УДК 517.977

© *О. И. Урбан*

К ВОПРОСУ УСПОКОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ ПОСРЕДСТВОМ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

Для линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении решена задача успокоения решения посредством динамического регулятора по типу обратной связи. Основная идея исследования заключается в выборе параметров регулятора так, чтобы замкнутая система стала точечно вырожденной в направлениях, отвечающих фазовым компонентам исходной (разомкнутой) системы. Для этого исходная система преобразуется к двум подсистемам, одна из которых соответствует алгебраической части, а вторая — дифференциальной. Далее для объекта, соответствующего дифференциальной части, строится динамический регулятор, обеспечивающий вырождение соответствующих фазовых компонент. Отличительной чертой работы является возможность обеспечить замкнутой системе наперед заданный конечный спектр, за счет выбора которого замкнутая система может быть сделана асимптотически устойчивой. Изучается возможность такого управления системой в случае отсутствия у нее свойства полной управляемости. В доказательстве основного результата приводится поэтапная процедура построения такого регулятора. Результаты исследования проиллюстрированы конкретным числовым примером.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальная система, регулярная пара матриц, запаздывание, управляемость, регулятор, обратная связь.

Введение

Проблема полной управляемости (полного успокоения) впервые была поставлена Н. Н. Красовским [1] для систем запаздывающего типа и затем изучалась многими авторами. В большинстве случаев результаты исследований задачи полной управляемости [2–5] и ее обобщения [6–8] представляют собой, как правило, критерии разрешимости и методы формирования программных управлений. Однако устройства, функционирующие по принципу программного управления, имеют существенные недостатки. Например, невозможность корректного управления объектом, если возникают заранее неизвестные возмущения, влияющие на управляемую величину. Также если объект управления является нейтральным или неустойчивым [9, с. 12], то небольшая систематическая ошибка в программном управлении приводит к нарастающей ошибке управляемой величины. Все это и многое другое привело к необходимости искать другие принципы воздействия (управления). Одним из широко используемых в наше время принципов является принцип обратной связи. Его основная идея заключается в определении отклонения текущего состояния выходной или измеряемой переменной от требуемого значения, и, таким образом, на его основе происходит формирование управляющего воздействия. Задача конструирования регуляторов, основанных на принципе обратной связи и обеспечивающих системе управления заданные свойства, занимает одно из центральных мест в теории автоматического регулирования. Управление по принципу обратной связи нашло свое широкое применение в таких областях как промышленность, техника, машиностроение, экономика и многое другое.

В настоящее время существует много работ, посвященных построению регуляторов, основанных на принципе обратной связи, однако в рамках данного исследования остановимся более подробно на статьях [2–4]. Их основная идея заключается в обеспечении точечной вырожденности замкнутой системы в направлениях, отвечающих фазовым переменным исходной системы. При этом необходимым и достаточным условием существования регулятора является условие полной управляемости [5], которое совпадает с условием спектральной управляемости [10] — полной управляемости конечномерной подсистемы, соответствующей всякому спектральному значению исходной системы.

В случае многовходных систем с многими запаздываниями в управлении условия полной (спектральной) управляемости являются избыточными для существования программного управления, успокаивающего решение [6–8]. Соответственно, возникает вопрос: можно ли в случае автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы, не обладающей свойством полной управляемости, замкнуть ее линейной обратной связью так, чтобы обеспечить решению исходной системы равенство $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, каково бы ни было начальное состояние системы, а также чтобы замкнутая система стала асимптотически устойчивой?

Для обеспечения решению автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы равенства $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, можно воспользоваться результатами работ [2, 11]. Однако если спектр замкнутой системы будет содержать инвариантные значения, то при любом выборе коэффициентов регулятора их не удается исключить, следовательно, невозможно обеспечить замкнутой системе асимптотическую устойчивость. Для решения этой проблемы предлагается в регуляторе ввести интегральные составляющие и воспользоваться результатами работ [3, 4]. Однако в работах [3, 4], в отличие от настоящей, рассматривается вопрос существования регулятора только для полностью управляемых систем, запаздывающего типа, без запаздывания в управлении.

В настоящей статье построен динамический регулятор, обеспечивающий автономной регулярной алгебро-дифференциальной системе, не обладающей свойством полной управляемости а) равенство $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, каково бы ни было начальное состояние; б) асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Достаточные условия существования такой обратной связи совпадают с критерием успокоения решения не полностью управляемых систем [12]. В идейном плане данная работа продолжает исследование, начатое в [11].

§ 1. Постановка задачи

Предположим, что объект управления описывается линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системой с соизмеримыми запаздываниями (которую для краткости назовем системой Σ):

$$\frac{d}{dt}\big(A_0x(t)\big) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$C_0A_0x(0) = C_0A_0q, \quad u(t) \equiv 0, \quad t < 0, \tag{1.2}$$

где x — n-вектор-столбец решения уравнения (1.1); u — r-вектор-столбец управления; A_0, A — постоянные матрицы соответствующих размеров; $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0,m}$; h — постоянное запаздывание; C_i, $i = 0, 1, \ldots,$ — базовые матрицы [13, с. 26–28]. Предполагается, что пара матриц $\big(A_0, A\big)$ регулярная, т. е. существует такое число $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), для которого $\det\,(A - \alpha A_0) \neq 0$ [13, с. 10]. В качестве допустимых управлений будем использовать кусочно-непрерывные функции $u(t)$, $t \geqslant 0$, такие, что решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывная, а $A_0x(t)$, $t \geqslant 0$, — дифференцируемая функции.

Замечание 1. В [12] обоснована целесообразность выбора в контексте данной работы начального условия в виде (1.2). При этом существует единственное решение системы Σ [13, с. 45].

Обозначим $W(\lambda) = \lambda A_0 - A$, $B_A = \sum\limits_{i=0}^{m} e^{-C_0Aih}B_i$. Критерий полной управляемости (полного успокоения) системы Σ имеет вид [11, 12]

$$\operatorname{rank}\,[W(\lambda), B_A] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

Напомним, что система Σ называется полностью управляемой [12, 14], если для любого указанного выше начального условия (1.2) существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t \in (0, t_1 - mh]$, $u(t) \equiv 0$, $t > t_1 - mh$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{1.4}$$

Задачу выбора управления $u(t)$, $t > 0$, обеспечивающего тождество (1.4) без требования $u(t) \equiv 0$, $t > t_1 - mh$, будем называть, в отличие от задачи полного успокоения системы, задачей успокоения решения системы.

В настоящей статье решена задача построения регулятора с обратной связью по состоянию, обеспечивающего успокоение решения многовходной линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы. В отличие от работы [11] построенный ниже регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы, что является весьма значимым для моделирования конкретных объектов управления.

§ 2. Структура регулятора

Введем ряд обозначений. Пусть $\mathbb{R}^{k_1 \times k_2}[z]$ — множество матриц размера $k_1 \times k_2$, элементы которых являются полиномами переменной z, $\mathbb{I}^{k_3 \times k_4}[z]$ — множество матриц размера $k_3 \times k_4$, элементы которых $I(z)$ являются интегро-разностными операторами, действующими на множестве кусочно-непрерывных функций $\phi(t)$, $t > t_1$, по правилу

$$I(z)\phi(t) = \sum_{i=0}^{N} \int_0^h e^{\lambda_k s} \frac{s^i}{i!} Q_i(z)\phi(t-s)\, ds, \quad t > 0,$$

где $Q_i(z) \in \mathbb{R}^{1\times 1}[z]$, $i = \overline{0, N}$, $\lambda_k \in \Lambda_K$, где $\Lambda_K = \left\{\lambda_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, L}\right\}$ — некоторый набор действительных или комплексно сопряженных чисел, $L, N \in \mathbb{N}$.

Успокоение решения системы Σ предлагается осуществить динамическим регулятором по типу обратной связи по состоянию вида

$$u(t) = K_1(z)x(t) + \gamma_1\xi(t) + T\psi(t), \tag{2.1}$$

$$\psi(t) = S\psi(t-h) + K_2(z)x(t) + \gamma_2\xi(t), \tag{2.2}$$

$$\dot{\xi}(t) = I_1(z)x(t) + I_2(z)\xi(t) + I_3(z)y(t), \tag{2.3}$$

$$\dot{y}(t) = R_1(z)x(t) + R_2(z)\xi(t) + R_3(z)y(t), \quad t > 0, \tag{2.4}$$

где $K_1(z) \in \mathbb{R}^{r\times n}[z]$, $K_2(z) \in \mathbb{R}^{r_T\times n}[z]$, $T \in \mathbb{R}^{r\times r_T}$, $S \in \mathbb{R}^{r_T\times r_T}$, r_T — некоторое натуральное число, $\mathrm{col}[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma = \mathrm{col}[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$, где 1 стоит на l-ом месте, $1 \leqslant l \leqslant r + r_T$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}^r$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}^{r_T}$;

$$I_1(z) \in \mathbb{I}^{1\times n}[z], \quad I_2(z) \in \mathbb{I}^{1\times 1}[z], \quad I_3(z) \in \mathbb{I}^{1\times s}[z],$$

$$R_1(z) \in \mathbb{R}^{s\times n}[z], \quad R_2(z) \in \mathbb{R}^{s\times 1}[z], \quad R_3(z) \in \mathbb{R}^{s\times s}[z];$$

$\xi(t)$ — скалярная функция, $\psi(t)$ — r_T-вектор-функция, $y(t) = \mathrm{col}[y_1(t), \ldots, y_s(t)]$ — s-вектор-функция. Функции $x(t)$, $t < -mh$, и $\xi(t)$, $\psi(t)$, $y(t)$, $t \leqslant 0$, могут быть любыми непрерывными.

Опишем матрицы T и S, входящие в структуру регулятора (2.1)–(2.4), а также сформулируем условия разрешимости задачи успокоения решения системы Σ. Для этого определим [7] последовательность векторов δ_k, $k = m, m+1, \ldots$, которая является решением разностного уравнения

$$B_0\delta_k + \sum_{i=1}^{m} B_i\delta_{k-i} = 0_{n\times 1}, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{2.5}$$

порождаемого начальным условием $\delta_i = \tilde{\delta}_i$, $i = \overline{0, m-1}$. Последовательность δ_k, $k = m$, $m+1$, …, определяемая уравнением (2.5), существует в том и только том случае [7], когда $\tilde{\delta}_{m-i} = T_i c$,

$i=\overline{1,m}$, где $T_i\in\mathbb{R}^{r\times r_T}$ — некоторые матрицы, $c\in\mathbb{R}^{r_T}$ — произвольный постоянный вектор (один и тот же для всех матриц T_i). Процедура построения матриц T_i приведена в работе [7], поэтому здесь не описывается. Отметим, что ее реализация всегда возможна и заключается в решении конечного числа однородных алгебраических систем. Найдем произвольную квадратную матрицу $S\in\mathbb{R}^{r_T\times r_T}$ как решение уравнения $B_0T_1S+\sum\limits_{i=1}^{m}B_iT_i=0_{n\times r_T}$, $T_kS=T_{k-1}$, $k=\overline{2,m}$, разрешимость которого следует из определения матриц T_i. Заметим, что будет выполняться равенство $\sum\limits_{i=0}^{m}B_iTS^{m-i}=0_{n\times r_T}$. Определим матрицы [15] $G_i=\sum\limits_{k=0}^{i}B_kTS^{i-k}$, $i=\overline{0,m}$, $G_A=\sum\limits_{i=0}^{m-1}e^{-C_0Aih}G_i$. Обратим внимание, что $G_m=\sum\limits_{i=0}^{m}B_iTS^{m-i}=0_{n\times r_T}$.

§ 3. Процедура построения регулятора

Теорема 1 (условие разрешимости задачи успокоения решения системы Σ [11, 12]). *Для того чтобы для любого начального условия* (1.2) *системы* (1.1) *существовало управление* $u(t)$, $t>0$, *обеспечивающее* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\operatorname{rank}\big[W(\lambda),B_A,G_A\big]=n\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Далее будем считать, что имеет место условие (3.1). Прежде всего, разъясним влияние на динамику замкнутой системы функции ψ, входящей в структуру регулятора (2.1)–(2.4). Для этого докажем следующее утверждение, в котором попутно укажем точный вид системы, которой удовлетворяют функции x,ξ,y в случае регулятора (2.1)–(2.4). Пусть $X=\operatorname{col}[x,\xi,y]$, z — оператор сдвига. Построим следующие полиномиальные матрицы $B(z)=\sum\limits_{i=0}^{m}B_iz^i$, $G(z)=\sum\limits_{i=0}^{m}G_iz^i$. Рассмотрим регулятор (2.1)–(2.4).

Лемма 1 (см. [11]). *При любых начальных функциях* $\psi(t),X(t)$, $t\leqslant 0$, *функция* $X(t)$ *при* $t>mh$ *удовлетворяет алгебро-дифференциальной системе с соизмеримыми запаздываниями вида*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\big(\operatorname{diag}[A_0,1,E_s]X(t)\big)=\\=\begin{bmatrix}A+B(z)K_1(z)+G(z)K_2(z) & B(z)\gamma_1+G(z)\gamma_2 & 0_{n\times s}\\ I_1(z) & I_2(z) & I_3(z)\\ R_1(z) & R_2(z) & R_3(z)\end{bmatrix}X(t),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $0_{n\times s}\in\mathbb{R}^{n\times s}$ — *нулевая матрица порядка* $n\times s$.

Доказательство. Пусть $\psi(t)$, $t>0$, определяется уравнением (2.2). Используя определение матриц G_i, $i=\overline{0,m}$, можно получить, что [16, 17]

$$B(z)T\psi(t)=G(z)K_2(z)x(t)+G(z)\gamma_2\xi(t). \tag{3.3}$$

Подставим теперь управление $u(t),t>0$, определяемое формулой (2.1), в систему (1.1) и заменим величину $B(z)T\psi(t)$ согласно (3.3). В итоге получим, что решение $X(t),t>mh$, системы (1.1), замкнутой регулятором (2.1)–(2.4), удовлетворяет (3.2). Лемма доказана. □

Системе Σ поставим в соответствие систему $\Sigma1$:

$$\frac{d}{dt}\big(A_0\widetilde{x}(t)\big)=A\widetilde{x}(t)+\sum_{i=0}^{m}\widetilde{B}_iw(t-ih),\quad t\geqslant 0, \tag{3.4}$$

$$C_0A_0\widetilde{x}(0)=C_0A_0\widetilde{q},\quad w(t)\equiv 0,\quad t<0, \tag{3.5}$$

где $w = \mathrm{col}[w^1, w^2]$ — новое управление, $w^1 \in \mathbb{R}^r$, $w^2 \in \mathbb{R}^{r_T}$, $\widetilde{B}_i = \big[B_i, G_i\big]$, $i = \overline{0,m}$, $\widetilde{B}(z) = \sum\limits_{i=0}^{m} \widetilde{B}_i z^i$.

Для системы $\Sigma 1$ выполняется условие (3.1), поэтому эта система является полностью управляемой [12].

Лемма 2 (см. [11]). *Пусть* $C_0A_0\widetilde{q} = C_0A_0 q$, *функция* $u(t)$, $t > 0$, *определяется формулой* (2.1), *а* $\psi(t)$ — *формулой* (2.2). *Тогда* $x(t) = \widetilde{x}(t)$ *при* $t \geqslant 0$.

Для доказательства леммы 2 достаточно показать [11], что неоднородные части уравнений (1.1) и (3.4) при выполнении условий леммы 2 совпадают.

Поскольку решения систем Σ и $\Sigma 1$ совпадают при $t \geqslant 0$, то для дальнейшего исследования будем использовать систему $\Sigma 1$.

Рассмотрим пару матриц (A_0, A), которая является регулярной. Используя [13, с. 25], можно построить такие неособые матрицы P и Q, что справедливо каноническое представление матриц A_0, A: $A_0 = P\overline{A_0}Q$, $A = P\overline{A}Q$, где $\overline{A_0} = \mathrm{diag}\big[M, E_{n_2}, W\big]$, $\overline{A} = \mathrm{diag}\big[E_{n_1}, R, E_{n_3}\big]$, $M \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $R \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ — нильпотентные матрицы, $W \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$ — неособая матрица $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$. В общем случае некоторые из соответствующих пар матриц в указанном каноническом представлении могут отсутствовать, однако это не нарушает общности рассуждений. Пусть l_M — индекс нильпотентности матрицы M $(M^{l_M} = 0_{n_1 \times n_1})$, $Q = \mathrm{col}[Q_1, Q_2]$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3) \times n}$.

Воспользуемся описанным выше каноническим представлением матриц A_0, A. Положим

$$\hat{x} = Q\tilde{x}, \quad \hat{x} = \mathrm{col}[\hat{x}^1, \hat{x}^2], \quad \hat{x}^1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \hat{x}^2 \in \mathbb{R}^{n_2+n_3},$$

$$P^{-1}\tilde{B}_i = \mathrm{col}[\bar{B}_i, \bar{\bar{B}}_i], \quad \bar{B}(z) = \sum_{i=0}^{m} \bar{B}_i z^i \in \mathbb{R}^{n_1 \times (r+r_T)}[z], \quad \bar{\bar{B}}(z) = \sum_{i=0}^{m} \bar{\bar{B}}_i z^i \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3) \times (r+r_T)}[z],$$

$$\hat{B}(z) = \mathrm{diag}[E_{n_2}, W^{-1}]\bar{\bar{B}}(z), \quad \hat{A} = \mathrm{diag}[R, W^{-1}].$$

Тогда функции $\hat{x}^1, \hat{x}^2$ удовлетворяют следующим системам:

$$\frac{d}{dt}\big(M\hat{x}^1(t)\big) = \hat{x}^1(t) + \bar{B}(z)w(t), \quad t > 0, \tag{3.6}$$

$$\dot{\hat{x}}^2(t) = \hat{A}\hat{x}^2(t) + \hat{B}(z)w(t), \quad t \geqslant 0, \quad \hat{x}^2(0) = \hat{q}, \tag{3.7}$$

где вектор $\hat{q} = Q_2\tilde{q}$. Решение уравнения (3.6) определяется [13, с. 27] формулой, не зависящей от начального условия:

$$\hat{x}^1(t) = -\sum_{j=0}^{l_M-1} \frac{d^j}{dt^j} M^j\big(\bar{B}(z)w(t)\big), \quad t \geqslant 0. \tag{3.8}$$

В (3.6) предполагаем, что функция w $(l_M - 1)$ раз непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим (3.7) и пару матриц $\big(\hat{A}, \hat{B}(z)\big)$. В силу (3.1)

$$\mathrm{rank}[\lambda E_{n_2+n_3} - \hat{A}, \hat{B}(e^{-\lambda h})] = n_2 + n_3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.9}$$

а это равносильно равенству $\mathrm{rank}[\hat{B}(e^{-\lambda h}), \ldots, \hat{A}^{n_2+n_3-1}\hat{B}(e^{-\lambda h})] = n_2 + n_3$ (здесь и далее под рангом полиномиальной матрицы понимаем [18, с. 143] наибольший порядок неравного тождественному нулю ее минора). Выберем столбцы $\hat{b}_{s_i}(z)$, $i = \overline{1,\theta}$, $1 \leqslant \theta \leqslant r + r_T$, матрицы $\hat{B}(z)$ так, чтобы имели место равенства

$$\mathrm{rank}[\hat{b}_{s_1}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_1-1}\hat{b}_{s_1}(z), \hat{b}_{s_2}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_2-1}\hat{b}_{s_2}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_j-1}\hat{b}_{s_j}(z)] =$$

$$= \mathrm{rank}[\hat{b}_{s_1}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_1-1}\hat{b}_{s_1}(z), \hat{b}_{s_2}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_2-1}\hat{b}_{s_2}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_j-1}\hat{b}_{s_j}(z), \hat{A}^{\nu_j}\hat{b}_{s_j}(z)] =$$

$$= \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j, \quad j = \overline{1, \theta}, \quad \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\theta = n_2 + n_3.$$

Обозначим

$$\hat{A}_{\hat{b}}(z) = [\hat{b}_{s_1}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_1 - 1}\hat{b}_{s_1}(z), \hat{b}_{s_2}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_2 - 1}\hat{b}_{s_2}(z), \ldots, \hat{A}^{\nu_\theta - 1}\hat{b}_{s_\theta}(z)].$$

Учитывая, что $\mathrm{rank}\hat{A}_{\hat{b}}(e^{-\lambda h}) = n_2 + n_3$, построим [18, с. 139] квадратную полиномиальную матрицу $H(z)$, $\det H(z) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, такую, что матрица $H(z)\hat{A}_{\hat{b}}(z)$ будет иметь структуру

$$H(z)\hat{A}_{\hat{b}}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & * & \ldots & * \\ * & * & \ldots & * \end{bmatrix},$$

где символом « $*$ » обозначены некоторые полиномы, причем полиномы, стоящие на побочной диагонали, отличны от тождественного нуля. Заметим, что умножение матрицы $\hat{A}_{\hat{b}}(z)$ слева на матрицу $H(z)$ равносильно элементарным преобразованиям ее строк. Положим $\breve{A}(z) = H(z)\hat{A}H^{-1}(z)$, $\breve{B}(z) = H(z)\hat{B}(z)$. Далее будем считать, что в матрице $\hat{A}_{\hat{b}}(z)$ номер $s_1 = l$, $1 \leqslant l \leqslant r + r_T$. Тогда l-ый столбец матрицы $\breve{B}(z)$ будет иметь вид $\breve{b}_l(z) = \mathrm{col}[0, \ldots, 0, \breve{b}(z)]$, где $\breve{b}(z)$ — некоторый полином. Поскольку имеет место (3.9), то

$$\mathrm{rank}[\lambda E_{n_2+n_3} - \breve{A}(e^{-\lambda h}), \breve{B}(e^{-\lambda h})] = n_2 + n_3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

В силу последнего условия можно построить [19] полиномиальную матрицу $\breve{K}(z)$ такую, что

$$\mathrm{rank}[\lambda E_{n_2+n_3} - D(e^{-\lambda h}), \breve{b}_l(e^{-\lambda h})] = n_2 + n_3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.10}$$

где $D(z) = \breve{A}(z) + \breve{B}(z)\breve{K}(z)$. Положим $\bar{x}(t) = H(z)\hat{x}^2(t)$,

$$w(t) = \breve{K}(z)\bar{x}(t) + \gamma\bar{\xi}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3.11}$$

и рассмотрим вспомогательную линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{\bar{x}}(t) = D(z)\bar{x}(t) + \breve{b}_l(z)\bar{\xi}(t), \tag{3.12}$$

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = v(t), \; t > 0, \tag{3.13}$$

где $\mathrm{col}[\bar{x}, \bar{\xi}] \in \mathbb{R}^{n_2+n_3+1}$ — вектор-столбец решения системы (3.12)–(3.13), а $v(t)$, $t > 0$, — скалярное кусочно-непрерывное управляющее воздействие. Необходимости конкретизировать начальное условие системы (3.12)–(3.13) для дальнейших рассуждений нет.

Из (3.10) следует, что

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda E_{n_2+n_3} - D\big(e^{-\lambda h}\big) & -\breve{b}_l\big(e^{-\lambda h}\big) & 0 \\ 0_{1\times(n_2+n_3)} & \lambda & 1 \end{bmatrix} = n_2 + n_3 + 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.14}$$

т. е. система (3.12)–(3.13) является спектрально управляемой [20].

Замечание 2. Если вектор $\breve{b}_l(z) = \breve{b}_l$, то есть не зависит от z, то вместо системы (3.12)–(3.13) можно использовать систему вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = D(z)\bar{x}(t) + \breve{b}_l\bar{\xi}(t). \tag{3.15}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что вектор $\breve{b}_l = \mathrm{col}[0, 0, \ldots, 0, 1]$. Этого всегда можно достичь невырожденным преобразованием переменных с постоянной матрицей $U : \overline{\overline{x}} = U\overline{x}$, $\Big(U\breve{b}_l = \mathrm{col}[0, 0, \ldots, 0, 1]\Big)$. Система (3.15) в силу (3.10) является спектрально управляемой [20].

В работах [2–4] показано, что линейную автономную дифференциально-разностную систему с одним входом при наличии свойства спектральной управляемости всегда можно замкнуть линейной обратной связью, обеспечивающей ее точечную вырожденность в направлениях, отвечающих компонентам разомкнутой системы. Используя методику работы [3], замкнем систему (3.12)–(3.13) регулятором

$$v(t) = \bar{I}_1(z)\bar{x}(t) + I_2(z)\bar{\xi}(t) + I_3(z)\bar{y}(t), \tag{3.16}$$

$$\dot{\bar{y}}(t) = \bar{R}_1(z)\bar{x}(t) + R_2(z)\bar{\xi}(t) + R_3(z)\bar{y}(t),\ t > 0, \tag{3.17}$$

где вспомогательная переменная $\bar{y} = \mathrm{col}[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s] \in \mathbb{R}^s$, s — некоторое натуральное число,

$$\bar{I}_1(z) \in \mathbb{I}^{1\times(n_2+n_3)}[z], \quad I_2(z) \in \mathbb{I}^{1\times1}[z], \quad I_3(z) \in \mathbb{I}^{1\times s}[z],$$

$$\bar{R}_1(z) \in \mathbb{R}^{s\times(n_2+n_3)}[z], \quad R_2(z) \in \mathbb{R}^{s\times1}[z], \quad R_3(z) \in \mathbb{R}^{s\times s}[z].$$

Пусть $\bar{X} = \mathrm{col}[\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{y}]$, тогда замкнутая система (3.12)–(3.13), (3.16)–(3.17) будет иметь вид

$$\dot{\bar{X}}(t) = \begin{bmatrix} D(z) & \breve{b}_l(z) & 0_{(n_2+n_3)\times s} \\ \bar{I}_1(z) & I_2(z) & I_3(z) \\ \bar{R}_1(z) & R_2(z) & R_3(z) \end{bmatrix} \bar{X}(t), \quad t > 0. \tag{3.18}$$

Параметры $\bar{I}_1(z), I_2(z), I_3(z), \bar{R}_1(z), R_2(z), R_3(z)$ выбираем таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: 1) действительные части спектральных значений системы (3.18) были отрицательные, таким образом, обеспечиваем ее асимптотическую устойчивость; 2) система (3.18) была точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым n_2+n_3+s компонентам ее решения, т. е. компонентам $\bar{x}, \bar{\xi}, \mathrm{col}[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}]$. Другими словами, найдется момент времени $t_1 > 0$ такой, что, каковы бы ни были начальные условия $\bar{X}(t)$, $t \leqslant 0$, будут выполняться тождества

$$\bar{x}(t) \equiv 0, \quad \bar{\xi}(t) \equiv 0, \quad \mathrm{col}[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}] \equiv 0, \quad t \geqslant t_1.$$

Замечание 3. Система (3.18) называется точечно вырожденной [21] в момент времени $t_1 > 0$, если существует ненулевой вектор $g \in \mathbb{R}^{n_2+n_3+s+1}$ такой, что $g'\bar{X}(t) = 0$ для всех начальных условий системы (3.18). Вектор g называют вектором (направлением) вырождения системы (3.18). Известно, что если система является точечно вырожденной в момент времени $t_1 > 0$ в направлении вектора g, то она точечно вырождена в этом же направлении при всех $t > t_1$.

В соотношениях (2.1)–(2.4) положим

$$K(z) = \breve{K}(z)H(z)Q_2 = \mathrm{col}[K_1(z), K_2(z)], \quad K_1(z) \in \mathbb{R}^{r\times n}[z], \quad K_2(z) \in \mathbb{R}^{r_T\times n}[z],$$

$$I_1(z) = \bar{I}_1(z)H(z)Q_2, \quad R_1(z) = \bar{R}_1(z)H(z)Q_2,$$

матрицы $T, S, R_i(z), I_i(z)$, $i = 2, 3$, указаны ранее. Регулятор (2.1)–(2.4) построен.

Покажем теперь, что построенный регулятор действительно обеспечивает системе $\Sigma 1$, а с учетом леммы 2 и системе Σ, равенство (1.4). Для этого рассмотрим систему (3.2). Перейдем в ней к новым переменным по формуле

$$X(t) = \mathrm{diag}[Q^{-1}, 1, E_s]\,\mathrm{diag}[E_{n_1}, H^{-1}(z), 1, E_s]\,\mathrm{col}[\hat{x}^1(t), \bar{X}(t)]$$

и, используя каноническое представление матриц A_0, A, получим систему, замкнутую регулятором (2.1)–(2.4), т. е. систему (3.18) и (3.6):

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} M & 0_{n_1\times(n_2+n_3+s+1)} \\ 0_{(n_2+n_3+s+1)\times n_1} & E_{n_2+n_3+s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \bar{X}(t) \end{bmatrix}\right) = \\ = \begin{bmatrix} E_{n_1} & V_1(z) \\ 0_{(n_2+n_3+s+1)\times n_1} & V_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \bar{X}(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где $V_2(z) = \begin{bmatrix} D(z) & \breve{b}_l(z) & 0_{(n_2+n_3)\times s} \\ \bar{I}_1(z) & I_2(z) & I_3(z) \\ \bar{R}_1(z) & R_2(z) & R_3(z) \end{bmatrix}$, $V_1(z)$ — некоторая полиномиальная матрица порядка $n_1 \times (n_2 + n_3 + s + 1)$,

$$\det \begin{bmatrix} \lambda M - E_{n_1} & -V_1(z) \\ 0_{(n_2+n_3+s+1)\times n_1} & \lambda E_{n_2+n_3+s+1} - V_2(z) \end{bmatrix} =$$

$$= \det[\lambda M - E_{n_1}] \det[\lambda E_{n_2+n_3+s+1} - V_2(z)] = \det[\lambda E_{n_2+n_3+s+1} - V_2(z)].$$

Получили, что собственные значения системы (3.2) и системы (3.18) совпадают.

Итак, в силу выбора матриц $I_i(z), R_i(z)$, $i = \overline{1,3}$, найдется момент времени $\tilde{t}_1$ такой, что $\bar{x}(t) \equiv 0$, $\bar{\xi}(t) \equiv 0$, $\mathrm{col}[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{s-1}] \equiv 0$, $t \geqslant \tilde{t}_1$ при любом начальном условии. Из (3.11) следует, что $w(t) \equiv 0$, $t \geqslant \tilde{\tilde{t}}_1$, поэтому в силу (3.8) и того, что $\bar{x}(t) = H(z)\hat{x}^2(t)$, имеем равенство $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1 = \tilde{\tilde{\tilde{t}}}_1 + mh$. С учетом того, что $\widehat{x} = Q\widetilde{x}$, и леммы 2 следует равенство (1.4) при $t \geqslant t_1$.

Замечание 4. В общем случае решение системы (1.1), замкнутой регулятором (2.1)–(2.4), будет являться кусочно-непрерывным. Чтобы добиться непрерывности решения, можно взять в качестве начальных условий в регуляторе (2.1)–(2.4) набор данных, построенный по следующему принципу. Пусть $\widetilde{C}^k, k = 1, 2 \ldots,$ — класс функций $\varphi = \mathrm{col}[\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3]$ ($\varphi^1 \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $\varphi^2 \in \mathbb{R}$, $\varphi^3 \in \mathbb{R}^s$), определенных на отрезке $[-ih, 0]$, $k-1$ раз непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих граничным условиям

$$\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \begin{bmatrix} \varphi^1(0) \\ \varphi^2(0) \\ \varphi^3(0) \end{bmatrix} = \frac{d^j}{dt^j} \begin{bmatrix} D(z) & \breve{b}_l(z) & 0_{(n_2+n_3)\times s} \\ \bar{I}_1(z) & I_2(z) & I_3(z) \\ \bar{R}_1(z) & R_2(z) & R_3(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^1(0) \\ \varphi^2(0) \\ \varphi^3(0) \end{bmatrix},$$

$j = \overline{0, k-1}$, $\varphi^1(0) = Q_2 q$, i — наибольшая степень переменной z системы (3.18). В качестве начальных условий для регулятора (2.1)–(2.4) возьмем следующий набор данных:

$$\psi(t) \equiv 0, \quad t \leqslant 0, \quad \mathrm{col}[x(t), \xi(t), y(t)] = \mathrm{col}[Q_1 q, \varphi(t)], \quad t \in [-ih, 0], \quad \varphi \in \widetilde{C}^k(q).$$

§ 4. Заключение. Пример

Для линейной автономной регулярной алгебро-дифференциальной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении представлена процедура построения регулятора, обеспечивающего успокоение решения исходной системы и асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Отличительной чертой работы является возможность применения указанного регулятора к системе, не обладающим свойством полной управляемости.

Пример 1. Рассмотрим линейную автономную регулярную алгебро-дифференциальную систему Σ с матрицами ($n = 4$)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2.$$

Для данной системы нарушается условие полной управляемости (1.3). Вычисляем матрицы $T = \mathrm{col}[1, 0]$, $S = 1$, $\widetilde{B}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 1-z & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Несложная проверка показывает, что условие

(3.1) выполнено. Используя процедуру построения регулятора (§ 3), строим (2.1)–(2.4). Подробные выкладки построения регулятора не являются принципиально сложными, и в силу их громоздкости они не приводятся. Окончательный результат имеет вид

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \psi(t),$$

$$\psi(t) = \psi(t - \ln 2) + [0, 0, -1, 0]x(t) + \xi(t),$$

$$\dot{\xi}(t) = \left(\frac{z^3}{448} - \frac{7z^2}{96} + \frac{7z}{8} - \frac{241}{21}\right)\xi(t) -$$

$$-\frac{1}{10624320}\int_0^{\ln 2}(3956044z^4 - 120155220z^3 + 1150334440z^2 - 4164161760z + 5049903616)e^s\xi(t-s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{10624320}\int_0^{\ln 2}(1135158z^3 - 32334612z^2 + 268466448z - 671659392)\xi(t-s)\,ds +$$

$$+ (z^4 - 30z^3 + 280z^2 - 960z + 1024)y(t),$$

$$\dot{y}(t) = R_1(z)x(t) + R_2(z)\xi(t) + R_3(z)y(y), \quad t > 0,$$

где

$$R_1(z) = \Bigg[0, 0, \frac{989011z^4}{1189923840} - \frac{47846809z^3}{1784885760} + \frac{449241179z^2}{1427908608} + \frac{1172092819z}{3569771520} - \frac{673}{112896},$$

$$\frac{989011z^4}{1189923840} - \frac{98660651z^3}{3569771520} + \frac{609823967z^2}{1784885760} - \frac{109198619}{446221440}\Bigg],$$

$$R_2(z) = \frac{886572821z}{2379847680} - \frac{z^2}{200704} - \frac{43751303}{198320640},$$

$$R_3(z) = -\frac{z^3}{448} + \frac{7z^2}{96} - \frac{7z}{8} + \frac{10}{21}.$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости спектр замкнутой системы (1.1), (2.1)–(2.4) был взят в виде множества $\{-1; -2; -3; -4\}$, т. е. характеристический полином замкнутой системы имеет вид $d(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. Метельский А.В. Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
3. Метельский А.В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1453.
4. Метельский А.В. Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 3–11.
5. Марченко В.М. К управляемости линейных систем с последействием // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083–1086.
6. Хартовский В.Е., Павловская А.Т. Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–79.
7. Хартовский В.Е. Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 3–11.
8. Хартовский В.Е. Задача полной управляемости и ее обобщение для линейных автономных систем нейтрального типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 15–28.
9. Ким Д.П. Теория автоматического управления: В 2 т. М.: Физматлит, 2003. 288 с.

10. Bhat K.P., Koivo H.N. Characterization of controllability and observability of time-delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1976. Vol. 21. № 2. P. 292–293.
11. Хартовский В.Е., Урбан О.И. Управление линейными автономными алгебро-дифференциальными системами посредством динамических регуляторов // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. 2014. № 1. С. 36–42.
12. Хартовский В.Е., Бойко В.К. Управляемость регулярных алгебро-дифференциальных систем // Вестник БГУ. Физика. Математика. Информатика. 2012. № 1. С. 95–99.
13. Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000. 222 с.
14. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
15. Хартовский В.Е. Задача успокоения решения алгебро-дифференциальных вполне регулярных систем с последействием // Доклады НАН Беларуси. 2012. Т. 56. № 6. С. 5–11.
16. Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И. Успокоение решения систем нейтрального типа с многими запаздываниями посредством обратной связи // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 40–51.
17. Метельский А.В., Урбан О.И., Хартовский В.Е. Успокоение решения линейных автономных дифференциально-разностных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 2. С. 40–49.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 576 с.
19. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. № 6. P. 543–550.
20. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions // SIAM Journal on Control and Optimization. 1978. Vol. 16. № 4. P. 599–645.
21. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

Поступила в редакцию 20.06.2015

Урбан Ольга Ивановна, аспирант, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Республика Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: urban_ola@mail.ru

O. I. Urban

On the issue of calming the solution of a linear autonomous algebraic-differential system with control delay by means of a dynamic controller

Keywords: algebraic-differential system, regular pair of matrices, delay, controllability, controller, feedback.

MSC: 93B05, 93C15

For a regular linear autonomous algebraic-differential system with commensurable delays in the controllability, the problem of calming the solution through the feedback dynamic control is solved. The main idea of investigation is to select the controller parameters so that the closed system becomes point-degenerated in directions corresponding to phase components of the source (open) system. For this purpose the source system is converted into two subsystems, one of which corresponds to the algebraic part, and the other — to the differential part. Further, for the object corresponding to the differential part, a dynamic controller is built that provides degeneration of the corresponding phase components. A distinctive feature of this research is the ability to provide a closed system with a predefined finite spectrum, by means of which a closed system can be made asymptotically stable. The possibility of such a control over a system in the absence of its complete controllability is investigated. Within the proof of the main result a gradual procedure for constructing such a controller is presented. The results of the study are illustrated by the specific numerical example.

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 3

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Osipov Yu.S. On stabilization of motion of controllable object with delay in control system, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1963, vol. 6, pp. 3–15 (in Russian).
2. Metel'skii A.V. Complete damping of a linear autonomous differential-difference system by a controller of the same type, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1219–1235.
3. Metel'skii A.V. Spectral reduction, complete damping, and stabilization of a delay system by a single controller, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1405–1422.
4. Metel'skii A.V. Complete calming and stabilization of delay systems using spectral reduction, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 1, pp. 1–19.
5. Marchenko V.M. On the controllability of linear systems with aftereffect, *Sov. Phys., Dokl.*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 557–559.
6. Khartovskii V.E., Pavlovskaya A.T. Complete controllability and controllability for linear autonomous systems of neutral type, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 5, pp. 769–784.
7. Khartovskii V.E. A generalization of the problem of complete controllability for differential systems with commensurable delays, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 6, pp. 847–855.
8. Khartovskii V.E. Complete controllability problem and its generalization for linear autonomous systems of neutral type, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 6, pp. 755–769.
9. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (Theory of automatic control), Moscow: Fizmatlit, 2003, 288 p.
10. Bhat K.P., Koivo H.N. Characterization of controllability and observability of time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, vol. 21, no. 2, pp. 292–293.
11. Khartovskii V.E., Urban O.I Control of linear autonomous algebraic-differential systems by dynamic controllers, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series Of Physical-Mathematical Sciences*, 2014, no. 1, pp. 36–42 (in Russian).
12. Khartovskii V.E., Boyko V.K. Controllability of regular algebraic-differential systems, *Vestn. Beloruss. Gos. Univ., Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.*, 2012, no. 1, pp. 95–99 (in Russian).
13. Boyarintsev Yu.E. *Lineinye i nelineinye algebro-differentsial'nye sistemy* (Linear and nonlinear algebraic-differential systems), Novosibirsk: Nauka, 2000, 222 p.
14. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 358 p. Translated under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem*, Moscow: Editorial URSS, 2004, 400 p.
15. Khartovskii V.E. The problem of calming solution of algebraic-differential completely regular systems with the aftereffect, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2012, vol. 56, no. 6, pp. 5–11 (in Russian).
16. Metel'skii A.V., Khartovskii V.E., Urban O.I. Calming the solution of systems of neutral type with many delays using feedback, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 40–51 (in Russian).
17. Metel'skii A.V., Urban O.I., Khartovskii V.E. Damping of a solution of linear autonomous difference-differential systems with many delays using feedback, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 202–211.
18. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* (Theory of matrices), Moscow: Nauka, 1988, 576 p.
19. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 6, pp. 543–550.
20. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1978, vol. 16, no. 4, pp. 599–645.
21. Hale J. *Theory of functional differential equations*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1977, 365 p. Translated under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Mir, 1984, 421 p.

Received 20.06.2015

Urban Ol'ga Ivanovna, Post-Graduate Student, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: urban_ola@mail.ru