УДК 517.977

© *Н. А. Соловьева*

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В РЕКУРРЕНТНОМ ПРИМЕРЕ Л. С. ПОНТРЯГИНА

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается нестационарная дифференциальная игра (обобщенный пример Л. С. Понтрягина) с n преследователями и одним убегающим при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков, описываемая системой вида

$$Lz_i = z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

$$z_i^{(s)}(t_0) = z_{is}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \ s = 0, 1, \dots, l-1.$$

Множество значений допустимых управлений игроков V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $a_1(t), \dots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, терминальные множества — начало координат. Преследователи используют квазистратегии. Предполагается, что функции $\xi_i(t)$, являющиеся решением задачи Коши

$$Lz_i = 0, \quad z_i^{(s)}(t_0) = z_{is}^0,$$

являются рекуррентными. Приводятся свойства рекуррентных функций. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Доказательство проводится с использованием метода разрешающих функций. Приведен пример, иллюстрирующий полученные условия.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, задача поимки, пример Л. С. Понтрягина, рекуррентная функция.

Введение

Рассматривается нестационарная дифференциальная игра (обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина [1–4]) с n преследователями и одним убегающим при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков:

$$Lz_i = z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

$$z_i^{(s)}(t_0) = z_{is}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \ s = 0, 1, \dots, l-1.$$

Задача простого группового преследования с равными возможностями всех участников рассматривалась в работах [5–8]. Стационарный пример Л. С. Понтрягина рассматривался в работах [9, 10], где были получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Нестационарный пример Л. С. Понтрягина при других предположениях рассматривался, в частности, в работах [11–14].

В данной работе получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в обобщенном нестационарном примере Л. С. Понтрягина при условии рекуррентности функций $\xi_i(t)$, являющихся решением задачи Коши $Lz_i = 0$, $z_i^{(s)}(t_0) = z_{is}^0$.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)x_i = u_i, \ u_i \in V. \tag{1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \dots + a_l(t)y = v, \ v \in V. \tag{2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, $a_1(t), \dots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_{i0}^0, \quad \dot{x}_i(t_0) = x_{i1}^0, \quad \dots, \quad x_i^{l-1}(t_0) = x_{i,l-1}^0, \tag{3}$$

$$y(t_0) = y_0^0, \quad \dot{y}(t_0) = y_1^0, \quad \dots, \quad y^{l-1}(t_0) = y_{l-1}^0, \tag{4}$$

причем $x_{i0}^0 \neq y_0^0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим данную игру через Γ.

Вместо систем (1), (2), (3), (4) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v, \ u_i, v \in V, \tag{5}$$

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0 := x_{i0}^0 - y_0^0, \quad \dots, \quad z_i^{l-1}(t_0) = z_{i,l-1}^0 := x_{i,l-1}^0 - y_{l-1}^0. \tag{6}$$

Пусть $z^0 = \{z_{i\alpha}^0, \ \alpha = 0, \dots, l-1, \ i = 1, 2, \dots, n\}$.

Назовем предысторией управления $v(t)$ убегающего E в момент t, $t \in [t_0, \infty)$, множество $v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V, s \in [t_0, t]\}$.

Определение 1. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ *преследователя* P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.

Определение 2. В игре Γ происходит *поимка*, если существует момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \dots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ найдутся номер $q \in \{1, \dots, n\}$ и момент $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ такие, что $z_q(\tau) = 0$.

Обозначим через $\varphi_p(t, s)$, $p = 0, \dots, l-1$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + \dots + a_l(t)\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega^{(j)}(s) = 0, \quad j = 0, \dots, p-1, p+1 \dots, l-1, \quad \omega^{(p)}(s) = 1.$$

Пусть, далее,

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_{i0}^0 + \varphi_1(t, t_0)z_{i1}^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_{i,l-1}^0.$$

Обозначим $H_i = \{\xi_i(t), \ t \in [t_0, \infty)\}$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Определение 3 (см. [15]). Функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ называется *рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых t, $a \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(\varepsilon) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство

$$|f(t + \tau(t)) - f(t)| < \varepsilon.$$

Определение 4. Функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ называется *рекуррентной на* $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Лемма 1. *Пусть для всех* $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *существуют* $h_i^0 \in H_i$, $h_i^0 \neq 0$ *такие, что* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$ *и функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными. Тогда существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $T(\varepsilon)$ *такие, что справедливы следующие утверждения:*

(1) $0 \notin D_\varepsilon(h_i^0)$ *и для любых* $h_i \in D_\varepsilon(h_i^0)$ *выполнено* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}$*, где* $D_\varepsilon(a) = \{z : \|z - a\| \leqslant \varepsilon\}$*;*

(2) *для всех* $t \geqslant t_0$ *найдутся такие моменты* $\tau_i \in [t, t + T(\varepsilon)]$*, что* $|\xi_i(\tau_i) - h_i^0| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\operatorname{co}\{h_i^0\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках h_j^0, $j \in K \subset I$. Из условия леммы следует, что $0 \in \operatorname{Intco}\{h_j^0\}$. Множество $0 \in \operatorname{Intco}\{h_j^0\}$ открыто. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $h_j \in D_\varepsilon(h_j^0)$ справедливо $0 \in \operatorname{Intco}\{h_j^0\}$. Так как $\operatorname{Intco}\{h_j^0\} \subset \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$, то получаем утверждение 1 леммы.

Так как $\xi_i(t)$ являются рекуррентными, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \geqslant t_0$ найдутся такие моменты $\tau_i \in [t, t + T(\varepsilon)]$, что $|\xi_i(\tau_i) - h_i^0| < \varepsilon$. □

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ и T выбрано в соответствии с условиями леммы 1.

Определим функции

$$r(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t, s) \geqslant 0, \\ -1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\lambda_i(v, r, h_i) = \sup\{\lambda : \ \lambda \geqslant 0, \ v - \lambda r h_i \in V\},$$

$$J_i(v, r, h_i) = \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \, \lambda(v(s), r(t, s), h_i) \, ds.$$

Полагаем, далее,

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n), \ D = D_\varepsilon(h_1^0) \times \ D_\varepsilon(h_2^0) \times \cdots \times \ D_\varepsilon(h_n^0).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *функции* $\xi_i(t)$ *рекуррентны на* $[t_0, \infty)$*;*

(2) $\lim\limits_{t \to \infty} \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \, ds = +\infty$*;*

(3) *для всех* $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *существуют* $h_i^0 \in H_i$, $h_i^0 \neq 0$ *такие, что* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$.

Тогда существует момент T_1 *такой, что для любого допустимого управления* $v(t)$ *и для любого* $h \in D$ *существует* $\alpha \in I$ *такое, что* $J_\alpha(T_1, h_\alpha) \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что для любого $h \in D$ справедливо неравенство

$$\delta_{\pm 1}(h) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(v, \pm 1, h_i) > 0.$$

По лемме 1.3.13 [2], функция λ непрерывна на каждом из множеств $V \times \{\pm 1\} \times D_\varepsilon(h_i^0)$, поэтому

$$\lim_{d^* \to d} \delta_{\pm 1}(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(v, \pm 1, h_i^*) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(v, \pm 1, h_i) = \delta_{\pm 1}(d),$$

следовательно, и функции $\delta_{\pm 1}$ являются непрерывными на D. Учитывая, что множество D — компакт, получим

$$\delta = \min_{h \in D} \min_{r \in \{-1, 1\}} \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(v, r, h_i) = \min_{h \in D} \{\delta_{+1}(h), \delta_{-1}(h)\} > 0.$$

Далее,

$$\max_{i \in I} J_i(t, h_i) = \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \ \lambda_i(v(s), r(t, s), h_i) \, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \sum_{i\in I}\lambda_i(v(s), r(t,s), h_i)\,ds \geqslant \frac{\delta}{n}\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds.$$

Таким образом, для момента T_1, определяемого из условия $\dfrac{\delta}{n}\displaystyle\int_{t_0}^{T_1}|\varphi_{l-1}(T_1,s)|\,ds \geqslant 1$, и некоторого $\alpha \in I$ выполнено неравенство $J_\alpha(T_1, h_\alpha) \geqslant 1$. Лемма доказана. $\square$

Пусть

$$T(z^0) = \min\{t \geqslant 0 \ : \ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\max_{i\in I} J_i(t, h_i) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2 выполнено неравенство $T(z^0) < \infty$.

§ 3. Поимка одного убегающего в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *функции $\xi_i(t)$ рекуррентны на $[t_0, \infty)$;*

(2) *существуют $h_i^0 \in H_i$, $h_i^0 \neq 0$ такие, что $0 \in \operatorname{Intco}\{h_1^0, h_2^0, \ldots, h_n^0\}$;*

(3) *существуют моменты $\tau_i \geqslant T(z^0)$ такие, что*

(*a*) $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(h_i^0)$,

(*b*) $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{i} J_i(\tau_i, \xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$.

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши решение задачи (4) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^{t}\varphi_{l-1}(t,s)(u_i(s) - v(s))\,ds.$$

Пусть τ_i — моменты, удовлетворяющие условию теоремы, $v(s)$, $s \in [t_0, T_0]$ — произвольное допустимое управление убегающего E, где $T_0 = \max\limits_i \tau_i$.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 1 - \max_{i\in I}\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(\tau_i,s)|\ \lambda_i(v(s), r(\tau_i,s), \xi_i(\tau_i))\,ds.$$

Обозначим через $t_1 \geqslant t_0$ наименьший корень данной функции. Отметим, что момент t_1 существует в силу условия (3) теоремы и $t_1 \leqslant \tau_i$ по крайней мере для одного i.

Кроме того, существует номер $l \in I$ такой, что

$$1 - \int_{t_0}^{t_1}|\varphi_{l-1}(\tau_l,s)|\ \lambda_l(v(s), r(\tau_l,s), \xi_l(\tau_l))\,ds = 0.$$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t), r(\tau_i,t), \xi_i(\tau_i))\ r(\tau_i,t)\ \xi_i(\tau_i) \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_1],$$

где считаем, что $\lambda_i(v(t), r(\tau_i,t), \xi_i(\tau_i)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$.

Тогда, с учетом формулы Коши, имеем

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i)\left(1 - \int_{t_0}^{t_1}|\varphi_{l-1}(\tau_i,s)|\ \lambda_i(v(s), r(\tau_i,s), \xi_i(\tau_i))\,ds\right).$$

В силу определения t_1 для номера $l \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_l(\tau_l) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть начальные позиции участников таковы, что выполнены следующие условия:* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_{i0}^0\}$ *и функции* $\xi_i(t)$ *рекуррентны на* $[t_0, \infty)$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Пример 1. Пусть система (4) имеет вид

$$\dot{z}_i + a(t)z_i = u_i - v,\ u_i, v \in V,$$

где

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \pi], \\ \sin t, & \text{если } t \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

Докажем, что функция $a(t)$ рекуррентна. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $T(\varepsilon) = 4\pi$. Рассмотрим два случая.

1. $t \notin [0, \pi]$. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^1$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau(t) = 2k\pi \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено
$$|a(t + \tau(t)) - a(t)| = |\sin(t + 2k\pi) - \sin(t)| = 0 < \varepsilon.$$

2. $t \in [0, \pi]$. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^1$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k\pi \in [a, a + 4\pi]$, а $k\pi + \pi \notin [a, a + 4\pi]$ и существует $\tau(t) = k\pi - t$, $\tau(t) \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено
$$|a(t + \tau(t)) - a(t)| = |a(k\pi)) - a(t)| = 0 < \varepsilon.$$

Пусть $t_0 = 0$. Тогда $\xi_i(t) = g(t)z_{i0}^0$, где

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, \pi], \\ e^{-\cos t - 1}, & \text{если } t \in (\pi, \infty). \end{cases}$$

Функция g является рекуррентной на $[0, \infty)$, и поэтому функция $\xi_i(t)$ рекуррентна.

Предложение 1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре происходит поимка.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
2. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 380 с.
3. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МГУ, 1990. 197 с.
4. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2009. 266 с.
5. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
6. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования–убегания групп преследователей и одного убегающего // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. №1. С. 41–47.
7. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.
8. Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 4. С. 74-83.
9. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
10. Петров Н.Н. «Мягкая» поимка в примере Л. С. Понтрягина со многими участниками // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 759–770.
11. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

12. Благодатских А.И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. № 1. С. 17–24.
13. Благодатских А.И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 83–86.
14. Благодатских А.И. Групповое преследование в нестационарном примере Понтрягина // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 1. С. 39–44.
15. Зубов В.И. К теории рекуррентных функций // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 4. С. 532–560.

Поступила в редакцию 22.08.2014

Соловьева Надежда Александровна, старший преподаватель, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: solov_na@mail.ru

N. A. Solov'eva
Group pursuit in recurrent Pontryagin example

Keywords: differential game, group pursuit, capture problem, Pontryagin's example, recurrent function.

MSC: 91A06, 91A23, 91A24, 49N70, 49N75

A non-stationary differential game (a generalized example of L. S. Pontryagin) with n pursuers and one evader is considered in the space $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$). All players have equal dynamic and inertial capabilities. The game is described by a system of the form

$$Lz_i = z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

$$z_i^{(s)}(t_0) = z_{is}^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; s = 0, 1, \ldots, l-1.$$

The set V of admissible player controls is strictly convex compact set with smooth boundary, $a_1(t), \ldots, a_l(t)$ are continuous on $[t_0, \infty)$ functions, the terminal sets are the origin of coordinates. Pursuers use quasi-strategies. It is assumed that functions $\xi_i(t)$ being the solution of Cauchy problem

$$Lz_i = 0, \quad z_i^{(s)}(t_0) = z_{is}^0,$$

are recurrent. Properties of recurrent functions are given. In terms of initial positions and game parameters the sufficient conditions of the pursuit problem solvability are obtained. The proof is carried out using the method of resolving functions. An example illustrating the obtained conditions is given.

REFERENCES

1. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy* (Selected scientific works), vol. 2, Moscow: Nauka, 1988, 575 p.
2. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* (Conflict controlled processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 380 p.
3. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
4. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
5. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objets, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
6. Grigorenko N.L. The game of simple pursuit–evasion for groups of pursuers and one evader, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
7. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 36–40.

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 3

8. Petrov N.N. To the non-stationary problem of the group pursuit with phase restrictions, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 74–83 (in Russian).

9. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's problem with phase restrictions, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732.

10. Petrov N.N. "Soft" capture in Pontryagin's example with many participants, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 67, no. 5, pp. 671–680.

11. Bannikov A.S., Petrov N.N. On non-stationary problem of group pursuit with phase restrictions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, no. 1, pp. 41–52.

12. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2007, no. 1, pp. 17–24 (in Russian).

13. Blagodatskikh A.I. Almost periodic processes with conflict control with many participants, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 244–247.

14. Blagodatskikh A.I. Group pursuit in Pontryagin's nonstationary example, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 1, pp 40–46.

15. Zubov V.I. The theory of recurrent functions, *Sib. Mat. Zh.*, 1962, vol. 3, no. 4, pp. 532–560 (in Russian).

Received 22.08.2014

Solov'eva Nadezhda Aleksandrovna, Senior Lecturer, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: solov_na@mail.ru