МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 3

УДК 517.958

© *Ж. Ш. Сафаров*

# ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье исследуются вопросы устойчивости решений обратных задач для двух интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Теоремы существования и единственности решений этих задач, в малом, были получены и опубликованы автором ранее. Поэтому в данной работе рассматриваются исключительно вопросы устойчивости этих решений. В теореме 1 доказывается условная устойчивость решения обратной задачи об определении ядра интеграла для интегро-дифференциального уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

с начальными данными $u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \delta(x)$ и по дополнительной информации о решении прямой задачи $u(0,t) = f_1(t),\ u_x(0,t) = f_2(t)$. С этой целью обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. Для доказательства теоремы применяется метод последовательных приближений. Далее, используются метод оценок интегральных уравнений и неравенство Гронуолла. Аналогично доказываемая теорема 2 посвящается оценке условной устойчивости решения обратной задачи об определении ядра интеграла для того же интегро-дифференциального уравнения, в ограниченной по $x$ области $x \in (0,l)$, с начальными $u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \delta'(x)$ и граничными условиями $(u_x - hu)\big|_{x=0} = 0,\ \ (u_x + Hu)\big|_{x=l} = 0,\ \ t > 0$. В этом случае дополнительная информация о решении прямой задачи задается в виде $u(0,t) = f(t),\ \ t \geqslant 0$. Здесь $h, H$ — вещественные и конечные числа.

*Ключевые слова*: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, устойчивость, дельта-функция, ядро.

## Введение

Схема исследования обратных задач для дифференциальных уравнений, как правило, включает два этапа. На первом этапе исследуются свойства решения прямой задачи, а на втором этапе проводится исследование самой обратной задачи, включающее доказательства теорем существования, единственности и условной устойчивости решения обратной задачи в соответствующих функциональных пространствах, описание условий согласования данных обратной задачи.

Основная цель, для которой решаются математические задачи, заключается в математическом описании физических процессов. Чтобы математическая модель описывала реальный физический процесс, к задаче необходимо предъявить некоторые требования, которые отражают физический факт малого изменения решения при малом изменении данных задачи, или, другими словами, устойчивости решения к малым изменениям входных данных. Вопросами устойчивости решений обратных задач для гиперболических уравнений различной постановки можно ознакомиться в [1] (см. также библиографию в [1]). Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа — сравнительно молодое направление в теории обратных задач, возникшее в конце 80-ых годов прошлого столетия. Обратные задачи однозначного определения ядра интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа изучались в работах [2–6]. Основные уравнения, рассматриваемые здесь, описывают так называемое явление с «предысторией», или «памятью». Одно из применений уравнений с «памятью» возникает в геофизике, когда свойства среды исследуются при помощи сейсмических волн. Фактически, согласно предположениям о гладкости, система уравнений для неупругой модели Больцмана (одной из наиболее общих моделей для линейной неупругой среды) в одномерном случае сводится к рассмотренным в этой статье интегро-дифференциальным уравнениям. Здесь в качестве источника возмущения волн используется дельтаобразные функции, сосредоточенные в окрестности фиксированной точки.

Эффективным методом исследования динамических обратных задач для гиперболических уравнений является метод операторных уравнений Вольтерра (формула Даламбера, метод характеристик, формула Кирхгофа, метод С. Л. Соболева, метод шкал банаховых пространств аналитических функций). Основная идея этого метода заключается в том, что для многих гиперболических уравнений известны представления решений в виде интегральных уравнений Вольтерра. Используя эти представления, а также дополнительную информацию о решении прямой задачи, можно получить операторное уравнение Вольтерра или систему уравнений относительно искомых функций. Операторные уравнения Вольтерра второго рода относительно искомых функций получены для широкого круга как одномерных, так и многомерных динамических обратных задач для гиперболических уравнений.

В работах [7, 8] исследуются вопросы локальной разрешимости двух обратных задач для интегро-диференциальных уравнений гиперболического типа. В первой из них прямая задача рассматривается в бесконечной, во второй — в ограниченной по $x$ области. В этих работах доказаны теоремы существования и единственности решений обратных задач, соответствующих прямым задачам. Данная работа посвящена оценкам устойчивости этих решений. Эти оценки устойчивости важны как сами по себе, так как характеризуют степень устойчивости решения задач, так и для построения численных алгоритмов решения обратных задач. Поэтому в дальнейшем речь будет идти только об устойчивости этих решений.

## § 1. Первая задача

Рассмотрим прямую задачу Коши с сосредоточенным источником, состоящую в нахождении обобщенного решения $u(x,t)$ уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \delta(x), \tag{2}$$

где $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$, $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака.

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $k(t)$, $t > 0$, по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)–(2):

$$u(0,t) = f_1(t), \qquad u_x(0,t) = f_2(t) \qquad t > 0. \tag{3}$$

В упомянутой работе [7] доказано существование единственного решения задачи (1)–(3) для достаточно малых $T_0 \in [0,T]$ в классе $k(t) \in C[0,T]$.

Обозначим через $K(k_0)$ множество функций $k(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ условию

$$\|k\|_{C[0,T]} \leqslant k_0$$

с постоянной $k_0 > 0$.

Справедлива следующая теорема условной устойчивости.

**Теорема 1.** *Пусть* $k^1(t) \in K(k_0)$, $k^2(t) \in K(k_0)$ *— два решения обратной задачи* (1)–(3) *с данными* $(f_1^1, f_2^1), (f_1^2, f_2^2)$ *соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(k_0, T)$, *что выполняется неравенство*

$$||k^1(t) - k^2(t)||_{C[0,T]} \leqslant C(||f_1^1 - f_1^2||_{C^3[0,T]} + ||f_2^1 - f_2^2||_{C^2[0,T]}). \tag{4}$$

Доказательство. Из формулы Даламбера следует, что в области $D_T = \{(x,t) : |x| < t < T - |x|\}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|} \int_0^{\tau-|\xi|} k(\alpha)u(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\tau\,d\xi. \tag{5}$$

Выпишем несколько частных производных функции $u(x,t)$ в $D_T$. Они имеют вид

$$u_t(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|} k(\alpha)u(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)\,d\alpha\,d\xi, \tag{6}$$

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|} k(\alpha)u(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)\,\mathrm{sign}\,(\xi-x)\,d\alpha\,d\xi, \tag{7}$$

$$u_{xt}(x,t) = -\frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} k(t-|x-\xi|-|\xi|)\,\mathrm{sign}\,(\xi-x)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|} k(\alpha)u_t(t-|x-\xi|-\alpha)\,\mathrm{sign}\,(\xi-x)\,d\alpha\,d\xi, \tag{8}$$

$$u_{tt}(x,t) = -\frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} k(t-|x-\xi|-|\xi|)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|} k(\alpha)u_t(t-|x-\xi|-\alpha)\,d\alpha\,d\xi, \tag{9}$$

$$k(t) = -4(f_2''(t) + f_1'''(t)) - 2\int_0^t k(\tau)f_1'(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_0^t \int_0^\xi k(\alpha)(u_{tt}+u_{tx})\left(\frac{t-\xi}{2}, \frac{t+\xi}{2} - \alpha\right)d\alpha\,d\xi. \tag{10}$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему интегральных уравнений в области $D_T = \{(x,t) : |x| < t < T - |x|\}$ относительно шести функций $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, k$.

Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t), \tag{11}$$

в котором $u_0(x,t) = \frac{1}{2}$, а функции $u_n(x,t)$, $n \geqslant 1$, определены рекуррентными соотношениями

$$u_n(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|} \int_0^{\tau-|\xi|} k(\alpha)u_{n-1}(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\tau\,d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|} \int_0^{\tau-|\xi|} k(\alpha)u_0(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\tau\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|} \int_0^{\tau-|\xi|} k(\alpha)\,d\alpha\,d\tau\,d\xi.$$

Из условия $k(t) \in C[0,T]$ следует, что $u_n(x,t)$ являются непрерывными функциями в $\Omega$ вместе с первыми и вторыми производными по $x, t$ для всех $n \geqslant 1$, где $\Omega(x,t) = \{(\xi,\tau) : |\xi| \leqslant \tau \leqslant t - |x-\xi|\}$.

Тогда для $(x,t) \in \Omega$ имеем, что

$$|u_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{k_0T}{2}t^2, \qquad |u_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k_0T}{2}\right)^2 \frac{t^4}{1\cdot 3}, \qquad |u_3(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k_0T}{2}\right)^3 \frac{t^6}{1\cdot 3\cdot 5}.$$

Продолжая подобные вычисления, методом математической индукции найдем, что

$$|u_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k_0T}{2}\right)^n \frac{t^{2n}}{(2n-1)!!} \leqslant \frac{1}{2(2n-1)!!}\left(\frac{k_0T^3}{2}\right)^n.$$

Поэтому ряд в (11) сходится равномерно и его сумма является непрерывной функцией в $\Omega$. Более того, имеет место оценка

$$|u(x,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|u_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!}\left(\frac{k_0T^3}{2}\right)^n =: \mu_0. \tag{12}$$

Обозначим через $u^1, u^2$ решения задачи (1)–(3), отвечающие функциям $k^1, k^2$, и в дальнейшем будем обозначать разность двух функций, наименование которых отличается только цифрой сверху, той же самой буквой со знаком $\sim$ . Например $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{k} = k^1 - k^2$ и так далее. Тогда из уравнений (5)–(10) нетрудно получить следующую систему:

$$\widetilde{u}(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|}\int_0^{\tau-|\xi|}[k^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,\tau-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u^2(\xi,\tau-\alpha)]\,d\alpha\,d\tau\,d\xi, \tag{13}$$

$$\widetilde{u}_t(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|}[k^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u^2(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)]\,d\alpha\,d\xi, \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_x(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|}[k^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)+\\ +\widetilde{k}(\alpha)u^2(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)]\operatorname{sign}(\xi-x)\,d\alpha\,d\xi,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_{xt}(x,t) = -\frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\widetilde{k}(t-|x-\xi|-|\xi|)\operatorname{sign}(\xi-x)\,d\xi-\\ -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_t(t-|x-\xi|-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u_t^2(t-|x-\xi|-\alpha)]\operatorname{sign}(\xi-x)\,d\alpha\,d\xi,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_{tt}(x,t) = -\frac{1}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\widetilde{k}(t-|x-\xi|-|\xi|)\,d\xi-\\ -\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\int_0^{t-|x-\xi|-|\xi|}[k^1(\alpha)\widetilde{u}_t(t-|x-\xi|-\alpha)+\widetilde{k}(\alpha)u_t^2(t-|x-\xi|-\alpha)]\,d\alpha\,d\xi,\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{k}(t) = -4(\widetilde{f}_2''(t)+\widetilde{f}_1'''(t))-2\int_0^t[k^1(\tau)\widetilde{f}_1'(t-\tau)+\widetilde{k}(\tau)f_1'^2(t-\tau)]\,d\tau-\\ -\int_0^t\int_0^{\xi}\left[k^1(\alpha)(\widetilde{u}_{tt}+\widetilde{u}_{tx})\Big(\frac{t-\xi}{2},\frac{t+\xi}{2}-\alpha\Big)+\widetilde{k}(\alpha)(u_{tt}^2+u_{tx}^2)\Big(\frac{t-\xi}{2},\frac{t+\xi}{2}-\alpha\Big)\right]d\alpha\,d\xi.\end{gathered} \tag{18}$$

Пусть

$$\begin{gathered}\psi(t) = \max\Big[\max_{-\frac{T}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}}|\widetilde{u}(x,t)|, \max_{-\frac{T}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}}|\widetilde{u}_t(x,t)|, \max_{-\frac{T}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}}|\widetilde{u}_x(x,t)|,\\ \max_{-\frac{T}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}}|\widetilde{u}_{tx}(x,t)|, \max_{-\frac{T}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}}|\widetilde{u}_{tt}(x,t)|, |\widetilde{k}(t)|\Big], \qquad t\in[0,T].\end{gathered}$$

Используя уравнения (13)–(18), получим

$$|\widetilde{u}(x,t)| = \left|\frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}\int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|}\int_0^{\tau-|\xi|}(\mu_0+k_0)\psi(\alpha)\,d\alpha\,d\tau\,d\xi\right| \leqslant \frac{\mu_0+k_0}{2}T^2\int_0^t\psi(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{u}_t(x,t)| \leqslant \frac{\mu_0+k_0}{2}T\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha, \qquad |\widetilde{u}_x(x,t)| \leqslant \frac{\mu_0+k_0}{2}T\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{u}_{xt}(x,t)| \leqslant \left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_0+k_0}{2}T\right)\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha, \qquad |\widetilde{u}_{tt}(x,t)| \leqslant \left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_0+k_0}{2}T\right)\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha,$$

$$|\widetilde{k}(t)| \leqslant 4\Big(\|\widetilde{f}_2(t)\|_{C^2[0,T]}+\|\widetilde{f}_1(t)\|_{C^3[0,T]}\Big)+2\|\widetilde{f}_1(t)\|_{C^3[0,T]}k_0T+$$

$$+2\|f_1(t)\|_{C^3[0,T]}\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha+2(\mu_0+k_0)(1+T)\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant (4+2k_0T)\Big(\|\widetilde{f}_2(t)\|_{C^2[0,T]}+\|\widetilde{f}_1(t)\|_{C^3[0,T]}\Big)+2\Big((\mu_0+k_0)(1+T)+$$

$$+\|f_1(t)\|_{C^3[0,T]}\Big)\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha.$$

Из этих соотношений следует, что $\psi(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$|\psi(t)| \leqslant (4+2k_0T)\Big(\|\widetilde{f}_2(t)\|_{C^2[0,T]}+\|\widetilde{f}_1(t)\|_{C^3[0,T]}\Big)+\mu_1\int_0^t \psi(\alpha)\,d\alpha,$$

в котором $\mu_1 := \max\Big\{\frac{1}{4}+(\mu_0+k_0)\frac{T}{2}, 2\big((\mu_0+k_0)(1+T)+\|f_1(t)\|_{C^3[0,T]}\big)\Big\}$. Используя неравенство Гронуолла, получаем оценку

$$|\psi(t)| \leqslant 4\big(\|\widetilde{f}_2(t)\|_{C^2[0,T]}+\|\widetilde{f}_1(t)\|_{C^3[0,T]}\big)\exp(\mu_1 t), \qquad t\in(0,T). \tag{19}$$

Если в (19) взять $C = 4\exp(\mu_1 T)$, то получим неравенство (4). Теорема 1 доказана. $\square$

## § 2. Задача для ограниченного отрезка

С точки зрения приложений обратные задачи, заданные в ограниченной по $x$ области, являются наиболее интересными задачами.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-u_{xx} = \int_0^t k(\alpha)u(x,t-\alpha)\,d\alpha, \qquad x\in(0,l), \quad t>0, \tag{20}$$

с начальными

$$u|_{t=0}=0, \qquad u_t|_{t=0}=\delta'(x) \tag{21}$$

и граничными

$$(u_x-hu)|_{x=0}=0, \qquad (u_x+Hu)|_{u=l}=0, \qquad t>0, \tag{22}$$

условиями; здесь $h, H$ — вещественные и конечные числа, $\delta'(x)$ — производная дельта-функции Дирака. В предположении $k(t)\in C(0,\infty)$ требуется определить функцию $k(t)$ из условия

$$u(0,t)=f(t), \qquad t\geqslant 0. \tag{23}$$

В работе [8] исследована задача определения подынтегральной функции из уравнения (20) в ограниченной по $x$ области $D=\{(x,t) : 0<x<l, t>0\}$ и получена замкнутая система интегральных уравнений относительно $v(x,t), k(t), v_t(x,t)$:

$$v(x,t) = he^{h(x-t)}-\int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} k(\tau-2\xi)\,d\xi\,d\tau-$$

$$-\int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-\xi} k(\alpha)v(\xi,-\xi+\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}} k(2\tau-t+x-2\xi)\,d\xi\,d\tau-$$

$$-\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_{0}^{-\xi+2\tau-t+x} k(\alpha)v(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau,$$

$$k(t)=2f_0''(t)-2h^3e^{-ht}+h\int_0^t k(\xi)\,d\xi-h^2\int_0^t e^{h(t-\tau)}\int_0^\tau k(\xi)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\int_0^{\frac{t}{2}} k(\alpha)v\Big(\frac{t}{2},\frac{t}{2}-\alpha\Big)\,d\alpha+2\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-\xi} k(\alpha)v_t(\xi,-\xi+t-\alpha)\,d\alpha\,d\xi-$$

$$-2h\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-\xi} k(\alpha)v(\xi,-\xi+t-\alpha)\,d\alpha\,d\xi+2h^2\int_0^t e^{h(\tau-t)}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-\xi} k(\alpha)v(\xi,-\xi+\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau,$$

$$v_t(x,t)=-h^2e^{h(x-t)}+\int_0^{\frac{t-x}{2}} k(t-x-2\xi)\,d\xi-$$

$$-h\int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} k(\tau-2\xi)\,d\xi\,d\tau-\int_0^{\frac{t-x}{2}}\int_0^{t-x-\xi} k(\alpha)v(\xi,-\xi+t-x-\alpha)\,d\alpha\,d\xi+$$

$$+h\int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-\xi} k(\alpha)v(\xi,-\xi+t-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau+\frac{1}{2}xK(t-x)-$$

$$-\int_x^{\frac{t+x}{2}}\int_0^{-\xi+t+x} k(\alpha)v(\xi,-\xi+t+x-\alpha)\,d\alpha\,d\xi+\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{-\xi+t+x} k(\alpha)v(\xi,-\xi+t+x-\alpha)\,d\alpha\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t}\int_0^{\frac{2\tau+x-t}{2}} k(\alpha)v\Big(\frac{2\tau-t+x}{2},\frac{2\tau+x-t}{2}-\alpha\Big)\,d\xi\,d\tau-\int_{t-x}^{t}\int_0^{\tau} k(\alpha)v(\tau-t+x,\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\tau+$$

$$+\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-\xi+2\tau-t+x} k(\alpha)v_t(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau,$$

где $v(x,t)=u(x,t)+\delta(t-x)$ и $f(t)=-\delta(t)+\theta(t)f_0(t)$.
Доказано существование единственного решения обратной задачи (20)–(23) для достаточно малых $T_0\in[0,2l]$, в классе $k(t)\in[0,2l]$.

Перейдем к построению оценки условной устойчивости решения обратной задачи.

Пусть $K(k_0)$ — множество функций $k(t)\in C[0,2l]$, удовлетворяющих при некотором $l>0$ условию

$$\|k\|_{C[0,2l]}\leqslant k_0$$

с постоянной $k_0>0$.

**Теорема 2.** *Пусть $k^1(t)\in K(k_0)$, $k^2(t)\in K(k_0)$ — два решения обратной задачи* (20)–(23) *с данными $f^1,f^2$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C=C(k_0,M,l,h)$, что выполняется неравенство*

$$\|k^1(t)-k^2(t)\|_{C[0,2l]}\leqslant C\|f^1-f^2\|_{C^2[0,2l]}. \qquad (24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим для $v(x,t)$ процесс последовательных приближений по следующей схеме:

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,t), \qquad (25)$$

где

$$v_0(x,t)=he^{h(x-t)}-\int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)}\int_0^{\frac{\tau}{2}} k(\tau-2\xi)\,d\xi\,d\tau+\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}} k(2\tau-t+x-2\xi)\,d\xi\,d\tau,$$

$$v_n(x,t) = -\int_0^{t-x} e^{h(\tau-t+x)} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\tau-\xi} k(\alpha) v_{n-1}(\xi, -\xi+\tau-\alpha)\, d\alpha\, d\xi\, d\tau -$$

$$-\int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}} \int_0^{-\xi+2\tau-t+x} k(\alpha) v_{n-1}(\xi, -\xi+2\tau-t+x-\alpha)\, d\alpha\, d\xi\, d\tau, \qquad n \geqslant 1.$$

Далее, после выполнения несложных вычислений находим, что

$$|v_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{2n!!} \left( \frac{(1+lh)k_0 l^2}{h} \right)^n,$$

где $M = M(h,l)$ — конечное вещественное число.

Поэтому ряд в (25) сходится равномерно. Кроме того, имеет место оценка

$$|v(x,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x,t)| \leqslant \frac{M}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!!} \left( \frac{(1+lh)k_0 l^2}{h} \right)^n =: \mu_0.$$

Введем в рассмотрение функции $\widetilde{v}(x,t) = v^1(x,t) - v^2(x,t)$, $\widetilde{v}_t(x,t) = v^1_t(x,t) - v^2_t(x,t)$, $\widetilde{k}(t) = k^1(t) - k^2(t)$. Как и при доказательстве теоремы 1, оценивая значения этих функций и применяя неравенство Гронуолла, получим оценку (24). Теорема 2 доказана. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005. 295 с.
2. Bukhgeym A.L. Inverse problems of memory reconstrution // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 1993. Vol. 1. Issue 3. P. 193–206.
3. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1997. Vol. 20. Issue 4. P. 291–314.
4. Дурдиев Д.К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения электродинамики // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 867–873.
5. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Локальная разрешимость задачи определения пространственной части предыстории среды в одном гиперболическом уравнении // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2012. Вып. 4 (29). С. 37–47.
6. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 72–82.
7. Сафаров Ж.Ш. Вопросы локальной разрешимости одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения колебания бесконечной струны // Узбекский математический журнал. 2013. № 2. С. 100–106.
8. Сафаров Ж.Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной области // Узбекский математический журнал. 2012. № 2. С. 117–124.

Поступила в редакцию 20.05.2014

Сафаров Журабек Шакарович, программист, Ташкентский университет информационных технологий, 100202, Узбекистан, г. Ташкент, пр. Амира Темура, 108.
E-mail: j.safarov65@mail.ru

***Zh. Sh. Safarov***

**Evaluation of the stability of some inverse problems solutions for integro-differential equations**

*Keywords*: integro-differential equation, inverse problem, stability, delta function, kernel.

MSC: 35L70, 58J45

The paper investigates the stability of inverse problems solutions for two integro-differential hyperbolic equations. Theorems of existence and uniqueness of these solutions (in the small) have been obtained and published earlier by author. Thus only stability problems of these solutions are considered in this paper. In Theorem 1 we prove conditional stability of the solution of the following inverse problem: determine the kernel of the integral for integro-differential equation

$$u_{tt} = u_{xx} - \int_0^t k(\tau)u(x, t-\tau)\, d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

with initial data $u\big|_{t=0} = 0,\ \ u_t\big|_{t=0} = \delta(x)$, and additional information about the direct problem solution $u(0,t) = f_1(t),\ u_x(0,t) = f_2(t)$. The inverse problem is replaced by an equivalent system of integral equations for the unknown functions. To prove the theorem the method of successive approximations is used. Next, the method of estimating the integral equations and Gronwall's inequality are used.

In a similar manner we prove Theorem 2. It is devoted to estimating the conditional stability of the solution of kernel determination problem for the same integro-differential equation in a bounded domain with respect to $x$, $x \in (0,l)$, with initial data $u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \delta'(x)$, and boundary conditions $(u_x - hu)\big|_{x=0} = 0$, $(u_x + Hu)\big|_{x=l} = 0,\ \ t > 0$. In this case the additional information about the direct problem solution is given as $u(0,t) = f(t),\ \ t \geqslant 0$. Here $h$ and $H$ are finite real numbers.

## REFERENCES

1. Romanov V.G. *Ustoichivost' v obratnykh zadachakh* (Stability in inverse problems), Moscow: Nauchnyi mir, 2005, 295 p.

2. Bukhgeym A.L. Inverse problems of memory reconstrution, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 1993, vol. 1, issue 3, pp. 193–206.

3. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1997, vol. 20, no. 4, pp. 291–314.

4. Durdiev D.K. Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 893–899.

5. Durdiev D.K, Safarov Zh.Sh. The local solvability of a problem of determining the spatial part of a multidimensional kernel in the integro-differential equation of hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, issue 4 (29), pp. 37–47 (in Russian).

6. Durdiev D.K, Totieva Zh.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 72–82 (in Russian).

7. Safarov J.Sh. Problems of the local solvability of the inverse problem for integro-differential equations vibrations of an infinite string, *Uzbek. Math. J.*, 2013, no. 2, pp. 100–106.

8. Safarov J.Sh. Inverse problem for integro-differential equations of hyperbolic type in the limited area, *Uzbek. Math. J.*, 2012, no. 2, pp. 117–124.

Received 20.05.2014

Safarov Zhurabek Shakarovich, Programmer, Tashkent University of Information Technology, pr. Amir Temur, 108, Tashkent, 100202, Uzbekistan.
E-mail: j.safarov65@mail.ru