УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

К ВОПРОСУ О СОБЛЮДЕНИИ ОГРАНИЧЕНИЙ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ [1]

Рассматривается проблема соблюдения ограничений асимптотического характера, которая с использованием элементов естественного расширения редуцируется к обобщенной задаче в классе ультрафильтров исходного пространства решений. Ограничениям упомянутого типа сопоставляется стандартная компонента, определяемая обычным требованием принадлежности заданному множеству; данная компонента на идейном уровне соответствует конструкции точных решений Дж. Варги. В то же время при соблюдении вышеупомянутых ограничений могут возникать асимптотические (по смыслу) режимы, для которых реализуется идея соблюдения условий принадлежности «с некоторого момента»; при этом, однако, одно множество, характеризующее стандартное ограничение в терминах включения, заменяется непустым семейством. Данное семейство нередко возникает при последовательном ослаблении условия принадлежности элемента, зависящего от выбора решения, фиксированному множеству в топологическом пространстве (последнее зачастую бывает метризуемым). Множества — элементы упомянутого семейства — определяются при этом условиями принадлежности соответствующих их элементов окрестностям данного фиксированного множества. Возможна, однако, ситуация, когда семейство, определяющее ограничения асимптотического характера, возникает изначально и не связывается уже с ослаблением какого-либо (стандартного) условия.

В статье рассматривается общий случай, для которого исследуется структура множества допустимых обобщенных элементов. Показано, что для «хорошо устроенной» обобщенной задачи стандартная компонента «асимптотических ограничений» отвечает за реализацию внутренности вышеупомянутого множества допустимых обобщенных элементов, и указано конкретное представление данного топологического свойства. Получены также некоторые следствия упомянутого представления, касающиеся допустимых обобщенных элементов, не аппроксимируемых в топологическом смысле точными решениями.

Ключевые слова: расширение, топологическое пространство, ультрафильтр.

Введение

Совсем недавно автор настоящей статьи обсуждал с Евгением Леонидовичем Тонковым направление, развиваемое в данной работе. Он говорил также о своем желании приехать в Екатеринбург для участия в конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Николая Николаевича Красовского. Случилось несчастье: спустя несколько дней Евгений Леонидович ушел из жизни. Он был замечательным ученым-математиком, педагогом и организатором науки, простым и сердечным человеком. Светлая память о Евгении Леонидовиче сохранится в сердцах его друзей, учеников, товарищей по работе.

В статье используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОАХ — ограничения асимптотического характера, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, УП — упорядоченная пара, у/ф — ультрафильтр.

Хорошо известно [1, гл. III], что в экстремальных задачах и, в частности, в задачах теории оптимального управления может отсутствовать свойство устойчивости по результату при ослаблении системы ограничений. Однако здесь эффект неустойчивости играет положительную роль: при сколь угодно малом ослаблении условий скачкообразно расширяются наши

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (12–01–00537, 13–01–90414-укр_ф_а) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12–П–1–1012, 12–П–1–1019).

возможности, а стало быть, реализуется новое качество в смысле соответствующего критерия или в смысле области достижимости, понимаемой в ряде случаев расширительно (так, например, можно говорить о пучке траекторий и о его скачкообразном изменении). По этой причине с практической точки зрения представляется наиболее интересным исследование режимов управления «на грани фола» в смысле соблюдения ограничений задачи. Сама степень ослабления исходных условий зачастую не может быть задана изначально, а потому вполне естественным представляется асимптотический вариант постановки, когда «просматривается» весь спектр ослабленных ограничений. Реально это можно осуществить, заменяя множество допустимых управлений исходной задачи семейством аналогичных множеств, отвечающих каждое тому или иному варианту ослабленных ограничений. В абстрактной форме данный прием имеет обычно следующий вид.

Итак, пусть E — непустое множество (потенциально возможных) обычных решений (управлений), (X,τ) — заданное ТП, полагаемое сейчас регулярным [2, гл. 4] (что, как правило, вполне достаточно для приложений), Y — замкнутое в (X,τ) п/м X и $s:\ E \longrightarrow X$. Условие $s(e)\in Y$ рассматриваем как ограничение на выбор $e\in E$. Тогда $s^{-1}(Y)=\{e\in E \mid s(e)\in Y\}$ есть множество допустимых обычных решений. Если к тому же $(H,\mathbf{t})$, $H\neq\varnothing$, есть ТП, элементы которого имеют смысл результатов выбора решений $e\in E$, а $\mathbf{h}:\ E\longrightarrow H$ есть некоторый целевой оператор, то множество-образ

$$\mathbf{h}^1\left(s^{-1}(Y)\right)=\left\{\mathbf{h}(e):\ e\in s^{-1}(Y)\right\}$$

может рассматриваться в качестве абстрактного аналога области достижимости в теории управления (см. [3,4]). Ясно, что замена $s^{-1}(Y)$ каким-либо множеством $\tilde{E}$, для которого

$$s^{-1}(Y)\subset\tilde{E}\subset E,$$

объективно является полезной с точки зрения достижения тех или иных элементов H в виде $s(e)$, где $e\in\tilde{E}$. Желательно, однако, обеспечить «близость» $s^{-1}(Y)$ и $\tilde{E}$. В этой связи логичным представляется асимптотический вариант постановки, согласующийся в идейном отношении с [1, гл. III].

Итак, пусть $\mathcal{Y}$ — некоторая база окрестностей Y в смысле ТП (Y,τ) (будем сейчас для простоты рассматривать только открытые окрестности): $\mathcal{Y}\subset\tau$ и при этом

$$(Y\subset Z\ \forall\, Z\in\mathcal{Y})\ \&\ (\,\forall\, G\in\tau\ \ (Y\subset G)\Longrightarrow(\,\exists\,\mathbb{Y}\in\mathcal{Y}:\ \mathbb{Y}\subset G))$$

(в качестве $\mathcal{Y}$ можно, в частности, рассматривать семейство всех открытых п/м X, содержащих множество Y). Тогда $\mathcal{Y}\neq\varnothing$ и в силу регулярности (X,τ)

$$Y=\bigcap_{Z\in\mathcal{Y}} Z.$$

Данному равенству отвечает аналогичное равенство прообразов

$$s^{-1}(Y)=\bigcap_{Z\in\mathcal{Y}} s^{-1}(Z),$$

непосредственно следующее из свойств операции взятия прообраза. Если теперь ввести семейство $\mathcal{E}$ всех множеств $s^{-1}(Z),\ Z\in\mathcal{Y}$, то

$$s^{-1}(Y)=\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma;$$

разумеется, данное семейство $\mathcal{E}$ п/м E непусто. В свете данного представления условию $e\in s^{-1}(Y)$ сопоставляется серия условий $e\in\Sigma,\ \Sigma\in\mathcal{E}$, которая, конечно, не может быть реализована иначе как $s(e)\in Y$. Поэтому пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ совпадает с множеством всех точных решений исходной задачи (представление такого рода широко используется в дальнейшем). В то же время естественным обобщением точного ограничения представляется вариант

$$e_\alpha \in Z \ \text{ с некоторого момента } \ (\forall\, Z \in \mathcal{E}) \tag{0.1}$$

условий на выбор направленности (e_α) в множестве E (см. аналог вышеупомянутого условия для фильтров и у/ф в [5]). Здесь фактически используется подход Дж. Варги [1, гл. III] в части построения (секвенциальных в [1]) приближенных решений. Для направленностей (e_α) со свойством (0.1) рассматриваем обобщенные пределы получающихся при этом направленностей $(\mathbf{h}(e_\alpha))$, используя сходимость по Мору–Смиту. Совокупность упомянутых пределов рассматриваем как МП, отвечающее семейству $\mathcal{E}$; последнее трактуется при этом как ОАХ. Разумеется, данное МП содержит замыкание множества $\mathbf{h}^1(s^{-1}(Y))$ и может сильно отличаться от последнего даже в тех случаях, когда для реализации всех элементов упомянутого МП достаточно использовать только последовательности в E (последовательности — частный случай направленностей, а потому для них условие (0.1) сохраняет смысл; в связи с этими случаями см. [6, с. 38]). Поэтому замена множества $\mathbf{h}^1(s^{-1}(Y))$ соответствующим МП является выгодной, так как мы получаем новые возможности в части реализации элементов H.

Требование (0.1) можно рассматривать как условие допустимости (точнее, $\mathcal{E}$-допустимости) несеквенциального приближенного решения в смысле, подобном [1, гл. III] (где рассматривались решения-последовательности). Использование направленностей вместо последовательностей (обычных решений) является естественной модификацией приближенного решения в духе [1, гл. III]. Однако при этом возникают определенные затруднения теоретико-множественного характера в связи с определением множества допустимых (приближенных) решений; эти затруднения легко преодолеваются [5] при замене направленностей фильтрами; более того, оказывается возможным (см. [5, 7–9] и др.) ограничиться использованием у/ф. Разумеется, условие (0.1) при этом модифицируется: требуется рассматривать у/ф множества E, которые содержат семейство $\mathcal{E}$. В этих терминах и в соответствии с общими положениями [10] определяется множество допустимых обобщенных элементов, реализуемых в виде у/ф (такие у/ф могут одновременно рассматриваться и как несеквенциальные приближенные решения). Упомянутое множество оказывается при этом совпадающим с МП для оператора, сопоставляющего точке множества E тривиальный у/ф, отвечающий данной точке.

В связи с последним представлением возникает естественный вопрос относительно роли множества $s^{-1}(Y)$, которое, как уже отмечалось, совпадает с пересечением всех множеств из $\mathcal{E}$. Ясно, что элементы этого множества (после погружения в пространство у/ф) будут допустимыми уже как обобщенные элементы. Логично полагать, что подобной допустимостью будут обладать и у/ф, являющиеся (обобщенными) пределами точных решений из $s^{-1}(Y)$ при интерпретации последних в виде тривиальных у/ф. Разумеется, пространство у/ф должно быть оснащено надлежащей топологией; это может быть достигнуто посредством применения компактификации Стоуна–Чеха [11, раздел 3.6] (см. соответствующую схему в [9]). Про вышеупомянутые решения можно сказать, что они в своей основе отвечают идее точного соблюдения ограничений и реализуются в виде элементов замыкания пересечения всех множеств из $\mathcal{E}$. Но, как показывают примеры (см. [1, 6, 12]), имеются принципиально иные варианты асимптотического поведения, для которых осуществление условий, подобных (0.1), уже не связывается с соблюдением точных ограничений.

Отметим, что интерпретация, отвечающая использованию конструкций в духе упомянутого пересечения множеств семейства $\mathcal{E}$, может быть связана с иными (в содержательном отношении) постановками; так, например, данная схема может быть отнесена к представлению ограничений в виде неравенств (имеются в виду задачи математического программирования) в терминах системы «ослабленных» неравенств, которым также сопоставляются соответствующие множества допустимых элементов. Таким образом, вышеупомянутая схема, изложенная ранее в топологических терминах с применением окрестностей, является достаточно общей и заслуживающей самостоятельного рассмотрения.

§ 1. Обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению; $\exists!$ заменяет фразу «существует и единственно», def — фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора и называем семейством множество, все элементы которого сами являются множествами. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x. Через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м множества X, $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Если $\mathbb{H}$ — множество и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{H}}[\mathcal{H}] \triangleq \{\mathbb{H} \setminus H : \ H \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$$

есть двойственное по отношению к $\mathcal{H}$ семейство п/м $\mathbb{H}$.

Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B (следуем [10, § 6]); если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : \ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ и в случае $C \neq \varnothing$ непременно $f^1(C) \neq \varnothing$. Если же $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества, $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то

$$f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A) : \ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$$

интерпретируем как образ семейства $\mathcal{A}$ (на самом же деле имеется в виду семейство всех образов множеств из $\mathcal{A}$).

Специальные семейства. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество I, получая в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(I)$. Тогда

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \ \& \ (\ I \in \mathcal{I}) \ \& \ (\ A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \, \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$

есть семейство всех π-систем [13, с. 14] п/м I с «нулем» и «единицей». Отметим некоторые частные случаи π-систем из множества (1.1): алгебры и полуалгебры п/м I, топологии на I. В этой связи введем семейства

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \ \ (\mathrm{top})[I] \triangleq \left\{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\right\}$$

всех алгебр п/м I и всех топологий на I. В дальнейшем УП $(I, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I} \in \pi[I]$, называем ИП, понимая, конечно, данный термин расширительно (таким образом, у нас и ТП являются ИП в упомянутом толковании). Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I} \, \forall x \in I \setminus L \, \exists \Lambda \in \mathcal{I} : \ (x \in \Lambda) \ \& \ (\Lambda \cap L = \varnothing)\}. \tag{1.2}$$

Фиксируем до конца настоящего раздела π-систему $\mathcal{J} \in \pi[I]$. Тогда

$$\beta^0_{\mathcal{J}}[I] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\varnothing\}) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B} \, \forall B_2 \in \mathcal{B} \, \exists B_3 \in \mathcal{B} : \ B_3 \subset B_1 \cap B_2\} \tag{1.3}$$

есть семейство всех БФ, содержащихся в π-системе $\mathcal{J}$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \, \forall A \in \mathcal{F} \, \forall B \in \mathcal{F}) \& (\forall F \in \mathcal{F} \, \forall J \in \mathcal{J} \ \ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F}))\} \tag{1.4}$$

имеем семейство всех фильтров ИП $(I, \mathcal{J})$. Связь (1.3), (1.4) реализуется стандартной процедурой: если $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{J}}[I]$, то

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{J}] \triangleq \{J \in \mathcal{J} \mid \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})$$

есть фильтр ИП $(I,\mathcal{J})$, порожденный базой $\mathcal{B}$. Условимся, наконец, о соглашении: если $x\in I$, то

$$((I,\mathcal{J})-\mathrm{ult})[x]\stackrel{\triangle}{=}\{J\in\mathcal{J}\mid x\in J\};\tag{1.5}$$

при этом, как легко видеть, $((I,\mathcal{J})-\mathrm{ult})[x]\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})$. Получили тривиальный фильтр ИП $(I,\mathcal{J})$. Далее, напомним, что [14, (3.4)] множество всех у/ф ИП $(I,\mathcal{J})$ есть

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\stackrel{\triangle}{=}\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\mid\forall\,\mathcal{F}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\ \ (\mathcal{U}\subset\mathcal{F})\Longrightarrow(\mathcal{U}=\mathcal{F})\}=\\=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\mid\forall\,J\in\mathcal{J}\ \ (J\cap U\neq\varnothing\;\forall\,U\in\mathcal{U})\Longrightarrow(J\in\mathcal{U})\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{J})).\end{gathered}\tag{1.6}$$

Итак, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ — непустое множество (см. (1.6)). При этом

$$(\mathcal{J}\in\tilde{\pi}^0[I])\Longleftrightarrow(((I,\mathcal{J})-\mathrm{ult})[y]\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\ \ \forall\,y\in I).\tag{1.7}$$

Отметим, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L)\stackrel{\triangle}{=}\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\mid L\in\mathcal{U}\}=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\mid L\cap U\neq\varnothing\;\forall\,U\in\mathcal{U}\}\;\forall\,L\in\mathcal{J}.\tag{1.8}$$

Тогда, как легко видеть, (непустое) семейство

$$(\mathbb{UF})[I;\mathcal{J}]\stackrel{\triangle}{=}\{\Phi_{\mathcal{J}}(J):\ J\in\mathcal{J}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})))$$

есть база (определяемой единственным образом) топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]$, для которой

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]=\{G\in\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}))\mid\forall\,\mathcal{U}\in G\;\exists\,U\in\mathcal{U}:\ \Phi_{\mathcal{J}}(U)\subset G\}\in(\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})].$$

Ясно, что при этом $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{J}]\subset\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]$. Отметим, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}),\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I])\tag{1.9}$$

есть хаусдорфово пространство, в котором все множества $\Phi_{\mathcal{J}}(J)$, $J\in\mathcal{J}$, замкнуты (замкнуты в ТП (1.9)). Как следствие, получаем, что

$$(\mathbb{UF})[I;\mathcal{J}]\subset\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]\cap\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]],\tag{1.10}$$

то есть все множества из $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{J}]$ открыто-замкнуты в смысле (1.9); последнее является, следовательно, нульмерным ТП.

Если $\mathfrak{J}\in\mathcal{P}'(\mathcal{J})$, то в виде $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}|\mathfrak{J})\stackrel{\triangle}{=}\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})|\mathfrak{J}\subset\mathcal{U}\}$ имеем (см. (1.10)) множество, замкнутое в ТП (1.9).

Замечание 1.1. Пусть $\mathcal{J}\in(\mathrm{alg})[I]$. Тогда ТП (1.9) — компакт (компактное хаусдорфово пространство), пространство Стоуна. Кроме того, отметим, что [15, замечание 3.3] в данном случае (компакта Стоуна)

$$(\mathbb{UF})[I;\mathcal{J}]=\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]\cap\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]],\tag{1.11}$$

то есть $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{J}]$ исчерпывает «запас» открыто-замкнутых множеств в ТП (1.9). □

Частный случай: ультрафильтры семейства всех подмножеств I. В пределах настоящего пункта полагаем, что $\mathcal{J}=\mathcal{P}(I)$, где I — непустое множество. Данное обстоятельство учитывается в обозначениях. Итак,

$$\beta_0[I]\stackrel{\triangle}{=}\beta^0_{\mathcal{P}(I)}[I]=\{\mathcal{B}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))\mid\forall\,B_1\in\mathcal{B}\;\forall\,B_2\in\mathcal{B}\;\exists\,B_3\in\mathcal{B}:\ B_3\subset B_1\cap B_2\},\tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}[I]\stackrel{\triangle}{=}\mathbb{F}^*(\mathcal{P}(I))=\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))\mid(A\cap B\in\mathcal{F}\;\forall\,A\in\mathcal{F}\;\forall\,B\in\mathcal{F})\&(\forall\,F\in\mathcal{F}\;\forall\,J\in\mathcal{P}(I)\\(F\subset J)\Longrightarrow(J\in\mathcal{F}))\},\end{gathered}\tag{1.13}$$

$$(I-\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} (I-\mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{P}(I)] = \{J \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}: \ B \subset J\} \in \mathfrak{F}[I] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I],$$
$$(I-\mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} ((I,\mathcal{P}(I))-\mathrm{ult})[x] = \{J \in \mathcal{P}(I) \mid x \in J\} \; \forall x \in I.$$

Из (1.6), в свою очередь, вытекает, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(I)) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \\ \forall J \in \mathcal{P}(I) \ \ (J \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (J \in \mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}[I]), \tag{1.14}$$

причем $(I-\mathrm{ult})[x] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \; \forall x \in I$. Отметим, что согласно (1.8)

$$\Phi_0(L|I) \stackrel{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{P}(I)}(L) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid L \cap U \neq \varnothing \; \forall U \in \mathcal{U}\} \; \forall L \in \mathcal{P}(I). \tag{1.15}$$

Семейство $(\mathbf{UF})[I] \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{UF})[I;\mathcal{P}(I)] = \{\Phi_0(J|I) : J \in \mathcal{P}(I)\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]))$ является базой топологии

$$\tau_0^*[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}^*_{\mathcal{P}(I)}[I] = \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]) \mid \forall \mathcal{U} \in G \; \exists U \in \mathcal{U}: \ \Phi_0(U|I) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]], \tag{1.16}$$

превращающей $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ в непустой компакт

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I], \tau_0^*[I]), \tag{1.17}$$

для которого согласно замечанию 1.1 имеет место равенство

$$(\mathbf{UF})[I] = \tau_0^*[I] \cap \mathbf{C}_{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]}[\tau_0^*[I]] \tag{1.18}$$

(учли то обстоятельство, что $\mathcal{P}(I) \in (\mathrm{alg})[I]$). Заметим, что посредством (1.12)–(1.16) определена конструкция, приводящая [16, с. 165–167] к компактификации Стоуна–Чеха, реализуемой в (1.17); (1.18) определяет характерное представление открыто-замкнутых множеств в ТП (1.17).

Если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$, то полагаем, что

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[I|\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathcal{I} \subset \mathcal{U}\}; \tag{1.19}$$

у/ф из $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[I|\mathcal{I}]$ рассматриваем как $\mathcal{I}$-допустимые, а само семейство $\mathcal{I}$ играет роль ОАХ.

Элементы топологии. В настоящем пункте фиксируем множество I, $I \neq \varnothing$, и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, получая в виде (I,τ) соответствующее ТП. Тогда, в частности, $\tau \in \pi[E]$, а потому ТП (I,τ) может рассматриваться как ИП в оговоренном ранее расширительном толковании.

Если $x \in I$, то $N^0_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$ (фильтр открытых окрестностей x) и, в частности, $N^0_\tau(x) \in \beta_0[I]$, а потому определен фильтр

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (I-\mathbf{fi})[N^0_\tau(x)] \in \mathfrak{F}[I]$$

окрестностей точки x в ТП (I,τ), понимаемых в смысле [17, гл. I]. Если $H \in \mathcal{P}(I)$, то через $\mathrm{cl}(H,\tau)$ обозначаем замыкание H в ТП (I,τ):

$$\mathrm{cl}(H,\tau) = \{x \in I \mid S \cap H \neq \varnothing \; \forall S \in N_\tau(x)\} = \{x \in I \mid G \cap H \neq \varnothing \; \forall G \in N^0_\tau(x)\} \in \mathbf{C}_I[\tau].$$

Кроме того, условимся о следующем соглашении:

$$(\tau - \mathrm{Int})[H] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid H \in N_\tau(x)\} \; \forall H \in \mathcal{P}(I).$$

Тем самым определен оператор внутренности в (I,τ).

Отметим теперь, что [17, гл. I] $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[I] \; \forall x \in I$

$$\Big(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\Big) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (I-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \tag{1.20}$$

Тем самым определена сходимость БФ и, в частности, фильтров множества I.

§ 2. Множества притяжения (краткие сведения)

В настоящем разделе фиксируем непустые множества $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, отображение $f \in \mathbb{Y}^{\mathbb{X}}$ и (непустое) семейство $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$. Фиксируем также топологию $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}]$. Рассматриваем $\mathbb{X}$ в качестве пространства обычных (по смыслу реализуемых) решений, а $\mathbb{Y}$ — в качестве пространства результатов или оценок; f интерпретируем как своеобразный целевой оператор, а семейство $\mathcal{X}$ — как ОАХ. Впрочем, возможна и другая интерпретация: $(\mathbb{Y}, \tau)$ — пространство обобщенных элементов, оснащаемое «подходящей» топологией, f — оператор погружения (обычных решений). При всем различии упомянутых толкований формальная конструкция в виде МП является одной и той же. Напомним, что [17, гл. I] $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[\mathbb{Y}]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbb{X}]$. Поэтому (см. (1.20)) при $\mathfrak{B} \in \beta_0[\mathbb{X}]$ и $y \in \mathbb{Y}$

$$\Bigl(f^1[\mathfrak{B}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y\Bigr) \Longleftrightarrow \bigl(N_\tau(y) \subset (\mathbb{Y} - \mathbf{fi})[f^1[\mathfrak{B}]]\bigr);$$

в качестве $\mathfrak{B}$ можно использовать фильтр и, в частности, у/ф множества $\mathbb{X}$. Определяем МП в $(\mathbb{Y}, \tau)$ на значениях f, полагая [5], что

$$(\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathbb{Y}; \tau; f; \mathcal{X}] \overset{\triangle}{=} \Bigl\{y \in \mathbb{Y} \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{X}|\mathcal{X}] :\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y\Bigr\}. \tag{2.1}$$

Отметим, что МП (2.1) допускает эквивалентное представление в классе направленностей (см. [5]). Кроме того, имеем импликацию

$$(\forall\, X_1 \in \mathcal{X}\ \forall\, X_2 \in \mathcal{X}\ \exists\, X_3 \in \mathcal{X} :\ X_3 \subset X_1 \cap X_2) \Longrightarrow \Bigl((\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathbb{Y}; \tau; f; \mathcal{X}] = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{cl}(f^1(X), \tau)\Bigr).$$

§ 3. Внутренность множества притяжения в пространстве ультрафильтров

Фиксируем далее непустое множество E в качестве пространства обычных решений. Рассматриваем, следовательно, E в качестве множества $\mathbb{X}$ предыдущего раздела. В качестве $\mathbb{Y}$ будем использовать множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ (см. (1.14)), τ (см. предыдущий раздел) отождествляем с $\tau_0^*[E]$, получая в виде

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_0^*[E]) \tag{3.1}$$

непустой нульмерный компакт. Заметим, что [11, теорема 6.2.27] на самом же деле (3.1) есть экстремально несвязное пространство, то есть

$$\mathrm{cl}(G, \tau_0^*[E]) \in \tau_0^*[E]\ \ \forall\, G \in \tau_0^*[E] \tag{3.2}$$

(учитываем, что каждое дискретное ТП экстремально несвязно).

Замечание 3.1. В целях полноты изложения приведем прямое доказательство свойства (3.2), не обращаясь к [11, теорема 6.2.27].

Напомним, что [18, раздел 3] множество $\{(E - \mathrm{ult})[x] :\ x \in E\}$ всюду плотно в ТП (3.1):

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\{(E - \mathrm{ult})[x] :\ x \in E\}, \tau_0^*[E]). \tag{3.3}$$

Кроме того, отметим, что для всяких ТП $(X, \mathbf{t})$, множества $A \in \mathcal{P}(X)$ со свойством $X = \mathrm{cl}(A, \mathbf{t})$ (A всюду плотно в $(X, \mathbf{t})$) и множества $G \in \mathbf{t}$

$$\mathrm{cl}(G, \mathbf{t}) = \mathrm{cl}(G \cap A, \mathbf{t}) \tag{3.4}$$

(см. [11, теорема 1.3.6]). Вернемся к проверке (3.2). Введем в рассмотрение отображение

$$\varphi \overset{\triangle}{=} ((E - \mathrm{ult})[x])_{x \in E} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E,$$

которое очевидным образом является биекцией E на $\varphi^1(E)$. С учетом (3.3) имеем, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\varphi^1(E), \tau_0^*[E])$.

Пусть $V \in \tau_0^*[E]$. Тогда в силу (3.4) имеем равенство

$$\mathrm{cl}\,(V, \tau_0^*[E]) = \mathrm{cl}\,\big(V \cap \varphi^1(E), \tau_0^*[E]\big), \tag{3.5}$$

причем $W \overset{\triangle}{=} \varphi^{-1}\,\big(V \cap \varphi^1(E)\big) = \varphi^{-1}(V) \in \mathcal{P}(E)$. Легко видеть, что $V \cap \varphi^1(E) = \varphi^1(W)$, а тогда согласно (3.5)

$$\mathrm{cl}(V, \tau_0^*[E]) = \mathrm{cl}(\varphi^1(W), \tau_0^*[E]),$$

где $\mathrm{cl}(\varphi^1(W), \tau_0^*[E]) = \mathrm{cl}(\{(E-\mathrm{ult})[x] :\ x \in W\}, \tau_0^*[E]) = \Phi_0(W|E) \in \tau_0^*[E]$ (см. (1.18), [18, предложение 4.3]). Итак, $\mathrm{cl}(V, \tau_0^*[E]) \in \tau_0^*[E]$. Поскольку выбор V был произвольным, установлено (3.2), что и означает экстремальную несвязность ТП (3.1). □

Итак, (3.1) есть экстремально несвязный компакт. Зафиксируем до конца настоящего раздела семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, имеющее смысл ОАХ (в абстрактной задаче о достижимости при использовании E в качестве пространства обычных решений). В этих условиях рассмотрим множество $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ (см. (1.19)), интерпретируемое как множество всех $\mathcal{E}$-допустимых у/ф E. Данное множество замкнуто в ТП (3.1), поскольку (см. (1.15))

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_0(\Sigma|E); \tag{3.6}$$

теперь достаточно учесть (1.18). В этом случае в силу экстремальной несвязности ТП (3.1) имеем [11, 6.2], что

$$(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \in \mathbf{C}_{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}[\tau_0^*[E]];$$

итак, множество (3.6) имеет замкнутую внутренность. По этой причине упомянутая внутренность открыто-замкнута:

$$(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]] \in \tau_0^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}[\tau_0^*[E]]. \tag{3.7}$$

Из (1.18) и (3.7) следует, что $(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]] \in (\mathbf{UF})[E]$, то есть

$$\exists\, \Xi \in \mathcal{P}(E) :\ (\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]] = \Phi_0(\Xi|E). \tag{3.8}$$

Заметим теперь, что (3.6) есть МП в ТП (3.1), а именно (см. [9, § 8]):

$$\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]; \tau_0^*[E]; (E-\mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]. \tag{3.9}$$

Таким образом, в (3.8) реализуется представление внутренности МП в пространстве у/ф исходного множества E. Ниже данное представление конкретизируется с использованием пересечения всех множеств семейства $\mathcal{E}$. Данное пересечение в традиционной для задач управления терминологии (см. введение статьи, а также [1, гл. III]) может расматриваться как множество точных решений соответствующей задачи о достижимости.

Замечание 3.2. Строго говоря, классификация Дж. Варги в [1, гл. III] (точные, приближенные и обобщенные решения) относится к задачам оптимального управления. Однако с несущественными коррективами она может быть распространена на задачи о достижимости в условиях (стандартных) ограничений; при этом имеется в виду возможность ослабления последних посредством замены фиксированных множеств окрестностями (см. конструкции введения), что используется в [1, гл. III] при определении приближенного решения-последовательности. Привлекая ОАХ, можно рассматривать аналоги точных решений Дж. Варги как элементы пересечения всех множеств из $\mathcal{E}$, получая точки множества E, удовлетворяющие сразу всем ослабленным ограничениям, которые задаются посредством множеств из $\mathcal{E}$. В этой связи отметим пример [18, раздел 1], в котором точных решений не существует вовсе, но тем не менее соответствующее МП («заменяющее» в [18] область достижимости) телесно. □

§ 4. Подготовительные конструкции

В настоящем разделе, имея конечной целью получение представления МП (3.9), обратимся сначала к свойствам множеств (1.8), фиксируя π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Прежде всего отметим очень простое

Предложение 4.1. *Если* $L_1 \in \mathcal{L}$ *и* $L_2 \in \mathcal{L}$, *то истинна импликация*

$$(L_1 \subset L_2) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)). \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L_1 \in \mathcal{L}$, $L_2 \in \mathcal{L}$ и при этом $L_1 \subset L_2$. Выберем произвольно у/ф $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_1)$. Тогда согласно (1.8) имеем, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $L_1 \in \mathcal{V}$. Тогда согласно (1.4) $L_2 \in \mathcal{V}$, а потому $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$ (см. (1.8)), чем и завершается проверка вложения $\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$, а следовательно, и импликации (4.1). $\square$

Предложение 4.2. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, $L_1 \in \mathcal{L}$ *и* $L_2 \in \mathcal{L}$, *то истинна импликация*

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)) \Longrightarrow (L_1 \subset L_2). \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$. Пусть, кроме того,

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2). \tag{4.3}$$

Покажем, что $L_1 \subset L_2$. В самом деле, допустим противное: $L_1 \setminus L_2 \neq \varnothing$. Выберем произвольно $q \in L_1 \setminus L_2$. Тогда, в частности, $q \in E$, а потому согласно (1.7)

$$((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[q] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{4.4}$$

При этом $q \notin L_2$, а потому согласно (1.5) имеем, что

$$L_2 \notin ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[q]. \tag{4.5}$$

Поскольку $q \in L_1$, то (см. (1.5)) $L_1 \in ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[q]$ и, как следствие, получаем с учетом (1.8) и (4.4) включение

$$((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[q] \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_1).$$

Поэтому в силу (4.3) $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[q] \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$. Это означает согласно (1.8), что

$$L_2 \in ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[q]. \tag{4.6}$$

Соотношения (4.5) и (4.6) взаимно противоречивы. Полученное при условии $L_1 \setminus L_2 \neq \varnothing$ противоречие показывает, что на самом деле $L_1 \subset L_2$, чем и завершается проверка (4.2). $\square$

Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда из предложений 4.1, 4.2 имеем $\forall L_1 \in \mathcal{L}$, $\forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Longleftrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)). \tag{4.7}$$

Кроме того, в рассматриваемом случае отображение

$$L \longmapsto \Phi_{\mathcal{L}}(L) : \ \mathcal{L} \longrightarrow (\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$$

является биекцией, что легко следует из (4.7) (в самом деле, из (4.7) вытекает при $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$, что

$$(L_1 = L_2) \Longleftrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) = \Phi_{\mathcal{L}}(L_2));$$

упомянутое дополнение к (4.7) в дальнейшем не используется).

§ 5. Представление внутренности множества притяжения в пространстве ультрафильтров; роль точных решений

Возвращаемся к обсуждению конструкций раздела 3, учитывая тот факт, что $\mathcal{P}(E) \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда из (1.15) и (4.7) получаем свойство $\forall\, L_1 \in \mathcal{P}(E)\ \forall\, L_2 \in \mathcal{P}(E)$

$$(L_1 \subset L_2) \Longleftrightarrow (\Phi_0(L_1|E) \subset \Phi_0(L_2|E)). \tag{5.1}$$

Как и в разделе 3, фиксируем семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, играющее роль ОАХ. Используем свойства (3.7), (3.8).

Теорема 5.1. *Справедливо равенство*

$$(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] = \Phi_0\Bigg(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\Bigg). \tag{5.2}$$

Доказательство. Напомним прежде всего, что согласно (1.15)

$$\Phi_0\Bigg(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\Bigg) = \Bigg\{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma \in \mathcal{U}\Bigg\}. \tag{5.3}$$

Кроме того, с учетом (3.8) фиксируем множество $\mathbb{A} \in \mathcal{P}(E)$, для которого

$$(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] = \Phi_0(\mathbb{A}|E), \tag{5.4}$$

где согласно (1.15) $\Phi_0(\mathbb{A}|E) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] | \mathbb{A} \in \mathcal{U}\}$. С учетом (5.1) получаем, что

$$\Phi_0\Bigg(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\Bigg) \subset \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Phi_0(\Sigma|E),$$

а потому (см. (3.6)) реализуется следующее вложение:

$$\Phi_0\Bigg(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\Bigg) \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]. \tag{5.5}$$

Кроме того, из (1.18) имеем, в частности, что множество в левой части (5.5) открыто:

$$\Phi_0\Bigg(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\Bigg) \in \tau_0^*[E],$$

а в этом случае в силу (5.4) и (5.5) реализуется вложение

$$\Phi_0\Bigg(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\Bigg) \subset \Phi_0(\mathbb{A}|E) \tag{5.6}$$

и, как следствие (см. (5.1), (5.6)), получаем следующую оценку:

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma \subset \mathbb{A}. \tag{5.7}$$

С другой стороны, из (5.4) следует, в частности, что $\Phi_0(\mathbb{A}|E) \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$. С учетом (3.6) получаем следующее очевидное свойство:

$$\Phi_0(\mathbb{A}|E) \subset \Phi_0(\Sigma|E)\ \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{5.8}$$

Поэтому из (5.1) и (5.8) получаем теперь, что $\mathbb{A} \subset \Sigma \; \forall \, \Sigma \in \mathcal{E}$. Иными словами,

$$\mathbb{A} \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma,$$

а тогда с учетом (5.7) получаем очевидное равенство

$$\mathbb{A} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \tag{5.9}$$

Из (5.4) и (5.9) вытекает требуемое представление (5.2). $\square$

Из теоремы 5.1 вытекает (см. [18, предложение 4.3]), что

$$(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] = \mathrm{cl}\left(\left\{(E - \mathrm{ult})[x] : \; x \in \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right\}, \tau_0^*[E]\right). \tag{5.10}$$

Из (5.10) видно, что внутренность множества (3.9) (последнее есть МП в пространстве у/ф множества E) жестко связана с пространством точных (обычных) решений, то есть решений, содержащихся в каждом множестве семейства $\mathcal{E}$.

Заметим, что в силу (1.13), (1.15) $\Phi_0(\varnothing|E) = \varnothing$, а потому имеем следующую импликацию:

$$\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\right) \Longrightarrow ((\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] = \varnothing). \tag{5.11}$$

В то же время в условиях истинности посылки в (5.11) само множество (3.9) может быть непустым.

Следуя [18, (4.14)], введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E] \triangleq \left\{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E] \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing\right\}$$

всех свободных у/ф множества E, а также множество [18, (4.15)]

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] \triangleq \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \cap \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E] = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}$$

всех свободных допустимых (в смысле ОАХ $\mathcal{E}$) у/ф множества E. При этом, конечно,

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E] = \{(E - \mathrm{ult})[x] : \; x \in E\} \cup \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E]) \;\&\; ((E - \mathrm{ult})[x] \notin \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E] \; \forall \, x \in E)$$

(каждый у/ф множества E является либо тривиальным, либо свободным). Напомним также, что [18, (4.15)]

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \Big\backslash \left\{(E - \mathrm{ult})[x] : \; x \in \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right\} = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \{(E - \mathrm{ult})[x] : \; x \in E\}.$$

Возвращаясь к теореме 5.1, отметим, что в силу замкнутости множества (3.6) в ТП (3.1) множество

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \Phi_0\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma|E\right) \tag{5.12}$$

есть граница (3.6) в упомянутом ТП.

Предложение 5.1. *Имеет место вложение*

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \Phi_0\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma|E\right) \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]. \tag{5.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U}$ — у/ф из множества в левой части (5.13): $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ и вместе с тем

$$\mathcal{U} \notin \Phi_0\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\right). \tag{5.14}$$

Тогда, в частности, $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом имеет место

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{U}. \tag{5.15}$$

Покажем, что $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E]$. В самом деле, допустим противное: $\mathcal{U} \notin \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E]$. Тогда [18, (4.14)] $\mathcal{U} = (E-\mathrm{ult})[x_*]$ для некоторого $x_* \in E$. Из (5.15) следует тогда, что $x_* \in \Sigma\ \forall\,\Sigma \in \mathcal{E}$. Поэтому

$$x_* \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma,$$

что означает справедливость следующего включения:

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma \in \mathcal{U}.$$

В свою очередь, последнее означает (см. (1.15)), что (5.14) невозможно. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E]$, и, с учетом (5.15), получаем, что $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^{00}_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$. Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, (5.13) доказано (заметим, что доказательство можно было бы несколько сократить, используя [18, (4.11)]). $\square$

Итак, граница множества (3.6) в ТП (3.1) состоит только из свободных у/ф. Что же касается внутренности (см. (5.10)), то она состоит из точных в существенном [18, с. 225] ОЭ, то есть из обобщенных пределов точных решений. Отметим еще одно весьма очевидное

Замечание 5.1. Имеет место следующее вложение:

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus (\tau_0^*[E]-\mathrm{Int})[\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \setminus \Phi_0\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\right) \subset \\ \subset \mathrm{cl}\left(\left\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x \in E\setminus\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\right)\right\}, \tau_0^*[E]\right).\end{gathered} \tag{5.16}$$

В самом деле, воспользуемся (5.10) и тем очевидным фактом, что

$$\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x\in E\} = \left\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\right\}\bigcup\left\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x\in E\setminus\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\right)\right\},$$

а потому в силу аддитивности оператора замыкания имеем (см. (3.3),(5.10), [18, с. 221]), что

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x\in E\}, \tau_0^*[E]) = \mathrm{cl}\Bigg(\{(E-\mathrm{ult})[x]: \\ x \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\}, \tau_0^*[E]\Bigg) \cup \mathrm{cl}\left(\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x\in E\setminus\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\right)\}, \tau_0^*[E]\right) = \\ = (\tau_0^*[E]-\mathrm{Int})[\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]] \cup \mathrm{cl}\left(\left\{(E-\mathrm{ult})[x]:\ x\in E\setminus\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\right)\right\}, \tau_0^*[E]\right).\end{gathered} \tag{5.17}$$

Поскольку $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, из (5.17) непосредственно следует свойство (5.16), которое означает содержательно, что у/ф, принадлежащие границе МП (3.9), оказываются аппроксимируемыми обычными решениями «извне» по отношению к точным ограничениям, которые (см. введение) определяются посредством пересечения всех множеств из $\mathcal{E}$ (с учетом (5.10) имеем также для упомянутых у/ф факт невозможности аппроксимации «изнутри»).

Напомним, что множество (3.6) замкнуто в ТП (3.1). В связи с вопросом о канонической замкнутости (см. [11, с. 45]) данного множества отметим следующее: если граница множества (3.6) непуста, то само это множество не является канонически замкнутым в смысле (3.1) (действительно, согласно (5.10) внутренность множества (3.6) замкнута). На самом же деле имеет место очевидное

Предложение 5.2. *Эквивалентны следующие три условия:*
(1) *множество* $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ (3.6) *канонически замкнуто в ТП* (3.1)*;*
(2) *граница множества* (3.6) *в ТП* (3.1) *пуста;*
(3) *справедливо равенство* $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \Phi_0\left(\bigcap\limits_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\right)$.

Доказательство. Из рассуждения, приведенного перед предложением, следует импликация (1) $\Longrightarrow$ (2). Далее, согласно теореме 5.1

$$\Phi_0\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\right) \subset \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}], \tag{5.18}$$

при этом граница рассматриваемого множества (3.6) совпадает с множеством (5.12). Поэтому (см. (5.18)) (2) $\Longrightarrow$ (3). Пусть истинно (3). Тогда в силу (1.18)

$$\Phi_0\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma|E\right) \in \mathbf{C}_{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}[\tau_0^*[E]], \tag{5.19}$$

а потому замыкание множества (5.19) совпадает с $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$. Учитывая теорему 5.1, получаем, что $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]$ есть канонически замкнутое множество в ТП (3.1). Итак, (3) $\Longrightarrow$ (1). □

§ 6. Некоторые обобщения

В настоящем разделе мы возвращаемся к рассмотрению у/ф π-систем. Итак, фиксируем непустое множество E и (отделимую) π-систему $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, получая широко понимаемое ИП. Кроме того, фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ (семейство $\mathcal{E}$ состоит, следовательно, из «измеримых» множеств), причем всюду в дальнейшем предполагается, что

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma \in \mathcal{L}. \tag{6.1}$$

Замечание 6.1. Отметим некоторые очевидные примеры ИП $(E, \mathcal{L})$ и семейства $\mathcal{E}$, для которых выполнено (6.1).

Рассмотрим сначала случай, когда (непустое) множество E оснащено топологией $\mathbf{t} \in \in (\mathrm{top})[E]$, для которой $(E, \mathbf{t})$ есть T_1-пространство. Пусть $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ ($\mathcal{L}$ — семейство всех замкнутых множеств в T_1-пространстве $(E, \mathbf{t})$). Тогда $\{x\} \in \mathcal{L}\ \forall x \in E$. В частности, имеем свойство $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathcal{L}$ — отделимая π-система. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то (6.1) непременно имеет место в силу простейших свойств семейства замкнутых множеств в ТП.

Рассмотрим другой пример, полагая теперь, что $\mathcal{L}$ есть σ-алгебра п/м E, а семейство $\mathcal{E} \in \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ имеет счетную базу, то есть для некоторой последовательности

$$(\mathbb{E}_i)_{i\in\mathbb{N}} :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E},$$

где, как обычно, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ — натуральный ряд, имеет место следующее свойство:

$$\forall\,\Sigma \in \mathcal{E}\ \exists\,k \in \mathbb{N} :\ \mathbb{E}_k \subset \Sigma.$$

Тогда получаем следующее очевидное равенство:

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma = \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_s,$$

чем обеспечивается справедливость (6.1), поскольку, в частности, $\mathbb{E}_s \in \mathcal{L}\ \forall\,s \in \mathbb{N}$ (следует учесть определение σ-алгебры множеств). Ясно, в частности, что в рассматриваемом случае стандартного ИП условие (6.1) выполняется в случае, когда само $\mathcal{E}$ не более чем счетное подсемейство $\mathcal{L}$. □

Возвращаясь к общему случаю триплета $(E, \mathcal{L}, \mathcal{E})$ со свойством (6.1) (и отделимой π-системы $\mathcal{L}$), отметим, что определены $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ и (открыто-замкнутое) множество

$$\Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \tag{6.2}$$

С учетом $\mathcal{L}$-измеримости множеств из $\mathcal{E}$ получаем также, что определены открыто-замкнутые множества $\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma),\ \Sigma \in \mathcal{E}$. При этом, конечно,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma). \tag{6.3}$$

Рассмотрим вопрос о представлении внутренности

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$$

множества (6.3); для получаемого далее представления существенно условие (6.1), которое, в свою очередь, обеспечивает (6.2).

Теорема 6.1. *Внутренность множества* (6.3) *определяется множеством* (6.2):

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})] = \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right). \tag{6.4}$$

Доказательство. Полагаем для краткости $\mathbb{G} = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})]$, получая, в частности, множество $\mathbb{G} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ со свойством

$$\mathbb{G} \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}). \tag{6.5}$$

Отметим, следующую очевидную импликацию:

$$(\mathbb{G} = \varnothing) \Longrightarrow \left(\mathbb{G} \subset \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right)\right). \tag{6.6}$$

Пусть теперь $\mathbb{G} \neq \varnothing$. Тогда для некоторого семейства

$$\mathcal{B} \in \mathcal{P}'((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \tag{6.7}$$

имеем следующее равенство:

$$\mathbb{G} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B. \tag{6.8}$$

Выберем произвольно $B_* \in \mathcal{B}$. Тогда в силу (6.7)

$$B_* = \Phi_{\mathcal{L}}(L_*) \tag{6.9}$$

для некоторого множества $L_* \in \mathcal{L}$. Согласно (6.3), (6.5) и (6.9)

$$B_* \subset \mathbb{G} \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma). \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) получаем при $\Sigma \in \mathcal{E}$, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L_*) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)$; последнее означает (коль скоро $L_* \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$), что $L_* \subset \Sigma$ (см. (4.7)). Итак,

$$L_* \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma,$$

откуда, в свою очередь, вытекает (см. (6.9)) очевидное свойство

$$B_* = \Phi_{\mathcal{L}}(L_*) \subset \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right).$$

Поскольку выбор B_* был произвольным, установлено, что

$$B \subset \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \ \forall\, B \in \mathcal{B}.$$

С учетом (6.8) получаем, как следствие, следующее вложение:

$$\mathbb{G} \subset \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \tag{6.11}$$

при $\mathbb{G} \neq \varnothing$. Таким образом, установили импликацию

$$(\mathbb{G} \neq \varnothing) \Longrightarrow \left(\mathbb{G} \subset \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right)\right),$$

а тогда (см. (6.6)) имеем уже тот факт, что вложение (6.11) имеет место во всех возможных случаях. Осталось установить вложение, противоположное (6.11). Для этого заметим, что при $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{E}$

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \subset \tilde{\Sigma},$$

поэтому получаем (см. (6.1)) следующее очевидное вложение:

$$\Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{\Sigma}).$$

Как следствие, имеем (поскольку выбор $\tilde{\Sigma}$ был произвольным), что

$$\Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma),$$

а тогда с учетом (6.3) получаем оценку

$$\Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}). \tag{6.12}$$

Из (6.2) и (6.12) следует по определению внутренности, в свою очередь, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \mathbb{G}. \tag{6.13}$$

Тем самым (см. определение $\mathbb{G}$) обоснование равенства (6.4) завершено. $\square$

Напомним, что в рассматриваемом случае пространства $(E, \mathcal{L})$ имеет место следующее свойство максимальности тривиальных у/ф: $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall\, x \in E$. Более того [20],

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(\{((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] :\ x \in E\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \tag{6.14}$$

Из общих свойств оператора внутренности вытекает, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})] \tag{6.15}$$

есть граница замкнутого (см. (6.2), (6.3)) множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ и, в частности,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \tag{6.16}$$

Кроме того, в силу аддитивности оператора замыкания имеем из (6.14), что

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right) \bigcup \\ \bigcup \mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in E \setminus \left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right)\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right),\end{gathered} \tag{6.17}$$

где

$$\mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right) = \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right). \tag{6.18}$$

Поэтому имеем, в частности, что (см. (6.17))

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \\ \subset \mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in E \setminus \left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right)\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right)\end{gathered} \tag{6.19}$$

(получили свойство аппроксимативной реализуемости «извне» для у/ф из множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \setminus \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right)$). С учетом теоремы 6.1 получаем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})] \subset \mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in E \setminus \left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right)\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right).$$

С другой стороны, имеем (6.18). Как следствие получаем следующее вложение:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right), \tag{6.20}$$

что говорит о невозможности аппроксимативной реализации «изнутри» (по отношению к пересечению множеств из $\mathcal{E}$) для у/ф из множества в левой части (6.20)).

Итак, мы получили (при условиях $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ и (6.1)) практически полный аналог ситуации, имеющей место в схеме раздела 5 при рассмотрении у/ф множества E. В связи с (6.19) отметим, что [20]

$$\begin{gathered}\mathrm{cl}\left(\left\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in E \setminus \left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right)\right\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right) = \\ = \left\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \left(E \setminus \left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma\right)\right) \cap U \neq \varnothing \;\forall\, U \in \mathcal{U}\right\}.\end{gathered}$$

Введем в рассмотрение свободные у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$, полагая

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \triangleq \left\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \varnothing\right\};$$

ясно, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \cup \{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x] : x \in E\}$ и при этом $((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[y] \notin \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \;\forall\, y \in E$. Отметим естественное обобщение предложения 5.1.

Предложение 6.1. *Имеет место вложение*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})] \subset \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}. \tag{6.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — множество в правой части (6.21). Выберем произвольный у/ф $\mathfrak{U}$ из множества в левой части (6.21) ($\mathfrak{U}$ — элемент границы множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$). Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом (см. теорему 6.1)

$$(\mathcal{E} \subset \mathfrak{U}) \;\&\; \left(\mathfrak{U} \notin \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right)\right). \tag{6.22}$$

Покажем, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$. Допустим противное; тогда $\mathfrak{U} = ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x_*]$, где $x_* \in E$. Из (1.5) и первого положения в (6.22) имеем, что $x_* \in \Sigma \;\forall\, \Sigma \in \mathcal{E}$. Поэтому согласно (1.8)

$$\mathfrak{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right),$$

что противоречит второму положению в (6.22). Полученное противоречие доказывает требуемое свойство $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$. С учетом же первого положения в (6.22) получаем, что $\mathfrak{U} \in \Omega$. Итак, (6.21) установлено. $\square$

Замечание 6.2. Если граница множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ непуста, то само это (замкнутое) множество не является канонически замкнутым в $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$. В самом деле, согласно теореме 6.1 и (1.10) множество (6.4) замкнуто в смысле $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Осталось учесть (6.15).

Естественным аналогом предложения 5.2 является следующее

Предложение 6.2. *Эквивалентны следующие три условия:*
$(1')$ *множество* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ *канонически замкнуто в топологии* $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$;
$(2')$ *граница множества* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ *в ТП* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ *пуста;*
$(3')$ $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация $(1') \Longrightarrow (2')$ следует из рассуждения, приведенного в замечании 6.2. Поскольку

$$\Phi_{\mathcal{L}}\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma\right) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$$

(см. теорему 6.1), то согласно (6.15) в случае справедливости $(2')$ имеем утверждение $(3')$. Итак, $(2') \Longrightarrow (3')$. Если же истинно (3'), то в силу замкнутости множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ в топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ (см. (6.14), теорему 6.1) справедливо равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]),$$

означающее справедливость $(1')$. Итак, $(3') \Longrightarrow (1')$. $\square$

Замечание 6.3. Отметим одно очевидное общее свойство: если X — непустое множество, $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $F \in \mathbf{C}_X[\tau]$, то граница множества F (которая в данном случае совпадает с $F \setminus (\tau - \mathrm{Int})[F]$) непременно имеет пустую внутренность и является, следовательно, множеством, нигде не плотным в ТП (X, τ) (напомним в этой связи, что упомянутая граница — замкнутое множество); см. [22, с. 45, 46]. Данное свойство применимо к множеству (3.6), замкнутому в смысле ТП (3.1). Кроме того, оно применимо и к множеству (6.3): если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то внутренность границы (замкнутого) множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, является пустым множеством (данное обстоятельство полезно учитывать в связи с примером [18, раздел 2]).

§ 7. Заключение

В рамках интерпретации проблемы точного соблюдения ограничений в виде «одновременного» соблюдения системы ослабленных ограничений установлены некоторые топологические свойства множества широко понимаемых приближенных решений (имеются в виду несеквенциальные аналоги приближенных решений Дж. Варги), обладающих допустимостью по отношению к ОАХ. Показано, что частному случаю точного соблюдения системы ограничений («одновременное» соблюдение всех конкретных условий, определяющих ОАХ) отвечает реализация внутренних точек вышеупомянутого множества, рассматриваемого в виде п/м компакта Стоуна–Чеха, а за асимптотические по существу эффекты отвечают точки границы. Само это множество (допустимых обобщенных элементов) является МП, соответствующим заданным ОАХ при естественном истолковании обычных решений в виде обобщенных. Известно, что при других способах построения расширений (имеются в виду расширения задач управления) отмеченная выше характеризация точек МП в терминах внутренности и границы, вообще говоря, места не имеет (см. пример [18, раздел 2]); это обстоятельство связано, по-видимому, с «ограниченной чувствительностью» варианта (обычного для теории управления; см. [1, гл. III, IV], [21] и др.) построения обобщенной задачи в [18, раздел 2]. В этой связи полезно отметить известное свойство компактификации Стоуна–Чеха: последняя является наибольшим элементом в семействе всех компактификаций произвольного тихоновского пространства (см. [11, с. 265]).

В разделе 6 установлены аналоги вышеупомянутых положений в ситуации, когда в качестве обобщенных элементов используются у/ф широко понимаемых ИП (точнее, у/ф заданной отделимой π-системы). Полученные здесь результаты дополняют положения [5, 7, 8]. Наиболее продуктивными в этой части являются построения, относящиеся к использованию (в конструкциях расширений) пространства Стоуна в случае ИП с алгеброй множеств. В связи с исследованиями данного пространства отметим недавние работы [23, 24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
5. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
6. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
7. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
8. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–55.
9. Ченцов А.Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения. Академия наук Грузии. Институт кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
10. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
11. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
12. Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.
13. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
14. Ченцов А.Г. Ульрафильтры измеримых пространств и их применение в конструкциях расширений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 285–304.
15. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.
16. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.

17. Бурбаки Н. Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
18. Ченцов А.Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 216–241.
19. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 541 с.
20. Ченцов А.Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101.
21. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
22. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1979. 336 с.
23. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения $\mathbb{N}$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
24. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16.

Поступила в редакцию 30.09.2014

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov
To the validity of constraints in the class of generalized elements

Keywords: extension, topological space, ultrafilter.

MSC: 28A33

The problem of validity of asymptotic constraints is considered. This problem is reduced to a generalized problem in the class of ultrafilters of initial solution space. The above-mentioned asymptotic constraints are associated with the standard component defined by the usual requirement of belonging to a given set. This component corresponds conceptually to Warga construction of exact solutions. At the same time, under validity of above-mentioned constraints, asymptotic regimes realizing the idea of validity of belonging conditions with a "certain index" can arise; however, the fixed set characterizing the standard constraint in terms of inclusion is replaced by a nonempty family. This family often arises due to sequential weakening of the belonging constraint to a fixed set in topological space (often metrizable) for an element dependent on the solution choice. The elements of above-mentioned family are the sets which are defined by belonging of their elements to neighborhoods of the given fixed set. But it is possible that the family defining the asymptotic constraints arises from the very beginning and does not relate to weakening of a standard condition.

The paper deals with the general case, for which the set structure of admissible generalized elements is investigated. It is shown that for "well-constructed" generalized problem the standard component of "asymptotic constraints" is responsible for the realization of the insides of above-mentioned set of admissible generalized elements; the particular representation of this topological property is established. Some corollaries of mentioned representation concerning generalized admissible elements not approximable (in topological sense) by precise solutions are obtained.

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
2. Kelley J.L. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1981, 433 p.
3. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.

4. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the movements meeting), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.

5. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).

6. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 322 p.

7. Chentsov A.G. Representation of attraction elements in abstract attainability problems with asymptotic constraints, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 10, pp. 38–49.

8. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: Equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 28–44.

9. Chentsov A.G. Certain constructions of asymptotic analysis related to the Stone-Ccech compactification, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 140, issue 6, pp. 873–904.

10. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.

11. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.

12. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996, 244 p.

13. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.

14. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces and their application in extension constructions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 285–304 (in Russian).

15. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions to abstract problems of attainability, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 268–293 (in Russian).

16. Edwards R. *Funktsional'nyi analiz. Teoriya i prilozheniya* (Functional analysis. Theory and applications), Moscow: Mir, 1969, 1071 p.

17. Burbaki N. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.

18. Chentsov A.G. Nonsequential approximate solutions in abstract problems of attainability, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2006, vol. 12, no. 1, pp. 216–241 (in Russian).

19. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (The elements of finitely additive measures theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 541 p.

20. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).

21. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

22. Aleksandryan R.A., Mirzakhanyan E.A. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 336 p.

23. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification $\mathbb{N}$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian).

24. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).

Received 30.09.2014

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru