple motion), Tashkent: Fan, 1989.
5. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Boston–London–Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, 424 p.
6. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
7. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
8. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
9. Vasil'eva L.G. On one differential evasion problem, *Differentsial'nye, beskoalitsionnye, kooperativnye i statisticheskie igry* (Differential, noncooperative, cooperative and statistical games), Kalinin: Kalinin University, 1979, pp. 26–33 (in Russian).
10. Grigorenko N.L. Simple pursuit–evasion game of pursuit group and one evader, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet.*, 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
11. Bannikov A.S. Some non-stationary problems of group pursuit, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2013, no. 1 (41), pp. 3–46 (in Russian).

Received 29.07.2015

Shchelchkov Kirill Aleksandrovich, student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: incognitobox@mail.ru