УДК 517.977

© *Д. А. Серков, А. Г. Ченцов*

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ И ОПЕРАТОРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ УДЕРЖАНИЯ [1]

Для игровой задачи удержания траекторий абстрактной динамической системы в заданном множестве исследуются соотношения метода программных итераций и конструкций, связанных с построением операторно выпуклой оболочки множества посредством предоболочки. В рамках данных соотношений процедура построения упомянутой оболочки реализуется в форме, двойственной по отношению к процедуре на основе метода программных итераций. Решение задачи удержания определяется в классе многозначных квазистратегий (неупреждающих откликов на реализации неопределенных факторов процесса). Показано, что множество успешной разрешимости задачи удержания определяется в виде предела итерационной процедуры на пространстве множеств, элементами которых являются позиции игры, а также установлена структура разрешающих квазистратегий.

Ключевые слова: программные итерации, операторная выпуклость, квазистратегии.

Введение

Статья продолжает [1–3] и посвящена исследованию соотношений абстрактной версии метода программных итераций (МПИ) и конструкций [4], связанных с построением операторно выпуклой оболочки множества посредством предоболочки [4, с. 12]. Рассматривается игровая задача удержания траекторий абстрактной системы в заданном множестве. Конструкции настоящей работы лежат в русле исследований школы Н. Н. Красовского по теории оптимального управления и теории дифференциальных игр.

В работах [5, 6] Н. Н. Красовского и А. И. Субботина установлена фундаментальная теорема об альтернативе в нелинейной дифференциальной игре. Данная теорема определила пути развития теории дифференциальных игр и послужила основой построения эффективных методов решения. В своем непосредственном виде эта теорема определяет разбиение пространства позиций игры в сумму двух множеств, одно из которых отвечает успешной разрешимости задачи сближения (наведения) одним из игроков, а второе — успешной разрешимости задачи уклонения другим игроком. Упомянутые игроки — стороны конфликта — имеют, таким образом, противоположные цели и стремятся к их достижению, используя позиционные стратегии [5–7]. Важное обобщение упомянутой теоремы было получено А. В. Кряжимским [8] для управляемых систем, не удовлетворяющих традиционному условию липшицевости по фазовой переменной.

Исследуемая в настоящей работе задача удержания может рассматриваться как вариант задачи сближения в пределах заданных фазовых ограничений с гиперплоскостью пространства позиций, отвечающей моменту окончания процесса (возможна и «укладывается» в постановку настоящей статьи задача удержания на бесконечном промежутке). Данная задача, с одной стороны, возникает во многих приложениях, а с другой — играет роль важного элемента решения дифференциальной игры сближения–уклонения в виде требования о сохранении траектории управляемой системы в пределах стабильного моста Н. Н. Красовского [7, § 39].

В качестве естественного метода решения дифференциальных игр можно считать программные конструкции [6, 7, 9, 10], которые в непосредственном варианте определили решение

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления» при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15–01–07909, № 13–01–00304).

так называемых регулярных дифференциальных игр. В более общих случаях дифференциальных игр оказалось возможным реализовать идею решения на основе программного управления в режиме итераций.

В этой связи напомним работы [11–17], в которых рассматривались конструкции решения на основе МПИ, относящиеся к случаю дифференциальных игр с традиционными условиями на систему (непрерывность, локальная липшицевость, подлинейный рост). В связи с упомянутым обобщением теоремы об альтернативе, полученным А. В. Кряжимским, последовали работы по МПИ для систем, удовлетворяющих более общим условиям, подобным [8]; см., например, [18] и ряд последующих работ одного из авторов. Названные исследования связывались с конструкциями решения в классе многозначных квазистратегий (см. [12–14, 18, 19]). Кроме того, была отмечена связь одной из процедур на основе МПИ и методов, используемых в аксиоматической теории выпуклого анализа [4], а именно: итерационная процедура [2], двойственная к реализуемой по схеме МПИ, допускает естественное толкование в терминах предоболочки [4]. Упомянутая связь исследовалась [2] для конструкций решения «обычных» дифференциальных игр.

Несколько позднее (см. [1, 3] и др.) построения на основе МПИ были распространены на игровые задачи с абстрактной динамикой, включая конструирование так называемой прямой версии этого метода (см. [20–22]).

В настоящем исследовании подход [2] распространяется на упомянутый класс задач с абстрактной динамикой: имея в виду схему [1,3] для задачи удержания траекторий в множестве, определяющем фазовые ограничения, конструируется как прямая, так и двойственная итерационная процедура на пространстве множеств, причем последняя имеет смысл построения операторно выпуклой оболочки пустого множества посредством последовательного применения оператора предоболочки. Показано, что итогом применения прямой процедуры на основе МПИ является множество успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий, причем не предполагается, что промежуток управления является конечным.

§ 1. Общие понятия

Обозначения и определения общего характера. В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\triangleq$ — равенство по определению; def заменят фразу «по определению».

Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) подмножеств (п/м) произвольного множества T. Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из множества A в множество B (см. [23]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f \mid C) \in B^C$ есть def сужение f на множество C: $(f \mid C)(x) \triangleq f(x)\ \forall x \in C$. Если z есть упорядоченная пара (УП), то есть $z = (a, b)$ для некоторых объектов a и b, то через $\mathbf{pr}_1(z)$ и $\mathbf{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathbf{pr}_1(z), \mathbf{pr}_2(z))$; при этом ясно, что $\mathbf{pr}_1(z) = a$ и $\mathbf{pr}_2(z) = b$. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора.

Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$ (тогда $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \ldots\}$); кроме того, обозначим $\overrightarrow{m, \infty} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_0 \mid j \geqslant m\}\ \forall m \in \mathbb{N}_0$.

Если H — непустое множество и $\alpha \in H^H$, то последовательность

$$(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \mapsto H^H \tag{1.1}$$

(степеней α) определяется следующими условиями: 1) $\alpha^0(h) \triangleq h\ \forall h \in H$; 2) $\alpha^k \triangleq \alpha \circ \alpha^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. В частности, (1.1) определено в случае, когда H — семейство (множеств). В этом случае введем также понятие бесконечной (точнее, счетной) степени, следуя [1, раздел 2]: если $\mathcal{E}$ — семейство, $\alpha \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}}$, то $\overset{\infty}{\alpha} \in \mathcal{P}(\cup_{E \in \mathcal{E}} E)^{\mathcal{E}}$ таково, что

$$\overset{\infty}{\alpha}(M) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \alpha^k(M) \qquad \forall M \in \mathcal{E}. \tag{1.2}$$

Отметим, что для всяких множества E, последовательности $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ и $A \in \mathcal{P}(E)$, как обычно,

$$((A_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)\&(A_{j+1} \subset A_j \ \forall j \in \mathbb{N})), \tag{1.3}$$

$$((A_i)_{i\in\mathbb{N}} \uparrow A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)\&(A_j \subset A_{j+1} \ \forall j \in \mathbb{N})). \tag{1.4}$$

В связи с (1.3) отметим очевидное свойство: если

$$\alpha(L) \subset L \qquad \forall L \in \mathcal{E}, \tag{1.5}$$

то при $M \in \mathcal{E}$ имеем $(\alpha^k(M))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0}$ и при этом для множества $\overset{\infty}{\alpha}(M)$ выполнено

$$(\alpha^k(M))_{k\in\mathbb{N}_0} \downarrow \overset{\infty}{\alpha}(M);$$

заметим здесь же, что (в рассматриваемом случае (1.5))

$$\overset{\infty}{\alpha}(M) = \bigcap_{k\in\overrightarrow{m,\infty}} \alpha^k(M) \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Аналогичное применение (1.4) для отображений со свойством, «противоположным» (1.5), будет отмечено в связи с конструкцией на основе операторной выпуклости.

Элементы топологии. Если (V,τ) есть топологическое пространство (ТП) и $Z \in \mathcal{P}(V)$, то $\tau|_Z \triangleq \{Z \cap G : G \in \tau\}$ есть топология Z, реализующая в виде ТП $(Z, \tau|_Z)$ подпространство (V,τ). Если (Z,τ) и (Z',τ') суть ТП, то через $\tau \otimes \tau'$ обозначаем далее стандартную топологию произведения (Z,τ), (Z',τ') (см., например, [24, п. 2.3]), базу которой составляют всевозможные прямоугольники $G \times G'$, $G \in \tau$, $G' \in \tau'$. Если (V,τ) — произвольное ТП и $v \in V$, то через $\mathbf{N}_\tau(v)$ ниже обозначается фильтр окрестностей v [25, гл. I]. В дальнейшем будет использоваться вариант оснащения множества (метризуемой) дискретной топологией, отождествляемой с булеаном соответствующего множества.

Пространства с выпуклостью. Пространства с выпуклостью соответствуют оснащению того или иного непустого множества специальным семейством его подмножеств (см. [4, с. 9]), что на идейном уровне подобно оснащению топологией. Разумеется, обычная выпуклость, реализуемая в линейных пространствах, «укладывается» в аксиоматическую конструкцию [4]. Другой естественный пример доставляет семейство замкнутых множеств в ТП, то есть замкнутая топология в терминологии П. С. Александрова [26, с. 98]. Известны и другие примеры. Весьма важным элементом аксиоматической теории выпуклости представляются понятия выпуклой оболочки, а также предоболочки. Оказалось [2], что схема на основе МПИ исчерпывающим образом характеризуется двойственной процедурой на основе варианта предоболочки для так называемой операторной выпуклости (см. [4, с. 11]). По существу, конструкцию на основе МПИ можно (и в [2] это было сделано для случая нелинейной дифференциальной игры общего вида) истолковать в терминах предоболочки и на этой основе реализовать одно из множеств, отвечающих альтернативному разбиению в игре сближения–уклонения, в виде выпуклой оболочки пустого множества. В данной работе это представление распространяется на случай игровой задачи удержания для системы с абстрактной динамикой.

Напомним (см. [4, с. 9]), что выпуклостью произвольного непустого множества $\mathbb{H}$ называется всякое семейство $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$, для которого

$$(\mathbb{H} \in \mathcal{H})\&(\bigcap_{H\in\mathcal{C}} H \in \mathcal{H} \ \forall \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H})).$$

Через (CONV)[$\mathbb{H}$] обозначим множество всех выпуклостей $\mathbb{H}$, то есть

$$(\mathrm{CONV})[\mathbb{H}] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H})) \mid (\mathbb{H} \in \mathcal{H})\&(\bigcap_{H\in\mathcal{C}} H \in \mathcal{H}\ \forall \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}))\}. \tag{1.6}$$

Если $\mathcal{H} \in (\mathrm{CONV})[\mathbb{H}]$, то всякому множеству $S \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$ сопоставляется непустое (см. (1.6)) семейство $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\}$ всех множеств из $\mathcal{H}$, содержащих S, а стало быть, определено пересечение

$$(\mathcal{H}\text{–hull})[S] \triangleq \bigcap_{H\in[\mathcal{H}](S)} H \in \mathcal{P}(\mathbb{H}), \tag{1.7}$$

которое: 1) содержится в $\mathcal{H}$; 2) содержит S. Множество в левой части (1.7) будем называть $\mathcal{H}$-выпуклой оболочкой S. Ясно, что

$$(\mathcal{H}\text{–hull})[S] \subset \Lambda \qquad \forall \Lambda \in [\mathcal{H}](S).$$

Если $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ и $J \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathcal{Q}}$, то определена соответствующая J операторная выпуклость множества $\mathbb{H}$:

$$(J\text{–conv})[\mathbb{H}] \triangleq \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid \forall B \in \mathcal{Q}\ \ (B \subset A) \Rightarrow (J(B) \subset A)\}; \tag{1.8}$$

согласно [4, теорема 1.3] $(J\text{–conv})[\mathbb{H}] \in (\mathrm{CONV})[\mathbb{H}]$ (семейство $\mathcal{Q}$ есть область определения J и, следовательно, определяется по J однозначно).

Следуя [4, с. 12], введем понятие (выпуклой) предоболочки, определяя множество

$$\begin{aligned}(\text{p–HULL})[\mathbb{H}] \triangleq \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathcal{P}(\mathbb{H})} \mid (E \subset g(E)\ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{H}))\,\&\\ \&(\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{H})\ \forall E' \in \mathcal{P}(\mathbb{H})\ (E \subset E') \Rightarrow (g(E) \subset g(E')))\};\end{aligned} \tag{1.9}$$

отображения из множества (1.9) называем предоболочками $\mathbb{H}$.

Определение (1.8) применимо, в частности, в случае, когда $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{H})$ и $J \in (\text{p–HULL})[\mathbb{H}]$. Согласно [4, лемма 1.1] в этом случае

$$(J\text{–conv})[\mathbb{H}] = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid A = J(A)\} \qquad \forall J \in (\text{p–HULL})[\mathbb{H}]. \tag{1.10}$$

Абстрактная динамическая система. Рассматривается динамическая игра удержания с элементами информационной памяти; приводимые ниже построения являются развитием [1, 3], но имеют некоторые особенности. Новым обстоятельством здесь является и то, что приводимые ниже построения связываются на абстрактном уровне с представлениями в терминах операторной выпуклости, что раньше было сделано [2] в случае «обычной» дифференциальной игры.

В настоящем разделе используются понятия и некоторые обозначения [1, раздел 3]. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое подмножество (п/м) I вещественной прямой $\mathbb{R}$ в качестве аналога промежутка управления и непустое множество X — соответствующее фазовое пространство. Полагаем $D \triangleq I \times X$, получая аналог пространства позиций. Отображения из I в X рассматриваем в качестве аналога траекторий. В этой связи напомним, что X^I — множество всех таких отображений (среди них будут «определяться» траектории). Точнее, мы выделяем множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$, элементы которого будут использоваться в качестве траекторий «системы». Далее фиксируем непустые множества Y и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$. Элементы $\omega \in \Omega$ рассматриваем в качестве реализаций неопределенных факторов. Наконец, фиксируем (в качестве аналога «системы») отображение

$$\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}). \tag{1.11}$$

Если $z \in D$ (то есть $z = (t, x)$, где $t \in I$ и $x \in X$) и $\omega \in \Omega$, то (по смыслу) $\mathcal{S}(z, \omega) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C})$ есть множество всех траекторий «системы» (1.11), отвечающих начальной позиции z и согласованных с действием ω, где ω — конкретная реализация неопределенных факторов. В этой связи введем в рассмотрение множество $\mathbf{M}(\Omega,\mathbf{C}) \triangleq \mathcal{P}(\mathbf{C})^{\Omega}$ всех мультифункций (м/ф) на Ω со значениями в $\mathbf{C}$: $\alpha(\omega) \subset \mathbf{C}$ при $\omega \in \Omega$, $\alpha \in \mathbf{M}(\Omega,\mathbf{C})$.

Если $t \in I$, то введем $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leqslant t\}$, $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geqslant t\}$.

Если $\alpha \in \mathbf{M}(\Omega,\mathbf{C})$ и $t \in I$, то называем м/ф α t-неупреждающей, если $\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall \omega_2 \in \Omega\ \forall \xi \in \mathbf{I}_t$:

$$((\omega_1 \mid I_\xi) = (\omega_2 \mid I_\xi)) \Rightarrow (\{(h \mid I_\xi) : h \in \alpha(\omega_1)\} = \{(h \mid I_\xi) : h \in \alpha(\omega_2)\}). \tag{1.12}$$

Мы полагаем, что управляющая сторона может использовать для целей формирования траекторий непустозначные м/ф из $\mathbf{M}(\Omega,\mathbf{C})$ со свойством (1.12). В связи с этим полагаем также при $z \in D$, что

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_z \triangleq \{\alpha \in \mathbf{M}(\Omega,\mathbf{C}) \mid (\forall \omega \in \Omega\ \forall h \in \alpha(\omega)\ \exists h' \in \mathcal{S}(z,\omega) :\ (h \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}) = (h' \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}))\,\& \\ \&(\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall \omega_2 \in \Omega\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ ((\omega_1 \mid I_t) = (\omega_2 \mid I_t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\{(h \mid I_t) : h \in \alpha(\omega_1)\} = \{(h \mid I_t) : h \in \alpha(\omega_2)\}))\&(\alpha(\omega) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega)\}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Элементы (1.13) рассматриваем в качестве реализуемых процедур управления — (многозначных) квазистратегий. Имея ту или иную цель управления, мы будем считать ее достижимой, если в множестве (1.13) существует квазистратегия α_0, для которой требуемая цель достигается на каждой траектории из объединения всех множеств $\alpha_0(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Всюду в дальнейшем фиксируем топологию τ множества X; постулируем при этом, что (X,τ) есть T_2-пространство.

Условимся через $\mathfrak{F}$ обозначать семейство всех п/м X, замкнутых в (X,τ). Оснащаем D топологией $\mathfrak{D}$, определяемой в виде произведения топологий $\mathcal{P}(I)$ (дискретная топология I) и τ: $(D,\mathfrak{D})$ есть произведение ТП $(I,\mathcal{P}(I))$ и (X,τ). Условимся также, что

$$H\langle t\rangle \triangleq \{x \in X \mid (t,x) \in H\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D)\ \forall t \in I \tag{1.14}$$

(в (1.14) определены сечения п/м D, отвечающие идее фиксации момента времени). Используя (1.14) и определение $\mathfrak{D}$, легко видеть, что семейство $\mathbf{F}$ всех п/м D, замкнутых в ТП $(D,\mathfrak{D})$, допускает представление

$$\mathbf{F} = \{F \in \mathcal{P}(D) \mid F\langle t\rangle \in \mathfrak{F}\ \forall t \in I\} \tag{1.15}$$

(итак, $\mathbf{F}$ — семейство п/м D с замкнутыми сечениями).

Если $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(D)^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(D)$, то $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow H$ в соответствии с (1.3) равносильно условиям

$$(H = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i)\&(H_{j+1} \subset H_j\ \forall j \in \mathbb{N}).$$

Через $(\sigma\!-\downarrow)[D]$ условимся обозначать множество всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(D))$ таких, что для всяких $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(D)$

$$((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow H) \Rightarrow (H \in \mathcal{H}).$$

Таким образом, $(\sigma\!-\downarrow)[D]$ — множество всех секвенциально замкнутых относительно монотонной сходимости семейств п/м D. По аксиомам семейства замкнутых множеств в ТП имеем включение $\mathbf{F} \in (\sigma\!-\downarrow)[D]$.

Будем рассматривать множество X^I всех отображений из I в X, оснащаемое стандартной топологией $\otimes^I(\tau)$ тихоновской степени ТП (X,τ) при условии, что I используется в качестве индексного множества. Тогда

$$(X^I, \otimes^I(\tau)) \tag{1.16}$$

есть T_2-пространство, причем $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$. Последнее позволяет ввести топологию $\mathfrak{C} \triangleq \otimes^I(\tau)|_{\mathbf{C}}$ множества $\mathbf{C}$, индуцированную из (1.16). Ясно, что

$$(\mathbf{C},\mathfrak{C}) \tag{1.17}$$

также является непустым T_2-пространством. Иными словами, (1.17) есть множество $\mathbf{C}$ в топологии поточечной сходимости.

Введем в рассмотрение, следуя [1, п. 2.1], множество

$$\mathfrak{A}_D(\mathbf{F}) \triangleq \{\mathbf{f} \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)} \mid (\mathbf{f}(M) \subset M \ \forall M \in \mathcal{P}(D))\&(\mathbf{f}(F) \in \mathbf{F} \ \forall F \in \mathbf{F})\,\& \\ \&\,(\forall M \in \mathcal{P}(D) \ \forall M' \in \mathcal{P}(D) \ (M \subset M') \Rightarrow (\mathbf{f}(M) \subset \mathbf{f}(M')))\,\& \\ \&\,(\forall (M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}} \ \forall M \in \mathcal{P}(D) \ ((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M) \Rightarrow ((\mathbf{f}(M_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbf{f}(M)))\}. \quad (1.18)$$

Условия на «систему». В настоящем пункте будут сформулированы условия, подобные в логическом отношении [1, раздел 4].

Через $\mathbb{F}$ и $\mathfrak{K}$ будем обозначать семейства всех п/м $\mathbf{C}$, замкнутых и компактных [24, с. 196] в ТП (1.17) соответственно. В связи с определением $\mathfrak{K}$ отметим представление [27, (2.3.22)].

Условие 1 (Замкнутость образа). $\mathcal{S}(z,\omega) \in \mathbb{F} \ \ \forall z \in D \ \forall \omega \in \Omega$.

Заметим, что $X \times \mathbf{C}$ — непустое множество. Оснащаем данное множество естественной топологией $\tau \otimes \mathfrak{C}$ произведения ТП (X,τ) и $(\mathbf{C},\mathfrak{C})$. Итак,

$$(X \times \mathbf{C}, \tau \otimes \mathfrak{C}) \quad (1.19)$$

есть произведение двух упомянутых ТП. Кроме того, условимся через $\mathfrak{F}_\otimes$ обозначать семейство всех п/м $X \times \mathbf{C}$, замкнутых в ТП (1.19).

Условие 2 (Замкнутость графика). $\{(x,h) \in X \times \mathbf{C} \mid h \in \mathcal{S}((t,x),\omega)\} \in \mathfrak{F}_\otimes \ \forall t \in I \ \forall \omega \in \Omega$.

Условие 3 (Предкомпактность множеств–значений). $\forall t \in I \ \forall x \in X \ \forall \omega \in \Omega \ \exists H \in \mathbf{N}_\tau(x)$ $\exists K \in \mathfrak{K}$: $\mathcal{S}((t,y),\omega) \subset K \ \forall y \in H$.

Условие 4 (Аналог полугруппового свойства). $\forall z \in D$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall h \in \mathcal{S}(z,\omega)$, $\forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$, $\exists h' \in \mathcal{S}((t,h(t)),\omega)$:

$$(h \mid \mathbf{I}_t) = (h' \mid \mathbf{I}_t).$$

Всюду в дальнейшем полагаем условия 1–4 выполненными. Условия следуют [1, с. 163]; мы не требуем, однако, условий, касающихся склеек помеховых реализаций и траекторий до тех пор, пока в этом не возникнет необходимости.

§ 2. Программное поглощение и метод итераций

Следуя [1, с. 162], введем при $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$ и $\omega \in \Omega$ множество

$$\Pi(\omega \mid z, H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}(z,\omega) \mid (t, s(t)) \in H \ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\} \quad (2.1)$$

всех траекторий «системы», разрешающих задачу удержания в H при фиксированной помехе ω. С учетом (2.1) введем следующее определение оператора программного поглощения (ОПП) $\mathbf{A}$: полагаем, что

$$\mathbf{A} : \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D) \quad (2.2)$$

есть такое отображение, что

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega \mid z, H) \neq \varnothing \ \forall \omega \in \Omega\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D). \quad (2.3)$$

Мы рассматриваем (2.2), (2.3) как своеобразный игровой оператор, который, однако, можно связать с системой неигровых отображений: если $\omega \in \Omega$, то $\mathbb{A}_\omega(H) \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ определяется тем условием, что

$$\mathbb{A}_\omega(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega \mid z, H) \neq \varnothing\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D). \quad (2.4)$$

Связь ОПП и системы $\mathbb{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$, определяемой в (2.4), очевидна:

$$\mathbf{A}(H) = \bigcap_{\omega \in \Omega} \mathbb{A}_\omega(H) \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{2.5}$$

Замечание 1. Как установлено в [3, с. 136], при условии 4 каждый из операторов $\mathbb{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$, является идемпотентным. Итак,

$$\mathbb{A}_\omega \circ \mathbb{A}_\omega = \mathbb{A}_\omega \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Предложение 1. *Если $\omega \in \Omega$, то семейство $\mathbf{F}$ является инвариантным подпространством оператора $\mathbb{A}_\omega$, то есть*

$$\mathbb{A}_\omega(F) \in \mathbf{F} \qquad \forall F \in \mathbf{F}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем множество $F \in \mathbf{F}$. Тогда, в частности, $F \in \in \mathcal{P}(D)$ и согласно (1.15)

$$F\langle t\rangle \in \mathfrak{F} \qquad \forall t \in I. \tag{2.7}$$

Рассмотрим множество $\mathbb{A}_\omega(F) \in \mathcal{P}(D)$, определяемое подобно (2.4):

$$\mathbb{A}_\omega(F) \triangleq \{z \in F \mid \Pi(\omega \mid z, F) \neq \varnothing\}. \tag{2.8}$$

Покажем, что $\mathbb{A}_\omega(F) \in \mathbf{F}$. Пусть $t_* \in I$. Тогда согласно (2.7)

$$F\langle t_*\rangle \in \mathfrak{F} \tag{2.9}$$

и определено множество $\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle = \{x \in X \mid (t_*, x) \in \mathbb{A}_\omega(F)\}$. Требуется установить включение $\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle \in \mathfrak{F}$. Пусть

$$x_* \in \mathbf{cl}(\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle, \tau). \tag{2.10}$$

Используя теорему Биркгофа, подберем направленность $(\mathbf{D}, \preccurlyeq, h)$ в $\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle$, для которой

$$(\mathbf{D}, \preccurlyeq, h) \xrightarrow{\tau} x_*. \tag{2.11}$$

Это означает, что $(\mathbf{D}, \preccurlyeq)$ есть (непустое) направленное множество, а $h : \mathbf{D} \mapsto \mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle$. Тогда $h : \mathbf{D} \mapsto X$ и при этом

$$(t_*, h(\delta)) \in \mathbb{A}_\omega(F) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.12}$$

Тогда согласно (2.8) и (2.12) $(t_*, h(\delta)) \in F\ \forall \delta \in \mathbf{D}$. Кроме того, из (2.8) и (2.12) вытекает, что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) \neq \varnothing \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.13}$$

Поскольку $t_* \in I$, $x_* \in X$ и $\omega \in \Omega$, используя условие 3, подберем $H_* \in \mathbf{N}_\tau(x_*)$ и $K_* \in \mathfrak{K}$ так, что при этом

$$\mathcal{S}((t_*, y), \omega) \subset K_* \qquad \forall y \in H_*. \tag{2.14}$$

Напомним, что согласно (2.1)

$$\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, h(\delta)), \omega) \mid (t, s(t)) \in F\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\} \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.15}$$

В частности, из (2.15) имеем, что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) \subset \mathcal{S}((t_*, h(\delta)), \omega) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.16}$$

Из (2.11) вытекает по выбору H_*, что для некоторого $\delta_* \in \mathbf{D}$ имеет место

$$(\delta_* \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (h(\delta) \in H_*) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.17}$$

В силу (2.17) и (2.14) имеем теперь, что

$$(\delta_* \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (\mathcal{S}((t_*, h(\delta)), \omega) \subset K_*) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.18}$$

Из (2.13), (2.16) и (2.18) следует, что $\forall \delta \in \mathbf{D}$

$$(\delta_* \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) \in \mathcal{P}'(K_*)).$$

Введем в рассмотрение $\mathbf{D}_* \triangleq \{\delta \in \mathbf{D} \mid \delta_* \preccurlyeq \delta\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D})$. Более того, $\mathbf{D}_*$ конфинально с $(\mathbf{D}, \preccurlyeq)$, то есть $\forall \delta \in \mathbf{D}\ \exists \delta' \in \mathbf{D}_*$: $\delta \preccurlyeq \delta'$. Пусть теперь $\sqsubseteq$ — сужение отношения $\preccurlyeq$ на $\mathbf{D}_* \times \mathbf{D}_*$: $\sqsubseteq \triangleq \preccurlyeq \cap (\mathbf{D}_* \times \mathbf{D}_*)$; $\bar{h} \triangleq (h \mid \mathbf{D}_*) \in X^{\mathbf{D}_*}$. Тогда в виде $(\mathbf{D}_*, \sqsubseteq, \bar{h})$ имеем направленность в X, причем в силу (2.11) $(\mathbf{D}_*, \sqsubseteq, \bar{h}) \xrightarrow{\tau} x_*$. Из (2.13) и определения $\bar{h}$ вытекает, что $\forall \delta \in \mathbf{D}_*$

$$(\Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) \neq \varnothing) \& (\Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) \subset \mathcal{S}((t_*, \bar{h}(\delta)), \omega) \subset \mathbf{C}). \tag{2.19}$$

Из (2.19) вытекает, что

$$\prod_{\delta \in \mathbf{D}_*} \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) = \{g \in \mathbf{C}^{\mathbf{D}_*} \mid g(\delta) \in \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F)\ \forall \delta \in \mathbf{D}_*\} \neq \varnothing. \tag{2.20}$$

С учетом (2.20) выберем селектор

$$\varphi \in \prod_{\delta \in \mathbf{D}_*} \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F). \tag{2.21}$$

Таким образом, $(\mathbf{D}_*, \sqsubseteq, \varphi)$ есть направленность в $K_* \in \mathfrak{K}$.

Если $(L, \angle)$ есть непустое направленное множество, то

$$(\mathrm{Isot})[L; \angle; \mathbf{D}_*; \sqsubseteq] \triangleq \{g \in {\mathbf{D}_*}^L \mid (\forall d \in \mathbf{D}_*\ \exists l \in L:\ d \sqsubseteq g(l)) \& \\ \& (\forall l \in L\ \forall l' \in L\ (l \angle l') \Rightarrow (g(l) \sqsubseteq g(l')))\}.$$

С учетом компактности K_* в $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$ и того, что $\varphi : \mathbf{D}_* \mapsto K_*$, получим [27, (2.3.23)], что для некоторых направленного множества $(\mathbb{E}, \prec)$, $\mathbb{E} \neq \varnothing$, оператора $\rho \in (\mathrm{Isot})[\mathbb{E}; \prec; \mathbf{D}_*; \sqsubseteq]$ и $\lambda \in K_*$

$$(\mathbb{E}, \prec, \varphi \circ \rho) \xrightarrow{\mathfrak{C}} \lambda \tag{2.22}$$

и, кроме того,

$$(\mathbb{E}, \prec, \bar{h} \circ \rho) \xrightarrow{\tau} x_*. \tag{2.23}$$

Из (2.23) и определения $\bar{h} \circ \rho$ следует, что $x_* \in \mathbf{cl}(F\langle t_* \rangle, \tau)$ и в силу (2.9) $(t_*, x_*) \in F$. Покажем теперь, что $\lambda \in \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F)$. Отметим, что по построению $\forall l \in \mathbb{E}$

$$(((\bar{h} \circ \rho)(l), (\varphi \circ \rho)(l)) \in X \times \mathbf{C}) \& ((\varphi \circ \rho)(l) \in \mathcal{S}((t_*, (\bar{h} \circ \rho)(l)), \omega)).$$

Иными словами, для отображения ψ вида

$$\mathbb{E} \ni l \mapsto \psi(l) \triangleq ((\bar{h} \circ \rho)(l), (\varphi \circ \rho)(l)) \in X \times \mathbf{C}$$

имеем свойства $\psi \in \mathbf{Y}^{\mathbb{E}}$, $(\mathbb{E}, \prec, \psi) \xrightarrow{\tau \otimes \mathfrak{C}} (x_*, \lambda)$, где по условию 2 $\mathbf{Y} \triangleq \{(x, y) \in X \times \mathbf{C} \mid y \in \in \mathcal{S}((t_*, x), \omega)\} \in \mathfrak{F}_{\otimes}$. Из последних соотношений, (2.22) и (2.23), получим $(x_*, \lambda) \in \mathbf{Y}$ или

$$\lambda \in \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega). \tag{2.24}$$

Пусть теперь выбрано произвольное $t^* \in \mathbf{I}_{t_*}$. Заметим, что (см. [27, (2.3.9)]) из

$$((\mathbb{E}, \prec, \varphi \circ \rho) \xrightarrow{\mathfrak{C}} \lambda) \Leftrightarrow ((\mathbb{E}, \prec, \varphi \circ \rho) \xrightarrow{\otimes^I(\tau)} \lambda)$$

и (2.22) следует сходимость $(\mathbb{E}, \prec, \varphi \circ \rho) \overset{\otimes^I(\tau)}{\to} \lambda$, и, так как $t^* \in I$, имеем

$$(\mathbb{E}, \prec, (\varphi \circ \rho)(\cdot)(t^*)) \xrightarrow{\tau} \lambda(t^*). \tag{2.25}$$

Напомним (см. (2.15), (2.21)), что при $\delta \in \mathbf{D}_*$, $t \in \mathbf{I}_{t_*}$ верно $\varphi(\delta)(t) \in F\langle t\rangle$ и, как следствие, триплет $(\mathbb{E}, \prec, (\varphi \circ \rho)(\cdot)(t^*))$ есть направленность в $F\langle t^*\rangle$. Тогда из (2.25) по теореме Биркгофа (см. [27, (2.3.11)]) $\lambda(t^*) \in \mathbf{cl}(F\langle t^*\rangle, \tau)$, откуда в силу замкнутости $F\langle t^*\rangle$ и произвольного выбора $t^* \in \mathbf{I}_{t_*}$ получаем

$$\lambda(t) \in F\langle t\rangle \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{2.26}$$

Соотношения (2.26), (2.24) в совокупности влекут (см. (2.1)) включение $\lambda \in \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F)$ и, как следствие, свойство $\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) \neq \varnothing$. Последнее означает, по определению (см. (2.4)), что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}_\omega(F)$. Поэтому $x_* \in \mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle$. Установлено, что (см. (2.10)) $\mathbf{cl}(\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle, \tau) \subset \mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle$ и, стало быть, равенство $\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle = \mathbf{cl}(\mathbb{A}_\omega(F)\langle t_*\rangle, \tau) \in \mathfrak{F}$. Так как выбор $t_* \in I$ был произвольным, установлено (см. (2.10), (1.15)), что $\mathbb{A}_\omega(F) \in \mathbf{F}$. Наконец, в силу произвольного выбора $F \in \mathbf{F}$ получаем искомое соотношение (2.6). □

Из предложения 1 следует по аксиомам семейства замкнутых множеств, что (см. (2.5))

$$\mathbf{A}(F) \in \mathbf{F} \qquad \forall F \in \mathbf{F}. \tag{2.27}$$

Предложение 2. *Если $N \in \mathbf{F}$, то*

$$\{F \in \mathbf{F} \mid (F \subset N)\&(F = \mathbf{A}(F))\} = \bigcap_{\omega \in \Omega} \{\mathbb{A}_\omega(F) : F \in \mathbf{F}, F \subset N\}.$$

Предложение 3. *Если $\omega \in \Omega$, то оператор $\mathbb{A}_\omega$ является* секвенциально непрерывным *в следующем смысле: для произвольных $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(D)$ истинна импликация*

$$((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbb{A}_\omega(F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}_\omega(F)).$$

Доказательства предложений 2, 3 в основных моментах следуют доказательствам утверждений 5.4, 5.6 из [3].

Следствие 1. *Оператор $\mathbf{A}$ является секвенциально непрерывным: для произвольных $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(D)$ истинна импликация $((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbf{A}(F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}(F))$.*

Предложение 4. *Если $\omega \in \Omega$, то $\mathbb{A}_\omega \in \mathfrak{A}_D(\mathbf{F})$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 5.1 из [3].

Следствие 2. $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}_D(\mathbf{F})$.

Введем в рассмотрение степени $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, оператора $\mathbf{A}$, полагая, что $\mathbf{A}^0 \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ определяется условием

$$\mathbf{A}^0(H) \triangleq H \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D) \tag{2.28}$$

и, кроме того,

$$\mathbf{A}^k \triangleq \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

Из (2.29) вытекает, что

$$\mathbf{A}^k(H) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}(H)) \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{2.30}$$

В частности, из (2.28) и (2.30) имеем

$$(\mathbf{A}^0(F) = F\ \forall F \in \mathbf{F})\&(\mathbf{A}^k(F) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}(F))\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall F \in \mathbf{F}). \tag{2.31}$$

Из (1.18) и следствия 2 с учетом (2.31) по индукции следует, что

$$\mathbf{A}^k(F) \in \mathbf{F} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall F \in \mathbf{F}. \tag{2.32}$$

В соответствии с (1.2) определен оператор

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}} = \Big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(M)\Big)_{M \in \mathcal{P}(D)} \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}. \tag{2.33}$$

Если $H \in \mathcal{P}(D)$, то (см. (2.33)) $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H) = \bigcap_{k \in \overline{m,\infty}} \mathbf{A}^k(H) \ \forall m \in \mathbb{N}_0$. Из (2.32), (2.33) имеем по аксиомам замкнутых множеств, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(F) \in \mathbf{F} \qquad \forall F \in \mathbf{F}. \tag{2.34}$$

Предложение 5. *Если $F \in \mathbf{F}$, то*

$$\mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F). \tag{2.35}$$

Из предложения 5 и (2.34) следует, что оператор $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$ идемпотентен: $\overset{\infty}{\mathbf{A}} = \overset{\infty}{\mathbf{A}} \circ \overset{\infty}{\mathbf{A}}$.

Предложение 6. *Если $F \in \mathbf{F}$ и $H \in \mathcal{P}(F)$, то*

$$((\mathbf{A}(H) = H) \Rightarrow (H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)))\&((\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset H) \Rightarrow (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(H))). \tag{2.36}$$

Доказательство дано в [3, теорема 61].

Замечание 2. Предложения 5, 6 следуют общей закономерности (см., например, [28, теорема 1], [29, доказательство леммы 1]): итерационные пределы изотонных секвенциально непрерывных операторов в секвенциально полных пространствах суть неподвижные точки этих операторов.

Предложение 7. *Оператор $\mathbf{A}^k$ является секвенциально непрерывным: если $k \in \mathbb{N}_0$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(D)$, то $((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbf{A}^k(F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}^k(F))$.*

Предложение 7 без труда выводится из следствия 2 рассуждениями по индукции.

Предложение 8. $\overset{\infty}{\mathbf{A}} \in \mathfrak{A}_D(\mathbf{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(M) \subset M \qquad \forall M \in \mathcal{P}(D). \tag{2.37}$$

Пусть $M' \in \mathcal{P}(D)$. Тогда в силу (2.33)

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(M') = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(M') \subset \mathbf{A}^0(M') = M'.$$

Поскольку выбор M' был произвольным, установлено (2.37). Выберем $H' \in \mathcal{P}(D)$ и $H'' \in \mathcal{P}(D)$ так, что $H' \subset H''$. Исходя из (2.28), (2.30), рассуждениями по индукции устанавливается, что $(H' \subset H'') \Rightarrow (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H') \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(H''))$. Следовательно, в силу произвольного выбора $H', H'' \in \mathcal{P}(D)$ выполнены соотношения: $\forall M' \in \mathcal{P}(D) \ \forall M'' \in \mathcal{P}(D)$

$$(M' \subset M'') \Rightarrow (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(M') \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(M'')). \tag{2.38}$$

Пусть $H \in \mathbf{F}$. В силу (2.27) рассуждениями по индукции получим $\mathbf{A}^k(H) \in \mathbf{F}$ для $k \in \mathbb{N}_0$. При этом согласно (2.33) $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H) = \cap_{k\in\mathbb{N}_0}\mathbf{A}^k(H)$ и по аксиомам замкнутых множеств $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H) \in \mathbf{F}$. Поскольку выбор H был произвольным, установлено, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \in \mathbf{F} \qquad \forall F \in \mathbf{F}. \tag{2.39}$$

Пусть выбраны $(\Phi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $\Phi \in \mathcal{P}(D)$ такие, что $(\Phi_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \Phi$. Итак, $\Phi = \cap_{i\in\mathbb{N}}\Phi_i$ и $\Phi_{j+1} \subset \Phi_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Покажем, что при этих условиях

$$(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi). \tag{2.40}$$

Прежде заметим, что в силу аксиом замкнутых множеств $\Phi \in \mathbf{F}$. Напомним, что $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi_j) = \cap_{k\in\mathbb{N}_0}\mathbf{A}^k(\Phi_j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$; кроме того, $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi) = \cap_{k\in\mathbb{N}_0}\mathbf{A}^k(\Phi)$.

Сравним множества $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi)$ и $\cap_{i\in\mathbb{N}}\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi_i)$. По выбору множеств Φ, $(\Phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ из предложения 7 получим $(\mathbf{A}^k(\Phi_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}^k(\Phi)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. В частности, $\mathbf{A}^k(\Phi) = \cap_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{A}^k(\Phi_i)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Тогда имеем

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\mathbf{A}^k(\Phi) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{A}^k(\Phi_i)\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\mathbf{A}^k(\Phi_i)\right).$$

Из последнего равенства и (2.33) следует

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}}\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi_j). \tag{2.41}$$

Из изотонности оператора $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$ (см. (2.38)) по выбору множеств Φ, $(\Phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ следует

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi_{j+1}) \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\Phi_j) \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

Соотношения (2.41), (2.42) означают выполнение (2.40). Поскольку выбор Φ, $(\Phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ был произвольным, окончательно получим для любых $F \in \mathbf{F}$, $(F_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$

$$((F_j)_{j\in\mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F_j))_{j\in\mathbb{N}} \downarrow \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)). \tag{2.43}$$

Из (2.37), (2.39), (2.38), (2.43) следует требуемое утверждение. □

§ 3. Связь с операторной выпуклостью

Всюду в дальнейшем фиксируем множество $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ (в содержательной задаче удержания траекторий управляемой системы сечения $\mathcal{N}$ используются в качестве фазовых ограничений). Введем в рассмотрение оператор

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{N}), \tag{3.1}$$

для которого

$$\mathcal{A}(H) \triangleq \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H) \qquad \forall H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}). \tag{3.2}$$

В связи с (3.1), (3.2) рассмотрим семейство

$$(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid \forall B \in \mathcal{P}(\mathcal{N})\ (B \subset H) \Rightarrow (\mathcal{A}(B) \subset H)\},$$

получая соответствующую (1.8) операторную выпуклость:

$$(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}] \in (\mathrm{CONV})[\mathcal{N}]. \tag{3.3}$$

Предложение 9. *Отображение $\mathcal{A}$ является предоболочкой: $\mathcal{A} \in (\mathrm{p\text{–}HULL})[\mathcal{N}]$.*

Из предложения 9 в силу [4, лемма 1.1] следует свойство (см. (1.10))

$$(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}] = \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid \mathcal{A}(H) = H)\}. \tag{3.4}$$

С учетом (1.7) и (3.3) в связи с представлением выпуклой оболочки получаем, что $\forall S \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[S] = \bigcap_{H \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](S)} H \in (\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]. \tag{3.5}$$

Приводимые ниже общие положения согласуются с [2] в случае позиционных дифференциальных игр. В частности, (3.5) определено при $S = \varnothing$. В этой связи напомним, что $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ (см. (2.28), (2.33)). Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathcal{N} \in \mathbf{F}. \tag{3.6}$$

Предложение 10. *Множество* $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ *выпукло:*

$$\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \in (\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.2) и (2.35) имеем

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}\setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) = \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}\setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))) = \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}\setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}).$$

Поэтому в силу (3.4) выполняется (3.7). □

Из предложения 10 следует, в частности, что (см. (1.7))

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\varnothing] \subset \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}). \tag{3.8}$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\varnothing] = \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}). \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $H \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](\varnothing)$. Тогда $H \in (\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]$, а потому (см. (3.4)) $H = \mathcal{A}(H)$. Отсюда, в силу определения $\mathcal{A}$, $H = \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H)$ и, следовательно, $\mathcal{N} \setminus H = \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H)$. С учетом (3.6) и (2.36) получаем $\mathcal{N} \setminus H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$. Тогда

$$\mathcal{N}\setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N} \setminus H) = H.$$

Поскольку выбор H был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{N}\setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset M \qquad \forall M \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](\varnothing).$$

С учетом (1.7) получаем, что

$$\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \bigcap_{M \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](\varnothing)} M = ((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\varnothing]. \tag{3.10}$$

Из (3.8), (3.10) вытекает искомое равенство (3.9). □

Следствие 3. $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ *есть наименьший по включению элемент выпуклости* $(\mathcal{A}\text{–}conv)[\mathcal{N}]$.

Следствие 4. *Если* $H \in \mathcal{P}(\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$, *то*

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[H] = \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}).$$

Рассмотрим теперь отображение

$$\mathfrak{A} \triangleq ((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\cdot] = (((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[H])_{H\in\mathcal{P}(\mathcal{N})} \in \mathcal{P}(\mathcal{N})^{\mathcal{P}(\mathcal{N})}.$$

Легко видеть, что оператор $\mathfrak{A}$ есть предоболочка: $\mathfrak{A} \in (\text{p–HULL})[\mathcal{N}]$. Согласно теореме 1 и определению $\mathfrak{A}$ имеем $\mathfrak{A}(\varnothing) = \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$.

Замечание 3. Пусть $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \neq \varnothing$ (типичный случай). Через $\mathrm{Fin}(T)$ обозначим семейство всех непустых конечных п/м произвольного множества T. Тогда семейство $\mathrm{Fin}(\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$ всех непустых конечных п/м $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ непусто: $\mathfrak{A}(\varnothing) \neq \varnothing$; поскольку $\mathrm{Fin}(\varnothing) = \varnothing$, то в случае, когда $\tilde{\mathfrak{A}}$ есть предоболочка, отвечающая алгебраической [4] выпуклости, имели бы $\tilde{\mathfrak{A}}(\varnothing) = \varnothing$. Следовательно, предоболочка $\mathfrak{A}$ не является алгебраической.

§ 4. Многозначные квазистратегии, разрешающие задачу удержания

Рассмотрим теперь вопрос о решении задачи удержания в классе многозначных квазистратегий, имея в виду конструкции [1]. Всюду в дальнейшем полагаем

$$\mathcal{S}(z,\cdot) \triangleq (\mathcal{S}(z,\omega))_{\omega\in\Omega} \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C}).$$

Далее будем придерживаться соглашения: если $h \in \mathbf{C}$, $h' \in \mathbf{C}$ и $t \in I$, то отображение $(h\Box h')_t : I \mapsto X$ определяется соотношениями

$$((h\Box h')_t(\xi) \triangleq h(\xi)\ \forall \xi \in I_t)\&((h\Box h')_t(\zeta) \triangleq h'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}).$$

Считаем выполненным следующее

Условие 5. $\forall z \in D$, $\forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall \omega' \in \Omega$:

$$((\omega \mid I_t) = (\omega' \mid I_t)) \Rightarrow (\forall h \in \mathcal{S}(z,\omega)\ \forall h' \in \mathcal{S}((t, h(t)), \omega')\ (h\Box h')_t \in \mathcal{S}(z,\omega')).$$

Напомним, что согласно (2.1)

$$\Pi(\omega \mid z, H) \subset \mathcal{S}(z,\omega) \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D)\ \forall z \in D\ \forall \omega \in \Omega.$$

Кроме того, из (2.1) следует, что при $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$, $\omega \in \Omega$ и $s \in \Pi(\omega \mid z, H)$

$$(t, s(t)) \in H \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}.$$

Отметим, что в следующем предложении отсутствует вводимое ниже требование 6 «склеиваемости» помех. Это расширяет возможность применения данной конструкции квазистратегии на практически важные случаи, например на случай непрерывных помех.

Предложение 11. *Если* $z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$, *то*

$$\Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_z. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости полагаем, что

$$\alpha \triangleq \Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})). \tag{4.2}$$

Это означает, что $\alpha : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C})$ удовлетворяет условию

$$(t, s(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}; \tag{4.3}$$

итак, $\alpha(\omega) = \Pi(\omega \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$. В частности,

$$\alpha(\omega) \subset \mathcal{S}(z, \omega) \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.4}$$

С учетом (2.35) и (3.6) имеем $z \in \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$. Поэтому (см. (4.2))

$$\alpha(\omega) \neq \varnothing \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.5}$$

Пусть $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ и $\theta \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$ таковы, что

$$(\omega \mid I_\theta) = (\omega' \mid I_\theta). \tag{4.6}$$

Покажем, что для множеств $\Gamma \triangleq \{(h \mid I_\theta) :\ h \in \alpha(\omega)\}$, $\Gamma' \triangleq \{(h \mid I_\theta) :\ h \in \alpha(\omega')\}$ справедливо вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Пусть $\gamma \in \Gamma$; тогда для некоторого $h \in \alpha(\omega)$ имеем равенство $\gamma = (h \mid I_\theta)$. При этом согласно (4.3)

$$(t, h(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}. \tag{4.7}$$

В частности, учитывая (2.35), получаем, что

$$(\theta, h(\theta)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}); \tag{4.8}$$

при этом $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) = \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$. Из (4.8) и (2.3) получаем, как следствие, что

$$\Pi(\nu \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \neq \varnothing \qquad \forall \nu \in \Omega.$$

В частности, $\Pi(\omega' \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \neq \varnothing$. Пусть

$$\tilde{h} \in \Pi(\omega' \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})). \tag{4.9}$$

Таким образом, имеем $h \in \mathcal{S}(z, \omega)$, $\tilde{h} \in \mathcal{S}((\theta, h(\theta)), \omega')$. С учетом (4.6) из условия 5 получим, что

$$h' \triangleq (h \Box \tilde{h})_\theta \in \mathcal{S}(z, \omega'). \tag{4.10}$$

Отметим, что согласно (2.1), (4.9) и (4.10)

$$(t, h'(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_\theta \setminus \{\theta\}. \tag{4.11}$$

Кроме того, из (4.7) и (4.10) следует

$$(t, h'(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)} \cap I_\theta. \tag{4.12}$$

В совокупности (4.12) и (4.11) дают соотношения

$$(t, h'(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}. \tag{4.13}$$

Из (2.1), (4.2), (4.10) и (4.13) получим, что $h' \in \alpha(\omega')$. Следовательно, опять в силу (4.10)

$$\gamma = (h' \mid I_\theta) \in \{(s \mid I_\theta) :\ s \in \alpha(\omega')\},$$

то есть $\gamma \in \Gamma'$. Так как γ выбиралось произвольно, получаем вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. В силу симметрии имеем $\Gamma = \Gamma'$ и, так как выбор θ, ω, ω' был произволен, окончательно получаем, что $\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall \omega_2 \in \Omega\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$

$$((\omega_1 \mid I_t) = (\omega_2 \mid I_t)) \Rightarrow (\{(h \mid I_t) : h \in \alpha(\omega_1)\} = \{(h \mid I_t) : h \in \alpha(\omega_2)\}). \tag{4.14}$$

Из (1.13), (4.4), (4.5), (4.14) получим $\alpha \in \mathbb{M}_z$ и, следовательно (см. (4.2)), включение (4.1). $\square$

В силу (4.1) и из определения $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ (см. (2.33)) получаем, что $\forall z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$

$$\Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_z : (t, s(t)) \in \mathcal{N} \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \Pi(\omega \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})). \tag{4.15}$$

Из (4.15) следует, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t, s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\}. \tag{4.16}$$

Далее будем придерживаться соглашения: если $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ и $t \in I$, то отображение $(\omega \square \omega')^t : I \mapsto Y$ определяется соотношениями

$$((\omega \square \omega')^t(\xi) \triangleq \omega(\xi)\ \forall \xi \in I_t) \& ((\omega \square \omega')^t(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}).$$

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 6. $(\omega \square \omega')^t \in \Omega\ \ \forall t \in I, \forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega.$

Условие 7. $\forall z \in D, \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}, \forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega, \forall h \in \mathcal{S}(z, (\omega \square \omega')^t), \exists h' \in \mathcal{S}((t, h(t)), \omega')$:

$$(h \mid \mathbf{I}_t) = (h' \mid \mathbf{I}_t).$$

Замечание 4. Легко видеть, что при выполнении условий 6, 7 условие 4 выполняется автоматически.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) = \{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t, s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\}. \tag{4.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Λ множество в правой части (4.17). Тогда $\Lambda \subset \mathcal{N}$, а потому (см. (2.28))

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^0(\mathcal{N}). \tag{4.18}$$

Пусть вообще $n \in \mathbb{N}_0$ таково, что

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^n(\mathcal{N}). \tag{4.19}$$

Покажем, что тогда $\Lambda \subset \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N})$. Предположим противное: нашлась позиция z_* такая, что

$$z_* \in \Lambda \setminus \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N}). \tag{4.20}$$

Тогда (см. (2.29)) $z_* \in \mathbf{A}^n(\mathcal{N}) \setminus \mathbf{A}(\mathbf{A}^n(\mathcal{N}))$. Напомним, что $\mathbf{A}(\mathbf{A}^n(\mathcal{N})) = \{z \in \mathbf{A}^n(\mathcal{N}) \mid \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^n(\mathcal{N})) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega\}$. Следовательно, найдется $\omega_* \in \Omega$ такое, что

$$\Pi(\omega_* \mid z_*, \mathbf{A}^n(\mathcal{N})) = \varnothing. \tag{4.21}$$

Из (2.1) и (4.21) получим, что

$$\forall s \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*)\ \exists t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)} : \quad (t, s(t)) \notin \mathbf{A}^n(\mathcal{N}). \tag{4.22}$$

Вместе с тем (см. (4.20)) $z_* \in \Lambda$ и, значит, найдется квазистратегия

$$\alpha_* \in \mathbb{M}_{z_*}, \tag{4.23}$$

для которой, по определению Λ,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \qquad \forall \omega \in \Omega\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}\ \forall s \in \alpha_*(\omega). \tag{4.24}$$

В частности,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}\ \forall s \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.25}$$

Выберем произвольно (см. (1.13))

$$s_* \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.26}$$

Тогда $s_* \in \mathbf{C}$ и для некоторого $s' \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*)$ справедливо равенство $(s_* \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (s' \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})$. Согласно (4.22) имеем для некоторого момента $t_* \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$

$$(t_*, s'(t_*)) \notin \mathbf{A}^n(\mathcal{N}).$$

Но $s_*(t_*) = s'(t_*)$, а потому выполнено

$$z^* \triangleq (t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^n(\mathcal{N}). \tag{4.27}$$

Из (4.19) и (4.27) имеем, что

$$z^* \notin \Lambda. \tag{4.28}$$

При этом (см. (4.25)) $z^* \in \mathcal{N}$. С учетом условия 6 определим $\beta : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C})$ по правилу

$$\beta(\omega) \triangleq \{h \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega)^{t_*}) \mid (h \mid I_{t_*}) = (s_* \mid I_{t_*})\} \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.29}$$

Покажем, что

$$\beta(\omega) \neq \varnothing \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.30}$$

Из (1.13), (4.23) и (4.26) следует, что для произвольного $\omega' \in \Omega$ найдется $h' \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t_*})$ такое, что $(h' \mid I_{t_*}) = (s_* \mid I_{t_*})$. Следовательно, $h' \in \beta(\omega')$ и в силу произвольного выбора ω' имеем (4.30). Кроме того, для любых $\omega' \in \Omega$ и $h' \in \beta(\omega')$ из определений α_*, β имеем, что $(h' \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (h'' \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})$ для некоторого $h'' \in \mathcal{S}(z_*, (\omega_* \Box \omega')^{t_*})$. Тогда по условию 7 найдется $h''' \in \mathcal{S}((t_*, h''(t_*)), \omega')$, $\mathcal{S}((t_*, h''(t_*)), \omega') = \mathcal{S}((t_*, h'(t_*)), \omega')$ такое, что $(h'' \mid \mathbf{I}_{t_*}) = (h''' \mid \mathbf{I}_{t_*})$. Как следствие, $(h' \mid \mathbf{I}_{t_*}) = (h''' \mid \mathbf{I}_{t_*})$. Таким образом,

$$\forall \omega \in \Omega \ \forall h \in \beta(\omega) \ \exists h' \in \mathcal{S}((t_*, h(t_*)), \omega) : \ (h \mid \mathbf{I}_{t_*}) = (h' \mid \mathbf{I}_{t_*}). \tag{4.31}$$

Заметим, что при $\omega \in \Omega$ и $h \in \beta(\omega)$ по определению β имеем равенство $(h \mid I_{t_*}) = (s_* \mid I_{t_*})$, откуда, в частности, следует, что $(t_*, h(t_*)) = z^*$, а тогда (см. (4.31))

$$\exists h' \in \mathcal{S}(z^*, \omega) : \ (h \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z^*)}) = (h' \mid \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z^*)}). \tag{4.32}$$

Выберем теперь $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ и $\theta \in \mathbf{I}_{t_*}$ так, что $(\omega \mid I_\theta) = (\omega' \mid I_\theta)$. Обозначим $\Gamma \triangleq \{(s \mid I_\theta) : \ s \in \beta(\omega)\}$, $\Gamma' \triangleq \{(s \mid I_\theta) : \ s \in \beta(\omega')\}$ и выберем произвольно $\gamma \in \Gamma$. Пусть $h \in \beta(\omega)$ удовлетворяет $\gamma = (h \mid I_\theta)$.

По условию 6 имеем $(\omega_* \Box \omega)^{t_*} \in \Omega$, $(\omega_* \Box \omega')^{t_*} \in \Omega$, и, кроме того, легко проверяется, что

$$((\omega_* \Box \omega)^{t_*} \mid I_\theta) = ((\omega_* \Box \omega')^{t_*} \mid I_\theta). \tag{4.33}$$

Из (4.33) в силу (4.23) получим

$$\{(s \mid I_\theta) : \ s \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega)^{t_*})\} = \{(s' \mid I_\theta) : \ s' \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t_*})\}.$$

Следовательно, найдется $h' \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t_*})$ такой, что $(h \mid I_\theta) = (h' \mid I_\theta)$. Тогда $\gamma = (h' \mid I_\theta)$. Так как по выбору h выполняется $(h \mid I_{t_*}) = (s_* \mid I_{t_*})$ и $\theta \geqslant t_*$, получаем, что $(h' \mid I_{t_*}) = (s_* \mid I_{t_*})$. Следовательно (см. (4.29)), $h' \in \beta(\omega')$. Отсюда получаем, что $\gamma \in \Gamma'$ и в силу произвольности выбора γ — вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Из соображений симметричности получим $\Gamma = \Gamma'$ и в силу произвольного выбора ω, ω' и θ имеем импликацию $\forall \hat{\omega} \in \Omega \ \forall \hat{\omega}' \in \Omega \ \forall \hat{\theta} \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$((\hat{\omega} \mid I_{\hat{\theta}}) = (\hat{\omega}' \mid I_{\hat{\theta}})) \Rightarrow (\{(s \mid I_{\hat{\theta}}) : \ s \in \beta(\hat{\omega})\} = \{(s' \mid I_{\hat{\theta}}) : \ s' \in \beta(\hat{\omega}')\}). \tag{4.34}$$

Из (4.30), (4.32) и (4.34) получаем, что $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. При этом (см. (4.24), (4.28)) $z^* \in \mathcal{N} \setminus \Lambda$. Значит, для некоторых $\bar{\omega} \in \Omega$, $\bar{s} \in \beta(\bar{\omega})$ и $\bar{t} \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$(\bar{t}, \bar{s}(\bar{t})) \notin \mathcal{N}. \tag{4.35}$$

Но, по построению, $\bar{t} \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$, $(\omega_* \square \bar{\omega})^{t_*} \in \Omega$ и $\bar{s} \in \alpha_*((\omega_* \square \bar{\omega})^{t_*})$. При этих условиях (4.35) противоречит (4.24). Следовательно, предположение (4.20) было ложным и для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется импликация $(\Lambda \subset \mathbf{A}^n(\mathcal{N})) \Rightarrow (\Lambda \subset \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N}))$. В совокупности с (4.18) получим, что для всякого $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется (4.19). Это завершает обоснование включения $\Lambda \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$. Из определения Λ и (4.16) следует искомое равенство (4.17). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 157–169.
2. Ченцов А.Г. О задаче управления с ограниченным числом переключений / Уральский политехнический институт им. С.М. Кирова. Свердловск, 1987. 45 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4942-В 87.
3. Ченцов А.Г. К вопросу о соотношении различных версий метода программных итераций: позиционный вариант // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. С. 130–149.
4. Солтан В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984. 224 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
8. Кряжимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Доклады Академии наук СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
9. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения. I // Известия Академии наук СССР: Техническая кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
10. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения. II // Известия Академии наук СССР: Техническая кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
11. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
12. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник. 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 394–420.
13. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
14. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения с информационной памятью // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 306–309.
15. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
16. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
17. Меликян А.А. Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 237. № 3. С. 521–524.
18. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения / Уральский политехнический институт им. С.М. Кирова. Свердловск, 1979. 103 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1933-79.
19. Ченцов А.Г. Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1801–1808.
20. Ченцов А.Г. К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Известия вузов. Математика. 2000. № 3. С. 66–76.
21. Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. I // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 470–480.
22. Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. II // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 679–688.
23. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
24. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
25. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 275 с.
26. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 367 с.
27. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations / Mathematics and Its Applications. Vol. 542. Springer, 2002. 408 p.

28. Kantorovitch L. The method of successive approximation for functional equations // Acta Mathematica. 1939. Vol. 71. № 1. P. 63–97.
29. Echenique F. A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem // Int. J. Game Theory. 2005. Vol. 33. № 2. P. 215–218.

Поступила в редакцию 30.06.2015

Серков Дмитрий Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

D. A. Serkov, A. G. Chentsov

Programmed iteration method and operator convexity in an abstract retention problem

Keywords: programmed iterations, operator convexity, quasistrategies.

MSC: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

For an abstract dynamic system the game problem of trajectories retention in a given set is considered. The relations of the method of programmed iterations and the constructions associated with the generation of the operator convex hull with the help of prehull are investigated. Within these relations the procedure of constructing the hull is realized in the form dual to the procedure based on the method of programmed iterations. The retention problem solution is determined in the class of multi-valued quasistrategies (nonanticipating responses to the realization of uncertain factors of the process). It is shown that the set of successful solvability of the retention problem is defined as the limit of the iterative procedure in the space of sets, elements of which are positions of the game; the structure of resolving quasistrategies is also provided.

REFERENCES

1. Chentsov A.G. An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 299–310.
2. Chentsov A.G. On the problem of control with a limited number of switching, Ural Polytechnic Institute, Sverdlovsk, 1987, 45 p. Deposited in VINITI, no. 4942-B 87 (in Russian).
3. Chentsov A.G. On interrelations between different versions of the method of program iterations: a positional version, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2002, vol. 38, issue 3, pp. 422–438.
4. Soltan V.P. *Vvedenie v aksiomaticheskuyu teoriyu vypuklosti* (Introduction to axiomatic theory of convexity), Chisinau: Shtiintsa, 1984, 224 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965.
6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, xi+517 p.
7. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on motions encounter), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.
8. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of approach–evasion, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 4, pp. 779–782 (in Russian).

9. Krasovskii N.N. Differential game of pursuit–evasion. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1973, no. 2, pp. 3–18 (in Russian).
10. Krasovskii N.N. Differential game of pursuit–evasion. II, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1973, no. 3, pp. 22–42 (in Russian).
11. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian).
12. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. DOI: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657
13. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
14. Chentsov A.G. On a game problem of guidance with information memory, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 411–414.
15. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 845–852.
16. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354.
17. Melikyan A.A. The value of a game in a linear differential game of convergence, *Sov. Math., Dokl.*, 1977, vol. 18, pp. 1457–1461.
18. Chentsov A.G. Programmed iteration method for the differential game of pursuit–evasion, Ural Polytechnic Institute, Sverdlovsk, 1979, 103 p. Deposited in VINITI, no. 1933-79 (in Russian).
19. Chentsov A.G. About alternatives in the class of quasistrategies for differential games of pursuit–evasion, *Differentsial'nye uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 10, pp. 1801–1808 (in Russian).
20. Chentsov A.G. Iterative realization of nonanticipating multivalued mappings, *Russian Mathematics*, 2000, vol. 44, no. 3, pp. 63–73.
21. Chentsov A.G. Nonanticipating multimappings and their construction by the method of program iterations: I, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 498–509.
22. Chentsov A.G. Nonanticipating multimappings and their construction by the method of program iterations: II, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 713–723.
23. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p.
24. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1985, 752 p.
25. Burbaki N. *Obshchaya topologiya. Osnovnye structury* (General topology. The main structures), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
26. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to the theory of sets and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004, 367 p.
27. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Springer, 2002, 408 p.
28. Kantorovitch L. The method of successive approximation for functional equations, *Acta Mathematica*, 1939, vol. 71, no. 1, pp. 63–97.
29. Echenique F. A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem, *Int. J. Game Theory*, 2005, vol. 33, pp. 215–218.

Received 30.06.2015

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru