

УДК 517.518.84

© О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина

**О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ
И ВЫБОРЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В АЛГОРИТМЕ ВЕРНЕРА ¹**

Работа посвящена изучению наилучших равномерных рациональных приближений (НРПП) непрерывных функций на компактных, в том числе конечных, подмножествах числовой оси \mathbb{R} . Показано, что НРПП на конечном множестве существует не всегда. Более подробно изучен алгоритм Гельмута Вернера поиска НРПП вида $P_m/Q_n = \sum_{i=0}^m a_i x^i / \sum_{j=0}^n b_j x^j$ для функций на множестве из $N = m + n + 2$ точек $x_1 < \dots < x_N$. Этот алгоритм может использоваться в алгоритме Ремеза поиска НРПП на отрезке. При работе алгоритма Вернера вычисляется $(n + 1)$ вещественное собственное значение h_1, \dots, h_{n+1} для пучка матриц $A - hB$, где A и B — некоторые симметричные матрицы. Каждому собственному значению сопоставляется своя рациональная дробь вида P_m/Q_n , являющаяся кандидатом на наилучшее приближение. Поскольку не более одной из этих дробей свободны от полюсов на отрезке $[x_1, x_N]$, то возникает задача отыскания того собственного значения, которому соответствует рациональная дробь без полюсов. В работе показано, что если $m = 0$, все значения $f(x_1), -f(x_2), \dots, (-1)^{n+2} f(x_{n+2})$ различны и НРПП положительно (отрицательно) во всех точках x_1, \dots, x_{n+2} , то это собственное значение занимает $[(n+2)/2]$ -е ($[(n+3)/2]$ -е) место по величине. Приведены три численных примера, иллюстрирующих это утверждение.

Ключевые слова: наилучшие равномерные рациональные приближения, рациональные приближения на конечных множествах, алгоритм Ремеза, алгоритм Вернера, выбор собственных значений в алгоритме Вернера.

Введение

Статья посвящена изучению наилучших равномерных рациональных приближений непрерывных функций на компактных, в том числе конечных, подмножествах числовой оси \mathbb{R} . Рациональным приближениям посвящено большое число работ (см., например, [1–5] и имеющиеся там ссылки).

Работа состоит из шести параграфов. В первом параграфе приведены *основные обозначения и определения*. Во втором параграфе приведены достаточные условия существования *наилучшего равномерного рационального приближения* (НРПП), найденные Уолшем, и показано, что НРПП на конечном множестве существует не всегда (теорема 1). Третий параграф посвящен *единственности и характеристике* НРПП. Приведена теорема об альтернансе для рациональных приближений на отрезке (теорема А), а также аналогичная теорема для произвольного компактного множества из \mathbb{R} (теорема 2). В четвертом параграфе описан *алгоритм Ремеза* поиска НРПП, а также приведен результат Ральстона о достаточных условиях сходимости этого алгоритма. В пятом параграфе описан *алгоритм Гельмута Вернера*, который может быть применен на одном из шагов алгоритма Ремеза. Алгоритм Вернера предназначен для поиска НРПП вида $P_m/Q_n = \sum_{i=0}^m a_i x^i / \sum_{j=0}^n b_j x^j$ функций, заданных на множестве из $N = m + n + 2$ точек $x_1 < \dots < x_N$. Многочлен Q_n не должен иметь полюсов на отрезке $[x_1, x_N]$. При работе этого алгоритма вычисляется $(n + 1)$ собственное значение h_1, \dots, h_{n+1} для пучка матриц $A - hB$, где A и B — некоторые симметричные матрицы, B положительно определена. Все эти собственные значения вещественны, поэтому каждому из них сопоставляется своя рациональная дробь вида P_m/Q_n , являющаяся кандидатом на наилучшее приближение. Как известно, не более одной из

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 13-02-12155-офи_м, 14-01-00516-А).

этих дробей свободно от полюсов на отрезке $[x_1, x_N]$. Данное утверждение можно уточнить, заменив отрезок $[x_1, x_N]$ на набор точек x_1, \dots, x_N (предложение 1).

Таким образом, возникает задача отыскания того собственного значения, которому соответствует рациональная дробь без полюсов. Приведено достаточное условие Куртиса и Осборна того, что в случае $n = 1$ это собственное значение (если оно существует) имеет минимальный модуль. Далее в теореме 3 нами показано, что если $m = 0$, все значения $f(x_1), -f(x_2), \dots, (-1)^{n+2}f(x_{n+2})$ различны и приближающая функция P_m/Q_n положительна (отрицательна) в точках x_1, \dots, x_N , то это собственное значение занимает $[(n+2)/2]$ -е ($[(n+3)/2]$ -е) место в последовательности $h_1 < \dots < h_{n+1}$. После формулировки теоремы приведены три иллюстрирующих ее численных примера.

§ 1. Основные обозначения и определения

Всюду далее m и n — неотрицательные целые числа. Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}$ множество всех рациональных функций вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{j=0}^n b_j x^j} \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами. *Дефектом* $d(R)$ рациональной функции (1) называется такое число d , что $a_m = a_{m-1} = \dots = a_{m-d+1} = 0$, $b_n = b_{n-1} = \dots = b_{n-d+1} = 0$, но хотя бы один из коэффициентов a_{m-d} , b_{n-d} отличен от нуля. В случае $R \equiv 0$ считаем, что $d(R) = n$.

Пусть K — компактное (возможно, конечное) подмножество множества действительных чисел \mathbb{R} . Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}^K$ (соответственно $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$) множество всех функций вида (1), удовлетворяющих условию $Q_n(x) \neq 0$ (соответственно $Q_n(x) > 0$) при всех $x \in K$.

Множество всех непрерывных функций $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ обозначается через $C(K)$. Рациональную функцию $R_* = P_m/Q_n$ будем называть *наилучшим равномерным рациональным приближением* (НРРП) из класса $\mathcal{R}_{m,n}^K$ (соответственно $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$) для функции $f \in C(K)$, если выполняется равенство

$$\max_{x \in K} |R_*(x) - f(x)| = \inf \max_{x \in K} |R(x) - f(x)|,$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям R из соответствующего класса.

Замечание 1. Пусть $K = [a, b]$ и $f \in C[a, b]$. Тогда несократимая рациональная функция $R_* = P_m/Q_n$, дающая НРРП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{[a,b]}$ для функции f , не имеет полюсов на $[a, b]$. Поэтому можно считать, что ее знаменатель Q_n положителен всюду на $[a, b]$. Значит, для непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ понятия НРРП из классов $\mathcal{R}_{m,n}^{[a,b]}$ и $\mathcal{R}_{m,n}^{[a,b]+}$ совпадают.

§ 2. Существование наилучшего равномерного рационального приближения

Из результата Уолша [6, Theorem III, p. 672] вытекает, что если K — компактное множество из \mathbb{R} без изолированных точек (в частности, отрезок $[a, b]$), то для любой непрерывной на нем функции существует НРРП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^K$.

Следующая теорема показывает, что НРРП на конечном множестве из \mathbb{R} может не быть.

Теорема 1. 1. Если $n \geq 1$ и конечное множество $K \subset \mathbb{R}$ имеет более чем $m+1$ точек, то найдется функция $f_0: K \rightarrow \mathbb{R}$, для которой не существует НРРП ни из класса $\mathcal{R}_{m,n}^K$, ни из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$.

2. Если $n = 0$ или множество $K \subset \mathbb{R}$ имеет не более $m+1$ точек, то для любой функции $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ НРРП как из класса $\mathcal{R}_{m,n}^K$, так и из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ существует.

Доказательство 1. Пусть $K = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$, где $M \geq m+1$, $x_0 < x_1 < \dots < x_M$. Зададим функцию f_0 так: $f_0(x_0) = 1$; $f_0(x_i) = 0$ при $i = 1, \dots, M$. Введем последовательность функций из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K,+}$: $R_j(x) = 1/(1+j(x-x_0))$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \inf_{R \in \mathcal{R}_{m,n}^K} \max_{x \in K} |R(x) - f(x)| &\leq \inf_{R \in \mathcal{R}_{m,n}^{K,+}} \max_{x \in K} |R(x) - f(x)| \leq \inf_{j=1,2,\dots} \max_{x \in K} |R_j(x) - f(x)| = \\ &= \inf_{j=1,2,\dots} \max_{i=1,\dots,M} |1/(1+jx_i)| = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что НРПП $R_* = P_m/Q_n$, если оно существует, на множестве K должно совпадать с функцией f . Поэтому значение многочлена P_m , имеющего степень не выше m , в точке x_0 должно быть отличным от нуля, а в точках x_1, \dots, x_M должно быть равным нулю. Но это невозможно, значит, НРПП не существует.

2. При $n = 0$ для построения НРПП $R_* = P_m/Q_n$ достаточно взять $Q_n \equiv 1$, а в качестве P_m взять полином наилучшего равномерного приближения для функции f на множестве K (его существование доказано Борелем в [7]). \square

Заметим, что для частного случая $M = 2$, $m = 0$, $n = 1$ пример, аналогичный примеру из п. 1 доказательства, привел Ватсон в [2, р. 193].

