УДК 517.977.8, 519.837.4

© *Л. С. Чиркова*

УКЛОНЕНИЕ ОТ ВСТРЕЧИ ГРУППЫ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ В ИГРЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Цель группы преследователей — поймать, а группы убегающих — избежать поимки. Все игроки обладают равными динамическими возможностями. Движение игроков задается дифференциальным уравнением третьего порядка. Все убегающие используют одинаковое управление, поэтому о них можно говорить как о жестко скоординированных инерционных объектах. Доказано, что если выпуклые оболочки, натянутые на начальные ускорения группы преследователей и группы убегающих, не пересекаются, то происходит уклонение от встречи.

Ключевые слова: дифференциальная игра, жестко скоординированные объекты.

Введение

Задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих [1–8] являются естественным обобщением игр двух лиц. Цель группы преследователей — поимка заданного числа убегающих, цель убегающих — противоположная — избежать поимки.

Были получены достаточные [9–12], а для задачи простого преследования и необходимые [13, 14] условия поимки хотя бы одного убегающего в дифференциальной игре со многими участниками при условии, что убегающие используют одно и то же управление.

Задача простого преследования двух убегающих, при условии, что убегающие используют одно и то же управление, рассматривалась в [15–17].

Задача уклонения одного убегающего от группы преследователей, когда уравнение движения участников — дифференциальное уравнение третьего порядка, была решена в [18].

В рассматриваемой игре участвуют группа преследователей и группа убегающих. Группа убегающих — жестко скоординированные объекты. Уравнение движения участников — дифференциальное уравнение третьего порядка. Все игроки имеют равные динамические возможности. Доказано, что если выпуклые оболочки, натянутые на начальные ускорения группы преследователей и группы убегающих, не пересекаются, то происходит уклонение от встречи.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $k+m$ лиц: k преследователей и m убегающих. Закон движения каждого убегающего E_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид

$$\dddot{y}_j = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \dot{y}_j(0) = \dot{y}_j^0, \quad \ddot{y}_j(0) = \ddot{y}_j^0. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого преследователя P_i, $i = 1, \ldots, k$, имеет вид

$$\dddot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \quad \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \tag{1.2}$$

Определение 1. Говорят, что в *дифференциальной игре* Γ из начального состояния

$$(x_i^0, \quad \dot{x}_i^0, \quad \ddot{x}_i^0, \quad y_j^0, \quad \dot{y}_j^0, \quad \ddot{y}_j^0), \quad x_i^0 \neq y_j^0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

происходит уклонение от встречи, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $\|v(t)\| \leqslant 1$, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающих формируется на основе информации о состоянии $X(s) = (x_i(s), \dot{x}_i(s), \ddot{x}_i(s), y_j(s), \dot{y}_j(s), \ddot{y}_j(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, в тот же момент времени.

Каждый преследователь обладает информацией о координатах всех игроков в данный момент времени.

Замечание 1. Отметим, что у всех убегающих одно и то же управление v, поэтому будем говорить, что убегающие E_j, $j = 1, \ldots, m$, являются *жестко скоординированными объектами.*

§ 2. Решение задачи

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\mathrm{co}\,\{\ddot{y}_j^0\}_{j=1}^m \cap \mathrm{co}\,\{\ddot{x}_i^0\}_{i=1}^k = \emptyset, \tag{2.1}$$

то в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассмотрим вспомогательную игру Γ_* $km+1$ лиц: в игре Γ_* участвуют km преследователей $\widetilde{P}_{ij}$ и убегающий $\widetilde{E}$. Закон движения каждого из преследователей $\widetilde{P}_{ij}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \dddot{x}_{ij} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, m, \\ x_{ij}(0) = x_i^0 - y_j^0 = x_{ij}^0, \quad \dot{x}_{ij}(0) = \dot{x}_i^0 - \dot{y}_j^0 = \dot{x}_{ij}^0, \quad \ddot{x}_{ij}(0) = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0 = \ddot{x}_{ij}^0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Закон движения убегающего $\widetilde{E}$ имеет вид

$$\dddot{y} = \widetilde{v}, \quad \|\widetilde{v}\| \leqslant 1, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0. \tag{2.3}$$

Из (2.1) следует, что $0 \notin \mathrm{co}\,\{\ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0,\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m\}$. Тогда условие (2.1) можно записать следующим образом: $0 \notin \mathrm{co}\,\{\ddot{x}_{ij}^0,\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m\}$. По условию начальные положение, скорость и ускорение убегающего $\widetilde{E}$ в дифференциальной игре Γ_* равны нулю, поэтому (2.1) можно переписать в виде

$$0 \notin \mathrm{co}\,\{\ddot{x}_{ij}^0 - \ddot{y}^0,\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m\}. \tag{2.4}$$

Так как выполнено (2.4), то в игре Γ_* в силу результатов работы [18] происходит уклонение убегающего $\widetilde{E}$ от преследователей $\widetilde{P}_{ij}$. Это означает, что $x_{ij}(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, где

$$\begin{gathered} x_{ij}(t) = (x_i^0 - y_j^0) + (\dot{x}_i^0 - \dot{y}_j^0)t + (\ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0)\frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} u_i(s)\,ds, \\ y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \widetilde{v}(s)\,ds. \end{gathered}$$

Поэтому

$$x_{ij}(t) - y(t) = (x_i^0 - y_j^0) + (\dot{x}_i^0 - \dot{y}_j^0)t + (\ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0)\frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} (u_i(s) - \widetilde{v}(s))\,ds.$$

С другой стороны, для игры Γ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} x_i(t) = x_{ij}(t) + y_j^0 + \dot{y}_j^0 t + \ddot{y}_j^0 \frac{t^2}{2}, \quad y_j(t) = y(t) + y_j^0 + \dot{y}_j^0 t + \ddot{y}_j^0 \frac{t^2}{2}, \\ i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, m. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$x_i(t) = x_i^0 + \dot{x}_i^0 t + \ddot{x}_i^0 \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} u_i(s)\,ds,$$
$$y_j(t) = y_j^0 + \dot{y}_j^0 t + \ddot{y}_j^0 \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \widetilde{v}(s)\,ds,$$
$$x_i(t) - y_j(t) = (x_i^0 - y_j^0) + (\dot{x}_i^0 - \dot{y}_j^0)t + (\ddot{x}_i^0 - \ddot{y}_j^0)\frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}(u_i(s) - \widetilde{v}(s))\,ds.$$

Так как $x_{ij}(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, в игре Γ_*, то $x_i(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, в игре Γ. По стратегии уклонения убегающего $\widetilde{E}$ в игре Γ_* строим стратегию уклонения убегающих E_j в игре Γ следующим образом: $v(t) = \widetilde{v}(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Теорема доказана. $\square$

Пример 1. Пусть $n = 3$, $k = 5$, $m = 3$,

$$x_1^0 = (3,2,1),\ x_2^0 = (2,4,3),\ x_3^0 = (5,6,3),\ x_4^0 = (4,3,2),\ x_5^0 = (5,4,3),$$
$$\dot{x}_1^0 = (4,3,2),\ \dot{x}_2^0 = (3,1,2),\ \dot{x}_3^0 = (2,0,1),\ \dot{x}_4^0 = (3,2,1),\ \dot{x}_5^0 = (2,3,1),$$
$$\ddot{x}_1^0 = (0,1,0),\ \ddot{x}_2^0 = (1,0,0),\ \ddot{x}_3^0 = (0,0,1),\ \ddot{x}_4^0 = (0,2,0),\ \ddot{x}_5^0 = (0,0,2),$$

$$y_1^0 = (-5,0,0),\ y_2^0 = (0,-2,0),\ y_3^0 = (-2,0,0),$$
$$\dot{y}_1^0 = (0,0,-3),\ \dot{y}_2^0 = (0,-3,0),\ \dot{y}_3^0 = (0,0,-1),$$
$$\ddot{y}_1^0 = (0,0,-1),\ \ddot{y}_2^0 = (-1,0,0),\ \ddot{y}_3^0 = (0,-1,0),$$

Для заданных начальных позиций выполнено условие (2.1), и поэтому в игре Γ происходит уклонение от встречи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 232 с.
2. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
3. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
6. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки–разбойники» // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
7. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Известия вузов. Математика. 2009. № 5. С. 3–12.
8. Банников А.С., Петров Н.Н. Линейные нестационарные дифференциальные игры преследования со многими убегающими // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 3–12.
9. Петров Н.Н. Мягкая поимка инерционных объектов // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 437–445.
10. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Доклады Академии наук Узбекской ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
11. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37.
12. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89–96.

13. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
14. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика 2002. Т. 66. № 2. С. 234–241.
15. Виноградова М.Н. О преследовании двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 4. С. 3–8.
16. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в нестационарной задаче простого преследования // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. № 1. С. 21–31.
17. Виноградова М.Н., Петров Н.Н. Мягкая поимка двух скоординированных инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 6. С. 104–109.
18. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 45–53.

Поступила в редакцию 01.08.2015

Чиркова Любовь Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: lmvstk@yandex.ru

L. S. Chirkova

Evasion from a group of rigidly coordinated objects in a third-order game

Keywords: differential game, rigidly coordinated objects.

MSC: 49N70, 49N75

A conflict interaction of groups of controlled objects is considered. The pursuers' goal is to catch, and the evaders' goal is to avoid contact with pursuers. All players have equal dynamic capabilities. Players' motion is defined by a third order differential equation. All evaders have equal control, therefore they can be considered as rigidly coordinated inertial objects. It is proved that if the convex hull spanned by pursuers' initial acceleration vector is not intersected with the convex hull spanned by evaders' initial acceleration vector, then the evasion is possible.

REFERENCES

1. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igry s prostymi dvizheniyami* (Differential games with simple motions), Tashkent: Fan, 1989, 232 p.
2. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
3. Chikrii A.A. *Konfliktno-upravlyaemye protsessy* (Conflict-controlled processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 380 p.
4. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
5. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
6. Petrov N.N., Petrov N. Nikandr. On a differential game of "cossaks-robbers", *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian).
7. Bannikov A.S. A nonstationary group pursuit problem, *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, no. 5, pp. 1–9.
8. Bannikov A.S., Petrov N.N. Linear non-stationary differential pursuit games with several evaders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 3–12 (in Russian).
9. Petrov N.N. The soft capture of inertial objects, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 343–349.

10. Satimov N.Yu., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3-6 (in Russian).
11. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and System Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 6, pp. 770–778.
12. Petrov N.N. Simple pursuit after a group of evaders, *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 12, part 1, pp. 1914–1919.
13. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders, *Journal of Computer and System Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753.
14. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232.
15. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 3–8 (in Russian).
16. Vinogradova M.N. On the capture of two escapees in the non-stationary problem of simple pursuit, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 21–31 (in Russian).
17. Vinogradova M.N., Petrov N.N. Soft capture of two coordinated evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, no. 6, pp. 949–954.
18. Chirkova L.S. Evasion from a Group of Inertial Objects, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 46, no. 3, pp. 377–385.

Received 01.08.2015

Chirkova Lyubov' Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: lmvstk@yandex.ru