§ 3. Единственность и характеристика наилучшего рационального приближения

Характеризационная теорема о наилучших рациональных приближениях, часто называемая теоремой Чебышёва об альтернансе, для ограниченного промежутка и единичной весовой функции может быть сформулирована так ([1, с. 66], см. также [8], [4, Sect. 8, р. 21]).

Теорема А. Для любой функции $f \in C[a, b]$ несократимая рациональная функция $R = P_m/Q_n$, дающая НРПП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{[a,b]+}$, единственна. Эта функция вполне характеризуется таким свойством: существуют $N = m + n + 2 - d(R)$ точек $t_1 < \dots < t_N$ из отрезка $[a, b]$ и число $\varepsilon_0 \in \{-1, 1\}$ такие, что выполняются равенства

$$R(t_k) - f(t_k) = \varepsilon_0(-1)^k \cdot \max_{x \in [a,b]} |R(x) - f(x)|, \quad k = 1, \dots, N.$$

Точки $t_1 < \dots < t_N$ принято называть *точками альтернанса*.

Для рациональных приближений на компактных множествах из \mathbb{R} можно доказать следующий аналог теоремы А.

Теорема 2. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — компактное множество, $f \in C(K)$, $R = P_m/Q_n$ — несократимая рациональная функция из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K,+}$ и K содержит не менее чем $N = m + n + 2 - d(R)$ точек. Тогда R есть НРПП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K,+}$ для функции f если и только если существуют N точек $x_1 < \dots < x_N$ из K и число $\varepsilon_0 \in \{-1, 1\}$ такие, что выполняются равенства

$$R(x_k) - f(x_k) = \varepsilon_0(-1)^k \cdot \max_{x \in K} |R(x) - f(x)|, \quad k = 1, \dots, N.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы А в [1, с. 66].

§ 4. Алгоритм Ремеза поиска наилучшего рационального приближения

На применении теоремы А основан, в частности, алгоритм Е. Я. Ремеза, разработанный им для поиска полиномов наилучшего равномерного приближения непрерывных функций на отрезке (см. [9, 10]). Этот алгоритм был модифицирован различными авторами для поиска НРПП (см., например, [11, 12]). Приведем здесь описание алгоритма Ремеза для поиска НРПП $R_*(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i / \sum_{j=0}^n b_j x^j$ из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{[a,b]+}$ для функций $f \in C[a, b]$ в случае $d(R_*) = 0$ и $N = m + n + 2$, который мы будем рассматривать далее (мы следуем [2, р. 200] и [5, р. 366]).

Алгоритм состоит из 4-х шагов.

Шаг 1. Положим $p = 1$ и выберем на отрезке $[a, b]$ произвольное подмножество из N элементов $K_p = \{x_1^{(p)} < x_2^{(p)} < \dots < x_N^{(p)}\}$.

Шаг 2. Решив нелинейную систему

$$\sum_{i=0}^m a_i (x_k^{(p)})^i / \sum_{j=0}^n b_j (x_k^{(p)})^j - f(x_k^{(p)}) = (-1)^k h^{(p)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

относительно $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$ и $h^{(p)}$, построим дающую НРПП на множестве K_p рациональную функцию $R_p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i / \sum_{j=0}^n b_j x^j$.

Шаг 3. Положим $r_p(x) = R_p(x) - f(x)$ и вычислим $\bar{h}^{(p)} = \max_{x \in [a, b]} |r_p(x)|$. Если $\bar{h}^{(p)} = |h^{(p)}|$, то (по теореме А) дробь $R_p(x)$ дает наилучшее приближение на $[a, b]$, работа алгоритма успешно завершена, иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если $\bar{h}^{(p)} > |h^{(p)}|$, то существует точка $x_* \in [a, b]$ такая, что $|r_p(x_*)| = \bar{h}^{(p)}$. Возьмем на отрезке $[a, b]$ новое подмножество $K_{p+1} = \{x_1^{(p+1)} < x_2^{(p+1)} < \dots < x_N^{(p+1)}\}$ такое, что $\text{sign}(r_p(x_{k+1}^{(p+1)})) = -\text{sign}(r_p(x_k^{(p+1)}))$ при $k = 1, \dots, N-1$, $|r_p(x_k^{(p+1)})| \geq |h^{(p)}|$ при $k = 1, \dots, N$, а также $\max_{1 \leq k \leq N} |r_p(x_k^{(p+1)})| = \bar{h}^{(p)}$. (Этого можно добиться, например, заменив одну из точек множества K_p на x_* .) Увеличим p на 1 и перейдем к шагу 2.

Замечание 2. Если в какой-то момент нельзя будет сделать шаг 2 (это возможно), то алгоритм не даст результата. Иначе в итоге работы алгоритма получим последовательность рациональных функций $\{R_p\}_{p=1}^\infty$. Как показал Ральстон в [13, Corollary 1, p. 329], для равномерной сходимости последовательности $\{R_p\}_{p=1}^\infty$ к НРПП R_* достаточно выполнения двух условий:

- (а) точки $x_k^{(1)}$, выбранные на шаге 1 алгоритма, достаточно близки к точкам альтернанса t_k из теоремы А, $k = 1, \dots, N$;
- (б) величина $\min_{k=1, \dots, N} |R_1(x_k^{(1)}) - f(x_k^{(1)})|$ достаточно близка к величине $|R_*(t_1) - f(t_1)|$.

§ 5. Конструкция и свойства алгоритма Вернера

Как мы видели в предыдущем параграфе, на шаге 2 алгоритма Ремеза требуется для данного набора точек $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ из отрезка $[a, b]$ решить нелинейную систему вида

$$\sum_{i=0}^m a_i (x_k)^i / \sum_{j=0}^n b_j (x_k)^j - f(x_k) = (-1)^k h, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

относительно $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n, h$, что позволяет на конечном множестве $M = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ построить НРПП $R(x) = P_m(x)/Q_n(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i / \sum_{j=0}^n b_j x^j$ из класса $\mathcal{R}_{m,n}^+$ для функции f (при

условии, что $d(R) = 0$). При этом знаменатель $Q_n(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ должен быть положителен

в точках x_1, \dots, x_N . Для решения этой задачи и предназначен алгоритм Вернера ([14], см. также [15, Sect. 7]). Заметим, что согласно теореме 1 данная задача разрешима не всегда.

Вернер предлагает действовать следующим образом. Умножив равенство (2) на знаменатель и перенеся все в левую часть, получим систему уравнений

$$\sum_{i=0}^m a_i x_k^i + \sum_{j=0}^n b_j x_k^j ((-1)^{k+1} h - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3)$$

При фиксированном h это — линейная однородная система уравнений относительно коэффициентов $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее

определитель равен нулю. Матрица системы (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1^0 & \dots & x_1^m & x_1^0(h - f(x_1)) & \dots & x_1^n(h - f(x_1)) \\ x_2^0 & \dots & x_2^m & x_2^0(-h - f(x_2)) & \dots & x_2^n(-h - f(x_2)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^0 & \dots & x_N^m & x_N^0((-1)^{N+1}h - f(x_N)) & \dots & x_N^n((-1)^{N+1}h - f(x_N)) \end{pmatrix}.$$

Поскольку h входит лишь в последние $n+1$ столбцов этой матрицы, то ее определитель $D_{n+1}(h)$ является многочленом степени $n+1$ от h . Вернер [14, р. 334–335] доказал, что все корни h_1, \dots, h_{n+1} этого многочлена являются *собственными значениями* пучка матриц $A - hB$, где A, B — некоторые симметричные матрицы, B положительно определена. Это означает, что выполняется равенство $Ab = hBb$, где $b = (b_0, \dots, b_n)$ (см. также [16, с. 325]). Отсюда следует, что h_1, \dots, h_{n+1} вещественны. Для каждого собственного значения h_s ($s = 1, \dots, n+1$), решая систему (3) при $h = h_s$, можно найти коэффициенты $a_i = a_{i,h_s}$ ($i = 1, \dots, m$), $b_j = b_{j,h_s}$ ($j = 1, \dots, n$) и соответствующие многочлены $P_{m,h_s}(x) = \sum_{i=0}^m a_{i,h_s}x^i$, $Q_{n,h_s}(x) = \sum_{j=0}^n b_{j,h_s}x^j$.

Известно (см. [14, р. 335], [15, р. 261], [3, р. 115]), что существует не более одного значения h_s , для которого соответствующий многочлен Q_{n,h_s} положителен на отрезке $[x_1, x_N]$. Кроме того, верно следующее, чуть более точное, утверждение.

Предложение 1. *Существует не более одного значения h_s , для которого соответствующий многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках x_1, \dots, x_N .*

Доказательство (ср. [15, с. 261], [3, с. 115]). Пусть для значений h_i и h_j соответствующие им многочлены Q_{n,h_i} и Q_{n,h_j} положительны во всех точках x_1, \dots, x_N . Согласно (2) выполняются равенства

$$\frac{P_{m,h_i}(x_k)}{Q_{n,h_i}(x_k)} - f(x_k) = (-1)^k h_i, \quad \frac{P_{m,h_j}(x_k)}{Q_{n,h_j}(x_k)} - f(x_k) = (-1)^k h_j, \quad k = 1, \dots, N.$$

Вычитая, получим

$$\frac{P_{m,h_i}(x_k)Q_{n,h_j}(x_k) - P_{m,h_j}(x_k)Q_{n,h_i}(x_k)}{Q_{n,h_i}(x_k)Q_{n,h_j}(x_k)} = (-1)^k (h_i - h_j), \quad k = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Отсюда видно, что многочлен $S_{m+n} = P_{m,h_i}Q_{n,h_j} - P_{m,h_j}Q_{n,h_i}$ степени $m+n$ при $h_i = h_j$ обращается в ноль в точках x_1, \dots, x_N , а при $h_i \neq h_j$ имеет чередующиеся знаки в этих точках. В любом случае он имеет не менее чем $N-1 = m+n+1$ различных корней. Поэтому $S_{m+n} \equiv 0$. Тогда из равенства (4) получаем, что $h_i = h_j$. Предложение доказано. \square

Замечание 3. Возможна ситуация, когда ни одному из h_1, \dots, h_{n+1} не соответствует многочлен Q_{n,h_s} , положительный в точках x_1, \dots, x_N . Например, так будет, если $m = 0$ и в последовательности $f(x_1), \dots, f(x_N)$ есть два соседних нулевых значения. Маэли [15, с. 262] также привел следующий пример такой ситуации: $m = 0, n = 1; x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1; f(x) = x$. Такая ситуация возможна даже тогда, когда все значения $f(x_1), \dots, f(x_N)$ положительны.

§ 6. Выбор собственных значений в алгоритме Вернера при $m = 0$

Из вышеизложенного видна актуальность разработки экономичного способа выбора того единственного (см. предложение 1) собственного значения h_s , для которого многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках x_1, \dots, x_N (если, конечно, оно существует (см. замечание 3)).

В случае $n = 1$ из результата Куртиса и Осборна [17, Sect. 2, р. 287] следует, что если производная порядка $m+1$ функции f сохраняет знак на отрезке $[x_1, x_N]$, то это собственное значение h_s (если оно существует) имеет *минимальный модуль* среди всех собственных значений (при $n = 1$ их всего два). Далее в той же работе [17, Sect. 2, р. 287] авторы заметили, что

при отсутствии знакопостоянства у f^{m+1} собственное значение h_s может иметь *максимальный модуль* среди всех. Соответствующий пример приведен Маэли в [15, р. 262]: $m = 0$, $n = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$; $f(x) = (4 + 5x - x^2)/2$. При этом $h_1 = -2$, $h_2 = 1$, $h_s = -2$, $Q_{n,h_s} = 6/x$.

В настоящем параграфе мы решаем эту задачу выбора лишь для случая $m = 0$, то есть $P_m(x) \equiv a_0$, $R(x) = a_0/Q_n(x)$. Кроме того, в силу специфики алгоритма Вернера должно быть $d(R) = 0$. Отсюда следует, что $a_0 \neq 0$ и $N = n + 2$. В приводимой ниже теореме квадратными скобками обозначается целая часть числа, заключенного в них.

Теорема 3. Пусть $m = 0$, $x_1 < \dots < x_{n+2}$, все значения $f(x_1), -f(x_2), \dots, (-1)^{n+2}f(x_{n+2})$ различны. Далее, пусть $h_1 \leq \dots \leq h_{n+1}$ — все собственные значения, значению h_s соответствует положительный во всех точках x_1, \dots, x_{n+2} многочлен Q_{n,h_s} и $P_{m,h_s} \equiv a_{0,h_s} \neq 0$. Тогда собственные значения h_1, \dots, h_{n+1} различны, причем $s = \lfloor (n+2)/2 \rfloor$ при $a_{0,h_s} > 0$, $s = \lfloor (n+3)/2 \rfloor$ при $a_{0,h_s} < 0$.

Перед доказательством теоремы приведем три численных примера.

Пример 1. В описанном выше примере Маэли $a_{0,h_s} = 6 > 0$, поэтому $s = \lfloor (n+2)/2 \rfloor = 1$.

В следующих двух примерах все результаты округлены до трех цифр после десятичной точки.

Пример 2. Пусть $m = 0$, $n = 3$, $N = 5$; $\{x_k\}_{k=1}^N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\{f(x_k)\}_{k=1}^N = \{2, 7, 3, 8, 4\}$. Тогда $\{h_i\}_{i=1}^{n+1} = \{-7.524, -2.251, 2.148, 3.876\}$. Для $h_s = -2.251$ получим положительный в точках $\{x_k\}_{k=1}^N$ многочлен $Q_{n,h_s} = -0.001x^3 + 0.013x^2 - 0.126x + 1$. При этом $a_{0,h_s} = 3.765 > 0$, поэтому $s = \lfloor (n+2)/2 \rfloor = 2$. Заметим, что в данном случае модуль h_s не является минимальным.

Пример 3. Если $m = 0$, $n = 4$, $N = 6$; $\{x_k\}_{k=1}^N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\{f(x_k)\}_{k=1}^N = \{5, 6, 4, 7, 3, 8\}$, то $\{h_i\}_{i=1}^{n+1} = \{-7.932, -6.348, -1.5, 3.348, 4.932\}$. Для $h_s = -1.5$ получим положительный в точках $\{x_k\}_{k=1}^N$ многочлен $Q_{n,h_s} = -0.04x^4 + 0.404x^3 - 1.283x^2 + 1.364x + 1$. Так как при этом $a_{0,h_s} = 6.5 > 0$, то $s = \lfloor (n+2)/2 \rfloor = 3$.

Для доказательства теоремы 3 нужна следующая лемма (ср. [14, Hilfssatz 2.1, р. 333]).

Лемма 1. Пусть $x_1 < \dots < x_{n+2}$, Q — многочлен степени не выше n . Тогда

$$\sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k Q(x_k) / |w_k| = 0, \quad \text{где} \quad w_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} (x_k - x_j). \quad (5)$$

Доказательство. Интерполяционным многочленом для Q с узлами x_1, \dots, x_{n+2} является сам многочлен Q . Следовательно, при всех x выполнено соотношение

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n+2} Q(x_k) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} (x - x_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} (x_k - x_j).$$

Приравнивая коэффициенты при x^{n+1} в левой и правой частях, а также учитывая равенства $w_k = (-1)^{n-k}|w_k|$, $k = 1, \dots, n+2$, получаем утверждение леммы. \square

Доказательство теоремы 3.

Так как $m = 0$, то система (3) принимает следующий вид:

$$a_0 + \sum_{j=0}^n b_j x_k^j ((-1)^{k+1} h - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, n+2.$$

Для каждого $i = 1, \dots, n+1$ при $h = h_i$ она имеет нетривиальное решение $a_{0,h_i}, b_{0,h_i}, \dots, b_{n,h_i}$:

$$a_{0,h_i} + \sum_{j=0}^n b_{j,h_i} x_k^j ((-1)^{k+1} h_i - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, n+2.$$

Отсюда

$$a_{0,h_i} + Q_{n,h_i}(x_k)((-1)^{k+1}h_i - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, n+2. \quad (6)$$

При $i = s$, учитывая, что $Q_{n,h_s}(x_k) \neq 0$, выразим из (6) значения $f(x_k)$:

$$f(x_k) = a_{0,h_s}/Q_{n,h_s}(x_k) + (-1)^{k+1}h_s, \quad k = 1, \dots, n+2.$$

Далее, введя при $k = 1, \dots, n+2$ обозначения $\alpha_k = (-1)^{k+1}a_{0,h_s}/Q_{n,h_s}(x_k)$, получим

$$f(x_k) = (-1)^{k+1}(\alpha_k + h_s), \quad k = 1, \dots, n+2. \quad (7)$$

Отсюда в силу условий теоремы следует что все значения $\alpha_k = (-1)^{k+1}f(x_k) - h_s$ различны, $k = 1, \dots, n+2$. Затем подставим выражения (7) в равенства (6) для каждого $i = 1, \dots, n+1$:

$$a_{0,h_i} + Q_{n,h_i}(x_k)(-1)^{k+1}(h_i - h_s - \alpha_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n+2.$$

Выразим из этого равенства $Q_{n,h_i}(x_k)$, введя обозначения $d_i = h_i - h_s$ при $i = 1, \dots, n+1$:

$$Q_{n,h_i}(x_k) = (-1)^k a_{0,h_i}/(d_i - \alpha_k). \quad (8)$$

Далее воспользуемся леммой 1 для многочлена $Q = Q_{n,h_i}$ при каждом $i = 1, \dots, n+1$. Тогда подставив в равенство (5) выражения (8), получим $a_{0,h_i} \sum_{k=1}^{n+2} |w_k|^{-1}/(d_i - \alpha_k) = 0$, где $a_{0,h_i} \neq 0$.

Итак, числа d_i , $i = 1, \dots, n+1$, являются корнями следующего уравнения относительно d :

$$\sum_{k=1}^{n+2} |w_k|^{-1}/(d - \alpha_k) = 0. \quad (9)$$

Для любого $k = 1, \dots, n+2$ левая часть уравнения (9) стремится к $-\infty$ при $d \rightarrow \alpha_k - 0$ и стремится к $+\infty$ при $d \rightarrow \alpha_k + 0$. Кроме того, левая часть (9) непрерывна на каждом из смежных интервалов, образованных различными числами $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}$. Следовательно, уравнение (9) имеет не менее $n+1$ различных корней. С другой стороны, после приведения левой части (9) к общему знаменателю в числителе получим многочлен степени не выше $n+1$, значит, это уравнение имеет не более $n+1$ корней. Итак, корни d_1, \dots, d_{n+1} уравнения (9) расположены ровно по одному на каждом из смежных интервалов, образованных числами $\alpha_k = (-1)^{k+1}a_{0,h_s}/q_k$, $k = 1, \dots, n+2$. Отсюда, поскольку $q_k = Q_{n,h_s}(x_k) > 0$ при $k = 1, \dots, n+2$ и $d_s = 0$, получаем следующие выводы.

1. Все корни d_1, \dots, d_{n+1} различны.
2. При $a_{0,h_s} > 0$ среди $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}$ находятся ровно $[(n+2)/2]$ отрицательных чисел и ровно $[(n+3)/2]$ положительных. Поэтому корень $d_s = 0$ стоит на $[(n+2)/2]$ -м месте в упорядоченной последовательности корней $d_1 < \dots < d_{n+1}$. При $a_{0,h_s} < 0$, соответственно, корень $d_s = 0$ стоит на $[(n+3)/2]$ -м месте в этой последовательности.

Поскольку $h_i = d_i + h_s$ ($i = 1, \dots, n+1$), то аналогичные выводы верны и для собственных значений. Из этих выводов следует утверждение теоремы. \square

Авторы благодарят Александра Артамонова за помощь в проведении численных экспериментов, в результате которых был обнаружен эффект, описанный в теореме 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
2. Watson G.A. Approximation theory and numerical methods. New York: John Wiley and Sons, 1980. 229 p.
3. Powell M.J. Approximation theory and methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 339 p.
4. Brezinski C. Historical perspective on interpolation, approximation and quadrature // Handbook of numerical analysis. Vol. 3 / P.G. Ciarlet, J.-L. Lions. North-Holland, 1994. P. 3–46.

5. Sendov B., Andreev A. Approximation and interpolation theory // Handbook of numerical analysis. Vol. 3 / P.G. Ciarlet, J.-L. Lions. North-Holland, 1994. P. 223–462.
6. Walsh J.L. The existence of rational functions of best approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. Vol. 33. P. 668–689.
7. Borel E. Leçons sur les fonctions de variables réelles. Paris: Gauthier-Villars, 1905.
8. Ахиезер Н.И. Об экстремальных свойствах некоторых рациональных функций // Доклады Академии наук СССР. 1930. Т. 18. С. 495–498.
9. Remes E. Ya. Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebycheff // C.R. Acad. Sci. Paris. 1934. Vol. 199. P. 337–340.
10. Ремез Е.Я. Про методи найкращого в розумінні Чебишова наближеного представлення функцій. Київ: Вид-во ВУАН, 1935. 162 с.
11. Werner H. Tschebyscheff-approximation im bereich der rationalen funktionen bei vorliegen einer guten ausgangsnäherung // Arch. Ration. Mech. Anal. 1962. Vol. 10. № 1. P. 205–219.
12. Fraser W., Hart J.F. On the computation of rational approximations of continuous functions // Comm. ACM. 1962. Vol. 5. № 7. P. 401–403.
13. Ralston A. Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms // Numer. Math. 1965. Vol. 7. № 4. P. 322–330.
14. Werner H. Rationale Tschebyscheff-approximation, eigenwerttheorie und differenzenrechnung // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. Vol. 13. № 1. P. 330–347.
15. Maehly H.J., Witzgal Ch. Methods for fitting rational approximations. Parts II and III // Journal of the ACM. 1963. Vol. 10. № 3. P. 257–277.
16. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.
17. Curtis A., Osborne M.R. The construction of minimax rational approximation to functions // The Computer Journal. 1966. Vol. 9. № 3. P. 286–293.

Поступила в редакцию 01.08.2015

Галкин Олег Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

On rational approximations of functions and eigenvalue selection in Werner algorithm

Keywords: best uniform rational approximations, rational approximations on finite sets, Remez algorithm, Werner algorithm, selection of eigenvalues in Werner algorithm.

MSC: 65D15, 41A20

The paper deals with the best uniform rational approximations (BURA) of continuous functions on compact (and even finite) subsets of real axis \mathbb{R} . The authors show that BURA does not always exist. They study the algorithm of Helmut Werner in more detail. This algorithm serves to search for BURA of the type $P_m/Q_n = \sum_{i=0}^m a_i x^i / \sum_{j=0}^n b_j x^j$ for functions on a set of $N = m + n + 2$ points $x_1 < \dots < x_N$. It can be used within the Remez algorithm of searching for BURA on a segment. The Verner algorithm calculates $(n + 1)$ real eigenvalues h_1, \dots, h_{n+1} for the matrix pencil $A - hB$, where A and B are some symmetric matrices. Each eigenvalue generates a rational fraction of the type P_m/Q_n which is a candidate for the best approximation. It is known that at most one of these fractions is free from poles on the segment $[x_1, x_N]$, so the following problem arises: how to determine the eigenvalue which generates the rational fraction without poles? It is shown that if $m = 0$ and all values $f(x_1), -f(x_2), \dots, (-1)^{n+2} f(x_{n+2})$ are different and the approximating function is

positive (negative) at all points x_1, \dots, x_{n+2} , then this eigenvalue ranks $[(n+2)/2]$ -th ($[(n+3)/2]$ -th) in value. Three numerical examples illustrate this statement.

REFERENCES

1. Achiezer N.I. *Theory of approximation*, New York: Frederick Ungar publishing, 1956, 307 p. Original Russian text published in Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii*, Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1947, 323 p.
2. Watson G.A. *Approximation theory and numerical methods*, New York: John Wiley and Sons, 1980, 229 p.
3. Powell M.J. *Approximation theory and methods*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981, 339 p.
4. Brezinski C. Historical perspective on interpolation, approximation and quadrature, *Handbook of numerical analysis*, vol. 3, Eds.: Ciarlet P.G., Lions J.-L. North-Holland, 1994, pp. 3–46.
5. Sendov B., Andreev A. Approximation and interpolation theory, *Handbook of numerical analysis*, vol. 3, Eds.: Ciarlet P.G., Lions J.-L. North-Holland, 1994, pp. 223–462.
6. Walsh J.L. The existence of rational functions of best approximation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 33, pp. 668–689.
7. Borel E. *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris: Gauthier-Villars, 1905.
8. Achiezer N.I. On extremal properties of certain rational functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1930, vol. 18, pp. 495–498 (in Russian).
9. Remes E.Ya. Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebycheff, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1934, vol. 199, pp. 337–340.
10. Remez E.Ya. *Pro metody naikrashchogo v rozuminni Chebysheva nablizhenogo predstavleniya funktsii* (On the methods of the best approximate representation of functions in Chebyshev sense), Kii: Ukr. Akad. Nauk, 1935, 162 p. (In Ukrainian).
11. Werner H. Tschebyscheff-approximation im bereich der rationalen funktionen bei vorliegen einer guten ausgangsnäherung, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 205–219.
12. Fraser W., Hart J.F. On the computation of rational approximations of continuous functions, *Comm. ACM*, 1962, vol. 5, no. 7, pp. 401–403.
13. Ralston A. Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms, *Numer. Math.*, 1965, vol. 7, no. 4, pp. 322–330.
14. Werner H. Rationale Tschebyscheff-approximation, eigenwerttheorie und differenzenrechnung, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1963, vol. 13, no. 1, pp. 330–347.
15. Maehly H.J., Witzgal Ch. Methods for fitting rational approximations. Parts II and III, *Journal of the ACM*, 1963, vol. 10, no. 3, pp. 257–277.
16. Parlett B. *The symmetric eigenvalue problem*, N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980, 348 p. Translated under the title *Simmetrichnaya problema sobstvennykh znachenii. Chislennyye metody*, Moscow: Mir, 1983, 384 p.
17. Curtis A., Osborne M.R. The construction of minimax rational approximation to functions, *The Computer Journal*, 1966, vol. 9, no. 3, p. 286–293.

Received 01.08.2015

Galkin Oleg Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.

E-mail: olegegalkin@ya.ru

Galkina Svetlana Yur'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.

E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru