

УДК 519.63

© В. Г. Пименов, С. В. Свиридов

**СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹**

Рассматривается уравнение в частных производных первого порядка с эффектом наследственности:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}.$$

Для такого уравнения, с позиций принципа разделения конечномерной и бесконечномерной составляющих состояния, строятся сеточные методы: аналог семейства схем бегущего счета, аналог схемы Кранка–Николсон, метод аппроксимации на середину квадрата. Для учета эффекта наследственности применяются одномерная и двойная кусочно-линейная интерполяция и экстраполяция продолжением. Доказывается, что рассмотренные методы имеют порядки локальной погрешности: соответственно $O(h + \Delta)$, $O(h + \Delta^2)$ и $O(h^2 + \Delta^2)$, где h — шаг дискретизации по пространственной переменной, Δ — шаг дискретизации по временной переменной. Исследуются свойства двойной кусочно-линейной интерполяции. Используя результаты общей теории разностных схем, установлены условия устойчивости предложенных методов. С помощью вложения в общую схему численных методов для функционально-дифференциальных уравнений получены теоремы о порядках сходимости сконструированных алгоритмов. Приведены тестовые примеры по сравнению погрешностей методов.

Ключевые слова: уравнение переноса, запаздывание, сеточные схемы, интерполяция, экстраполяция, устойчивость, порядок сходимости.

Введение

Уравнение переноса — уравнение в частных производных первого порядка, описывающее перенос сохраняющейся скалярной величины в пространстве, обусловленный диффузией. В моделях физики это уравнение часто называют уравнением конвекции, в моделях биологии — уравнением адвекции. Во многих моделях этот эффект может осложняться запаздыванием различных видов [1]. В силу сложности объекта на первый план выходит конструирование численных алгоритмов решения таких уравнений. Численные методы решения уравнения переноса без запаздывания достаточно хорошо изучены (например, см. изложение в учебниках [2–4]). Общие вопросы для функционально-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка рассматривались в ряде работ, например в [5]. В данной работе численные методы конструируются с позиции принципа разделения состояния системы на конечномерную и бесконечномерную составляющие. По конечномерной составляющей конструируются аналоги методов, известных для объектов без запаздывания, а для учета предыстории (бесконечномерной составляющей) используется интерполяция с заданными свойствами. Этот подход позволяет эффективно конструировать методы и на основе таких алгоритмов создавать соответствующее программное обеспечение. Отметим, что ранее этот подход применительно к простейшим сеточным алгоритмам был анонсирован в работах [6, 7] и реализован для одного метода в [8]. Данная работа продолжает эти исследования, в ней предложена общая методика и приводятся доказательства теорем о порядках сходимости.

Рассмотрим уравнение переноса с эффектом наследственности:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (0.1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы развития УрФУ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и РФФИ (грант 13-01-00089).

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X,$$

с краевым условием

$$u(0, t) = \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (0.2)$$

и начальным условием

$$u(x, s) = \varphi(x, s), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq s \leq 0. \quad (0.3)$$

Здесь x, t — независимые переменные, $u(x, t)$ — искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t , $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Предполагается, что функционал f , функции $\gamma(t)$, $\varphi(x, s)$ и константа $a > 0$ таковы, что задача (0.1)–(0.3) имеет единственное решение [1].

§ 1. Дискретизация задачи

Пусть шаг h по переменной x такой, что $X/h = N$, где N — натуральное; обозначим $x_i = ih \in [0, X]$, $i = 0, \dots, N$. Пусть шаг Δ по переменной t такой, что $\tau/\Delta = m$, где m — натуральное; пусть $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$, обозначим $t_j = j\Delta \in [-\tau, T]$, $j = -m, \dots, M$. Сеткой назовем набор пар $\{x_i, t_j\}$.

Приближения функции $u(x, t)$ в узлах сетки будем обозначать u_j^i . Для каждого фиксированного $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию по временным узлам к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$:

$$\{u_k\}_j^i = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}.$$

Определение 1 (см. [9, с. 104], [11]). Оператором *интерполяции–экстраполяции* дискретной предыстории назовем отображение $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v_j^i(\cdot) \in Q[t_j - \tau, t_j + \Delta]$.

Здесь $Q[\alpha, \beta]$ — множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[\alpha, \beta]$, с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций на $Q = Q[\alpha, \beta]$ соотношением

$$\|u(\cdot)\|_Q = \max_{s \in [\alpha, \beta]} |u(s)|.$$

Будем предполагать, что, во-первых, оператор интерполяции–экстраполяции липшицев, то есть найдется такая константа L_I , что для всех предысторий дискретной модели $\{u_k^i\}_j$ и $\{y_k^i\}_j$ выполняется неравенство

$$\max_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v_j^i(t) - w_j^i(t)| \leq L_I \max_{j - m \leq k \leq j} |u_k^i - y_k^i|,$$

где $v_j^i(\cdot) = I(\{u_k^i\}_j)$, $w_j^i(\cdot) = I(\{y_k^i\}_j)$.

Во-вторых, будем предполагать, что оператор интерполяции–экстраполяции согласован, то есть

$$v_j^i(t_k) = u_k^i, \quad k = j - m, \dots, j.$$

Определение 2 (см. [9, с. 104], [11]). Будем говорить, что оператор интерполяции–экстраполяции *имеет порядок погрешности p* на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 , такие, что для всех i, j и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$|v_j^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j - m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p. \quad (1.1)$$

Простейший способ интерполяции — кусочно-линейная функция, простейший способ экстраполяции — экстраполяция продолжением (см. [9]). Образованный таким образом оператор интерполяции–экстраполяции липшицев с константой $L_I = 2$, согласован и имеет второй порядок погрешности [9].

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \left(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h} \right) = F_j^i(v_j^i(\cdot)), \quad (1.2)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

с соответствующими начальными,

$$u_0^i = \varphi(x_i, t_0), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$v_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N,$$

и граничными,

$$u_j^0 = \gamma(t_j), \quad j = 0, \dots, M,$$

условиями. Здесь $v_j^i(\cdot)$ — результат действия заданного оператора интерполяции–экстраполяции дискретной предыстории, $F_j^i(v(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, \Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u_j^i, v(\cdot))$, липшицевый по переменной $v(\cdot)$ с константой L_F .

При всех $0 \leq s \leq 1$ из (1.2) может быть явно выражено u_{j+1}^i в силу условия $a > 0$.

Обозначим погрешность метода через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$, $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$.

Определение 3. Будем говорить, что метод *сходится*, если $\varepsilon_j^i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$. Будем говорить, что метод *сходится с порядком* $h^p + \Delta^q$, если существует константа c такая, что выполняется $|\varepsilon_j^i| \leq c(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$.

Порядок сходимости метода зависит прежде всего от порядка локальной погрешности или невязки.

Определение 4. *Невязкой метода* (1.2) назовем

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + a \left(s \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + (1-s) \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right) - F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \quad (1.3)$$

Определение 5. Будем говорить, что *невязка имеет порядок* $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$, если существует константа C , что $|\psi_j^i| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$ для всех $i = 1, \dots, N$, $j = 0, \dots, M-1$.

§ 2. Невязка схем бегущего счета

Рассмотрим семейство методов (1.2), в которых функционал F_j^i определяется простейшим способом:

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, v_j^i(\cdot)). \quad (2.1)$$

По аналогии с терминологией [3] будем называть эти алгоритмы схемами бегущего счета. Заметим, что в этом случае экстраполяция не нужна, а нужна только интерполяция. В случае постоянного сосредоточенного запаздывания не нужна также интерполяция. Среди всех схем этого семейства отметим схему «правый верхний уголок», получающуюся при $s = 1$.

Теорема 1. *Если для точного решения задачи (0.1)–(0.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 2-го порядка включительно, то для любого $0 \leq s \leq 1$ невязка метода (1.2), (2.1) имеет порядок $h + \Delta$.*

Доказательство. Разложим значения точного решения задачи (0.1)–(0.3), входящие в определение невязки, по формуле Тейлора в точке $\{x_i, t_j\}$:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + O(\Delta^2),$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + O(h^2),$$

$$u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + h(O(h) + O(\Delta)).$$

Подставляя эти выражения в определение невязки (1.3), учитывая (2.1) и то, что $u(x_i, t_j)$ — точное решение задачи (0.1)–(0.3) в точке $\{x_i, t_j\}$, получаем

$$\psi_i^j = O(h) + O(\Delta).$$

□

§ 3. Невязка аналога схемы Кранка–Николсон

Как показывает теорема 1, невязка семейства методов (1.2) с условием (2.1) имеет порядок $h + \Delta$. В этом разделе среди методов вида (1.2) строится метод порядка $h + \Delta^2$, который можно назвать аналогом метода Кранка–Николсон, так как в формуле (1.2) выберем вес

$$s = \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

В этом методе вместо условия (2.1) положим

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_{j+1/2}, x_i, u_{j+1/2}^i, v_{j+1/2}^i(\cdot)), \quad (3.2)$$

где $t_{j+1/2} = t_j + h/2$ — полущелая точка, $v_{j+1/2}^i(\cdot)$ — результат действия оператора кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением в этой точке (в отличие от (2.1) здесь экстраполяция нужна по существу), $u_{j+1/2}^i = v_{j+1/2}^i(t_{j+1/2})$.

Теорема 2. Если для точного решения задачи (0.1)–(0.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, то невязка метода (1.2), (3.1), (3.2) имеет порядок $h + \Delta^2$.

Доказательство. Невязка метода определяется соотношением

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \\ &+ \frac{a}{2} \left(\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right) - \bar{f}_{j+1/2}^i, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\bar{f}_{j+1/2}^i = f(t_{j+1/2}, x_i, u(x_i, t_{j+1/2}), u_{t_{j+1/2}}(x_i, \cdot))$.

Подставим в первую дробь (3.3) разложения

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1/2}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2})\frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2})\frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2})\frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2})\frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

во вторую и в третью — разложения

$$u(x_{i-1}, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + O(h^2),$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + O(h^2),$$

получим

$$\psi_j^i = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) + O(\Delta^2) + O(h) + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \right) - \bar{f}_{j+1/2}^i.$$

Но при условиях теоремы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) + O(h),$$

поэтому

$$\psi_j^i = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) - \bar{f}_{j+1/2}^i + O(\Delta^2) + O(h).$$

Так как $u(x_i, t_{j+1/2})$ — точное решение задачи (0.1) в точке $(x_i, t_{j+1/2})$, то отсюда вытекает заключение теоремы. \square

§ 4. Схема аппроксимации на середину квадрата с двойной интерполяцией и ее невязка

Для однородных линейных уравнений, соответствующих (0.1), то есть в которых правая часть уравнения нулевая и, следовательно, нет эффекта наследственности: $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)) \equiv 0$, в классе методов (1.2) существует метод порядка $h^2 + \Delta^2$ [2, с. 331], если

$$s = \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\Delta}. \quad (4.1)$$

Этот метод можно назвать схемой аппроксимации на середину квадрата, который образован узлами (x_{i-1}, t_j) , (x_i, t_j) , (x_{i-1}, t_{j+1}) и (x_i, t_{j+1}) .

Однако для нелинейного уравнения с наследственностью (0.1), для того чтобы построить аналог этого метода, нужно вычислять f в точках, являющихся полуцелыми узлами не только по переменной t , как в предыдущем методе, но и в полуцелых точках по переменной x . Это требование приводит фактически к необходимости двумерной интерполяции, то есть не только интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории по времени, но и интерполяции временной предыстории по пространству. Рассмотрим простейший способ, необходимый для конструирования метода. Расширим понятие оператора интерполяции–экстраполяции до следующего: двойным оператором интерполяции–экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I : (\{u_k\}_j^{i-1}, \{u_k^i\}_j) \rightarrow v_j^{i-1/2}(\cdot) \in Q[t_j - \tau, t_j + \Delta]$.

Приведем конструкцию двойного оператора интерполяции–экстраполяции, обладающую нужными для метода свойствами. Пусть известны две дискретные предыстории: $\{u_k\}_j^i = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$ и $\{u_k\}_j^{i-1} = \{u_k^{i-1}, j - m \leq k \leq j\}$. Определим предысторию между узлами,

$$\{u_k\}_j^{i-1/2} = \left\{ u_k^{i-1/2} = \frac{u_k^i + u_k^{i-1}}{2}, j - m \leq k \leq j \right\}, \quad (4.2)$$

и проведем через эти точки кусочно-линейную интерполяцию,

$$v_j^{i-1/2}(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} \left((t_k - t_j - s)u_{k-1}^{i-1/2} + (t_j + s - t_{k-1})u_k^{i-1/2} \right), \quad t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k, \quad (4.3)$$

с экстраполяцией продолжением,

$$v_j^{i-1/2}(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} \left((-s)u_{j-1}^{i-1/2} + (\Delta + s)u_j^{i-1/2} \right), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1}. \quad (4.4)$$

Теорема 3. Если точное решение задачи (0.1)–(0.3) дважды непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных, то двойной оператор интерполяции–экстраполяции (4.2)–(4.4) имеет порядок погрешности $h^2 + \Delta^2$ на точном решении, то есть найдутся константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i = 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$ и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$|v_j^{i-1/2}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq C_1 \left(\max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^{i-1} - u(x_{i-1}, t_k)| + \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| \right) + C_2(h^2 + \Delta^2). \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть в (4.5) зафиксированный момент t принадлежит отрезку $[t_{k-1}, t_k]$, где k — одно из целых чисел от $j - m + 1$ до j (случай интерполяции). Тогда

$$|v_j^{i-1/2}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq |v^{i-1/2}(t) - w^{i-1/2}(t)| + |w^{i-1/2}(t) - u(x_i - h/2, t)|, \quad (4.6)$$

где $w^{i-1/2}(t)$ — результат двойной интерполяции, подобной (4.2), (4.3) точного решения $u(x, t)$:

$$w_l^{i-1/2} = \frac{u(x_i, t_l) + u(x_{i-1}, t_l)}{2}, \quad l = k - 1, k, \quad (4.7)$$

$$w^{i-1/2}(t) = \frac{1}{\Delta} \left((t_k - t)w_{k-1}^{i-1/2} + (t - t_{k-1})w_k^{i-1/2} \right). \quad (4.8)$$

Из (4.3) и (4.8) вытекает оценка

$$|v^{i-1/2}(t) - w^{i-1/2}(t)| \leq 2 \max \left\{ |u_{k-1}^{i-1/2} - w_{k-1}^{i-1/2}|, |u_k^{i-1/2} - w_k^{i-1/2}| \right\}. \quad (4.9)$$

Из (4.2) и (4.5) следует

$$|u_l^{i-1/2} - w_l^{i-1/2}| \leq \frac{1}{2} \max \left\{ |u_l^{i-1} - u(x_{i-1}, t_l)|, |u_l^{i-1} - u(x_{i-1}, t_l)| \right\}, \quad l = k - 1, k, \quad (4.10)$$

таким образом, оценки (4.9) и (4.10) дают

$$|v_j^{i-1/2}(t) - w^{i-1/2}(t)| \leq \max \left\{ |u_{k-1}^{i-1} - u(x_{i-1}, t_{k-1})|, |u_k^{i-1} - u(x_{i-1}, t_k)|, |u_{k-1}^i - u(x_i, t_{k-1})|, |u_k^i - u(x_i, t_k)| \right\}. \quad (4.11)$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (4.10):

$$|w^{i-1/2}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq |w^{i-1/2}(t) - z(x_i - h/2, t)| + |z(x_i - h/2, t) - u(x_i - h/2, t)|, \quad (4.12)$$

где $z(x_i - h/2, t)$ — результат кусочно-линейной интерполяции точного решения в полуцелых узлах:

$$z(x_i - h/2, t) = \frac{1}{\Delta} \left((t_k - t)u(x_i - h/2, t_{k-1}) + (t - t_{k-1})u(x_i - h/2, t_k) \right). \quad (4.13)$$

Если точное решение — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то, во-первых,

$$|z(x_i - h/2, t) - u(x_i - h/2, t)| \leq O(\Delta^2). \quad (4.14)$$

Во-вторых, в силу (4.8), (4.13) и (4.7) выполняется

$$|w^{i-1/2}(t) - z(x_i - h/2, t)| \leq 2 \max \left\{ |w_{k-1}^{i-1/2} - u(x_i - h/2, t_{k-1})|, |w_k^{i-1/2} - u(x_i - h/2, t_k)| \right\} \leq O(h^2). \quad (4.15)$$

Из (4.12), (4.14) и (4.15) следует

$$|w^{i-1/2}(t) - u(x_i - h/2, t)| \leq O(h^2 + \Delta^2). \quad (4.16)$$

Оценки (4.6), (4.11) и (4.16) дают утверждение теоремы в случае $t \in [t_j - \tau, t_j]$. Случай интерполяции $t \in [t_j, t_j + \Delta]$ разбирается аналогично. Отличие состоит в том, что нужно заменить индекс по t с k на j , и в том, что оценка (4.9) примет вид

$$|v^{i-1/2}(t) - w_t^{i-1/2}| \leq 3 \max \left\{ |u_{j-1}^{i-1/2} - w_{j-1}^{i-1/2}|, |u_j^{i-1/2} - w_j^{i-1/2}| \right\}.$$

□

Рассмотрим метод

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \left(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h} \right) = \\ & = f(t_{j+1/2}, x_{i-h/2}, v_{j+1/2}^{i-1/2}, v_{j+1/2}^{i-1/2}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

в котором параметр s определяется условием (4.1), значение приближения искомой функции между узлами — формулой (4.2), а результат двойной интерполяции–экстраполяции — формулами (4.2), (4.3), (4.4). Метод дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

Теорема 4. Если для точного решения задачи (0.1)–(0.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, то невязка метода (4.17), (4.1), (4.2) имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.

Доказательство. Невязка метода определяется соотношением

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \\ &+ a \left(s \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + (1-s) \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right) - \bar{f}_{j+1/2}^{i-1/2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где s определяется соотношением (4.1), а

$$\bar{f}_{j+1/2}^{i-1/2} = f(t_{j+1/2}, x_{i-1/2}, u(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}), u_{t_{j+1/2}}(x_{i-1/2}, \cdot)).$$

Подставим в первую дробь (4.18) разложения

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1/2}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2}) \frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2}) \frac{\Delta^2}{8} + O(\Delta^3),$$

во вторую и третью — разложения

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i-1/2}, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1}) \frac{h}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1/2}, t_{j+1}) \frac{h^2}{8} + O(h^3),$$

$$u(x_{i-1}, t_{j+1}) = u(x_{i-1/2}, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1}) \frac{h}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1/2}, t_{j+1}) \frac{h^2}{8} + O(h^3),$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_{i-1/2}, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_j) \frac{h}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1/2}, t_j) \frac{h^2}{8} + O(h^3),$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_{i-1/2}, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_j) \frac{h}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1/2}, t_j) \frac{h^2}{8} + O(h^3),$$

получим

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) + O(\Delta^2) + O(h^2) + \\ &+ as \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1}) + a(1-s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_j) - \bar{f}_{j+1/2}^{i-1/2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Подставим в это выражение разложения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) \frac{h}{2} + O(h^2), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1}) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) \frac{\Delta}{2} + O(\Delta^2), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_j) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) \frac{\Delta}{2} + O(\Delta^2). \end{aligned}$$

Так как $u(x_{i-1/2}, t_{j+1/2})$ — точное решение задачи (0.1) в точке $(x_{i-1/2}, t_{j+1/2})$, то получаем

$$\psi_j^i = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i-1/2}, t_{j+1/2}) \left(\frac{h}{2} + a(2s-1) \frac{\Delta}{2} \right) + O(\Delta^2) + O(h^2).$$

Так как параметр s выбирается из условия (4.1), отсюда следует утверждение теоремы. \square

§ 5. Сходимость и устойчивость методов

Для определения порядка сходимости сведем методы из семейства (1.2) к общей схеме численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, которая впервые была предложена в [10] (см. также [9]), а затем применена для исследования численных методов решения уравнений в частных производных с наследственностью в [11]. В этом разделе будем употреблять обозначения и понятия из [11] без дальнейших оговорок.

Без ограничения общности будем рассматривать однородные краевые условия

$$\gamma(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

При каждом t_j определим значения дискретной модели вектором $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^N)' \in Y$, здесь Y — векторное пространство размерности $q = N$, ' — знак транспонирования.

Введем в Y две нормы: обычную дискретную,

$$\|y_j\| = \sum_{i=1}^N (y_j^i)^2 h,$$

и энергетическую [2, с. 331],

$$\|y_j\|_{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_j^i - y_j^{i-1})^2}{h}.$$

В пространстве Y введем оператор A :

$$Au_j^i = a \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h},$$

тогда систему (1.2) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + sAy_{j+1} + (1-s)Ay_j = F_j(v(\cdot)), \quad (5.1)$$

где

$$F_j(v(\cdot)) = (F_j^1(v_j^1(\cdot)), F_j^2(v_j^2(\cdot)), \dots, F_j^N(v_j^N(\cdot)))', \quad v(\cdot) = I(\{y_k\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta].$$

Здесь $V = Q^q[-\tau, \Delta]$ — интерполяционное пространство, пространство q -мерных вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит пространству $Q[-\tau, \Delta]$.

Так как при любом допустимом весе s уравнение (5.1) разрешимо относительно y_{j+1} , то можно привести уравнение (5.1) к явной форме

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta), \quad (5.2)$$

где оператор перехода определяется формулой

$$S = (E + s\Delta A)^{-1}(E + (s-1)\Delta A),$$

функция продвижения на шаг — формулой

$$\Phi(t_j, v, \Delta) = (E + s\Delta A)^{-1}F_j(v(\cdot)).$$

Уравнение (5.1) соответствует формуле продвижения модели на шаг в общей схеме работы [11].

Исследуем устойчивость (выполнение условия $\|S\| \leq 1$) полученной схемы. Для этого наряду с уравнениями (1.2), (5.2) рассмотрим однородную разностную схему в формах

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \left(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M-1, \quad (5.3)$$

$$y_{j+1} = Sy_j. \quad (5.4)$$

Схема (5.3) хорошо изучена; например, в работе [2, с. 331] приведены условия, гарантирующие ее устойчивость в энергетической норме:

$$s \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\Delta}. \quad (5.5)$$

Определим функцию точных значений соотношениями

$$z_j = (u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \dots, u(x_N, t_j))' \in Y.$$

Стартовые значения модели можно взять равными функции точных значений:

$$y_j = z_j = (\varphi(x_1, t_j), \varphi(x_2, t_j), \dots, \varphi(x_N, t_j))', \quad j = -m, \dots, 0.$$

Определение невязки в общей схеме работы [11] содержит интерполяцию и отличается от введенного определения невязки без интерполяции (1.3). Однако справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть невязка в смысле (1.3) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I имеет порядок погрешности p_0 на точном решении и согласован, тогда невязка с интерполяцией в смысле общей схемы работы [11] имеет порядок погрешности $\Delta^{\min\{p_0, p_1\}} + h^{p_2}$.

Доказательство. Каждая компонента невязки в смысле [11] имеет вид

$$d_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + a \left(s \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1})}{h} + (1-s) \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right) - F_j^i(w_j^i(\cdot)), \quad (5.6)$$

где $w_j^i(\cdot) = I(\{u(x_i, t_k)\}_j)$ — результат действия оператора интерполяции–экстраполяции на предысториих точного решения в узлах.

Таким образом, получаем

$$d_j^i = \psi_j^i + F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)) - F_j^i(w_j^i(\cdot)). \quad (5.7)$$

Используя липшицевость F_j^i , определение (1.1) порядка оператора интерполяции–экстраполяции и его согласованность, получаем оценку

$$\begin{aligned} |F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)) - F_j^i(w_j^i(\cdot))| &\leq L_F \sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |u(x_i, t) - w(x_i, t)| \leq \\ &\leq L_F \left(C_1 \max_{j-m \leq k \leq j} |u(x_i, t_k) - w(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^{p_0} \right) \leq L_F C_2 \Delta^{p_0}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из (5.7) и (5.8) вытекает утверждение леммы. \square

Замечание 1. Так как кусочно-линейная интерполяция имеет порядок 2 [9, с. 97], то, при условиях теоремы 2, методы (1.2), (2.1) (схемы бегущего счета) с кусочно-линейной интерполяцией имеют порядок невязки, в смысле общей схемы работы [11], равный $h + \Delta$.

Замечание 2. Так как кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет порядок 2 [9, с. 102], то метод (1.2), (3.1), (3.2) (аналог схемы Кранка–Николсон) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет при условиях теоремы 3 порядок невязки, в смысле общей схемы работы [11], равный $h + \Delta^2$.

Аналогичным образом сводится к общей схеме метод (4.17), (4.1), (4.2)–(4.4) (метод с двойной интерполяцией). Отличие состоит в том, что функция F_j^i определяется не соотношением (2.1), а соотношением

$$F_j^i(v_j^{i-1/2}(\cdot)) = f(t_{j+1/2}, x_{i-h/2}, v_{j+1/2}^{i-1/2}, v_{j+1/2}^{i-1/2}(\cdot)).$$

Вложение в общую разностную схему с последствием проведено, откуда, используя теорему 2 из [11], получаем следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть выполнено условие устойчивости (5.5), для точного решения задачи (0.1)–(0.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 2-го порядка включительно, тогда метод (1.2), (2.1) с кусочно-линейной интерполяцией сходится с порядком $h + \Delta$.

Теорема 6. Если для точного решения задачи (0.1)–(0.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, то метод (1.2), (3.1), (3.2) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости $h + \Delta^2$.

Теорема 7. Пусть для точного решения задачи (0.1)–(0.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, тогда метод (4.17), (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$.

§ 6. Численные эксперименты

Пример 1. Рассмотрим следующее уравнение с постоянным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \sin \pi x + \pi t \cos \pi x - (t - \tau) \sin \pi x + u(x, t - \tau) \quad (6.1)$$

при $x \in [0, 2]$, $t \in [0, 1]$, $\tau = 1$, с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, t) = t \sin \pi x, \quad t \in [-\tau, 0], \quad u(0, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

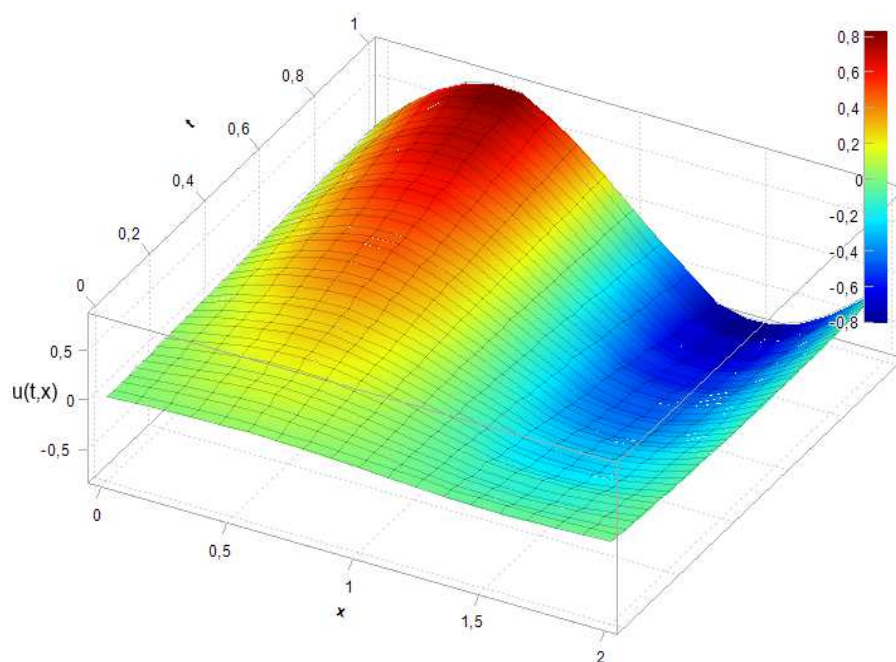


Рис. 1. Приближенное решение уравнения (6.1), полученное аналогом метода Кранка–Николсон при $h = \Delta = 0.05$

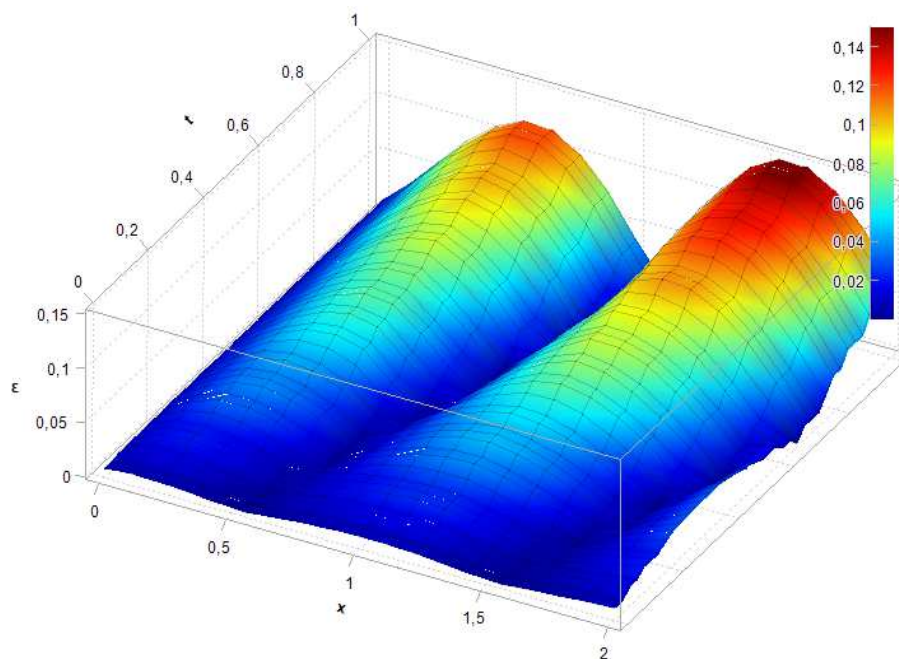


Рис. 2. Модуль разности приближенного и точного решений уравнения (6.1)

Данное уравнение имеет точное решение: $u(x, t) = t \sin \pi x$.

На рисунке 1 приведено приближенное решение данного уравнения аналогом метода Кранка–Николсон при числе точек разбиения по x , равном 40, по t — равном 20. На рисунке 2 изображен модуль разности точного и указанного приближенного решений.

Таблица 1. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (6.1) при разных шагах для методов: 1) схема бегущего счета; 2) аналог схемы Кранка–Николсон; 3) схема аппроксимации на середину квадрата

$h =$	0.05	0.025	0.05	0.05	0.025	0.0125	0.00313
$\Delta =$	0.05	0.05	0.025	0.0125	0.0125	0.00625	0.00625
1)	0.14299	0.11907	0.11422	0.10151	0.06208	0.03243	0.01777
2)	0.15176	0.12796	0.11680	0.10237	0.06287	0.03265	0.01796
3)	0.05476	∞	0.06507	0.06135	0.03434	0.01766	∞

Как видно из таблицы, схемы бегущего счета и Кранка–Николсон показывают примерно одинаковые результаты. Метод аппроксимации на середину квадрата показывает лучшие результаты, но при малых шагах является неустойчивым к вычислительной погрешности. Этот факт можно объяснить тем, что параметр s в нем выбирается из условия (4.1), что является границей зоны устойчивости (5.5).

Пример 2. Рассмотрим тестовое уравнение с переменным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x, t)}{u(x, \frac{t}{2})} - e^{-\frac{t}{2}} \quad (6.2)$$

при $x \in [0, 2]$, $t \in [0, 1]$, $a = 1$, с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, 0) = e^x, \quad x \in [0, 2], \quad u(0, t) = e^{-t}, \quad t \in [0, 1].$$

Данное уравнение имеет точное решение: $u(x, t) = e^{x-t}$. На рисунке 3 можно увидеть абсолютную погрешность решения уравнения при помощи схемы аппроксимации на середину квадрата.

Таблица 2. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (6.2) при разных шагах для методов: 1) схема бегущего счета; 2) аналог схемы Кранка–Николсон; 3) схема аппроксимации на середину квадрата

$h =$	0.05	0.025	0.05	0.05	0.025	0.0125	0.00313
$\Delta =$	0.05	0.05	0.025	0.0125	0.0125	0.00625	0.00625
1)	0.13478	0.10373	0.10246	0.08595	0.05291	0.02688	0.01357
2)	0.04825	0.01667	0.05843	0.06379	0.03011	0.01529	0.00223
3)	0.02429	∞	0.07311	0.08634	0.03731	0.01885	∞

Эксперименты показывают уменьшение погрешности методов при увеличении количества шагов и уже отмеченную в предыдущем примере неустойчивость схемы аппроксимации на середину квадрата при малых шагах. Лучшим методом для данного примера является аналог схемы Кранка–Николсон.

Пример 3. Рассмотрим тестовое уравнение с распределенным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \int_{t-\frac{1}{2}}^t u(x, s) ds + e^x \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right) \cos \pi t \quad (6.3)$$

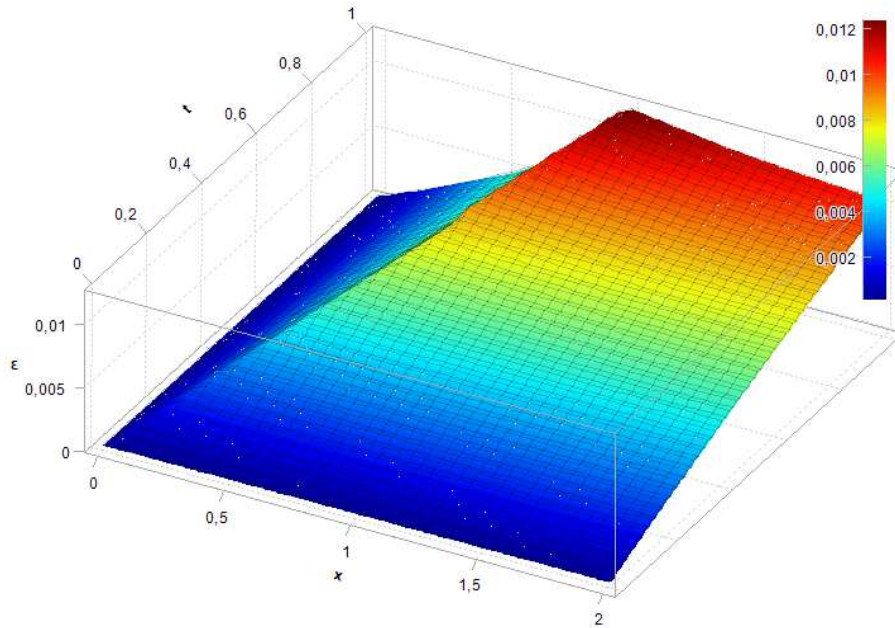


Рис. 3. Абсолютная погрешность решения уравнения (6.2) при помощи схемы аппроксимации на середину квадрата при количестве шагов по $x = 80$, по $t = 20$

при $x \in [0, 2]$, $t \in [0, 1]$, $a = \frac{1}{\pi}$, с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, t) = e^x, \quad x \in [0, 2], \quad t \in [-\frac{1}{2}, 0], \quad u(0, t) = \sin \pi t, \quad t \in [0, 1].$$

Данное уравнение имеет точное решение: $u(x, t) = e^x \sin \pi t$. На рисунках 4 и 5 можно увидеть абсолютную погрешность решения уравнения разных схем при одинаковых шагах по t и x .

Таблица 3. Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (6.3) при разных шагах для методов: 1) схема бегущего счета; 2) аналог схемы Кранка–Николсон; 3) схема аппроксимации на середину квадрата

$h =$	0.05	0.025	0.05	0.05	0.025	0.0125	0.00313
$\Delta =$	0.05	0.05	0.025	0.0125	0.0125	0.00625	0.00625
1)	1.04634	1.0883	0.50738	0.23664	0.25963	0.13130	0.13925
2)	0.03591	0.02285	0.03375	0.03416	0.01754	0.00896	0.00224
3)	1.07102	$7.53 \cdot 10^{45}$	0.55123	0.32692	0.28426	0.14434	∞

По данному примеру можно сделать те же выводы, что и по предыдущему примеру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu J. Theory and application of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
4. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. М.: Бином, 2006. 524 с.
5. Камонт Э., Черноус В. Неявные разностные методы для функциональных дифференциальных уравнений Гамильтона–Якоби // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 1. С. 57–70.

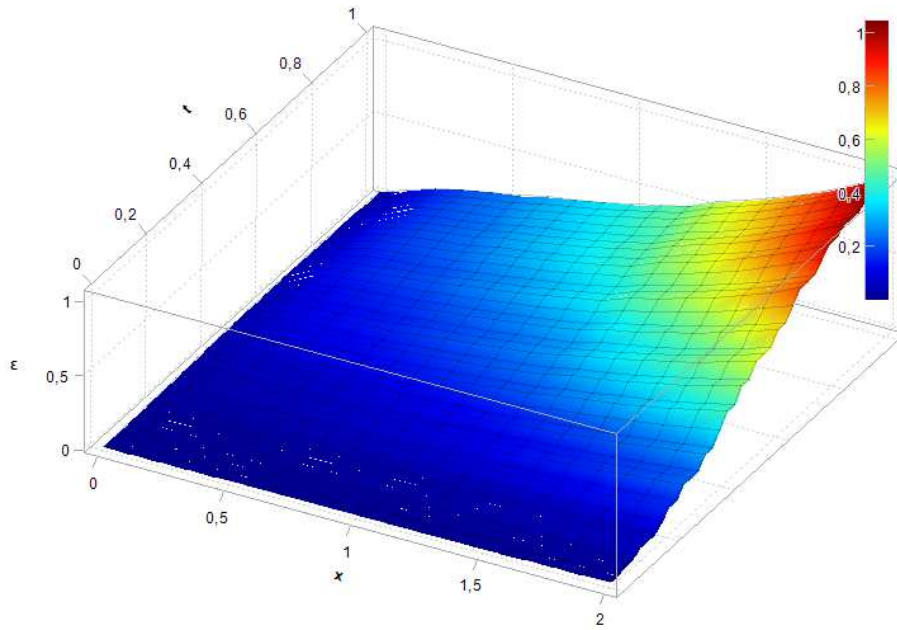


Рис. 4. Абсолютная погрешность решения уравнения (6.3) (количество шагов по x — 40, по t — 10) при помощи метода бегущего счета

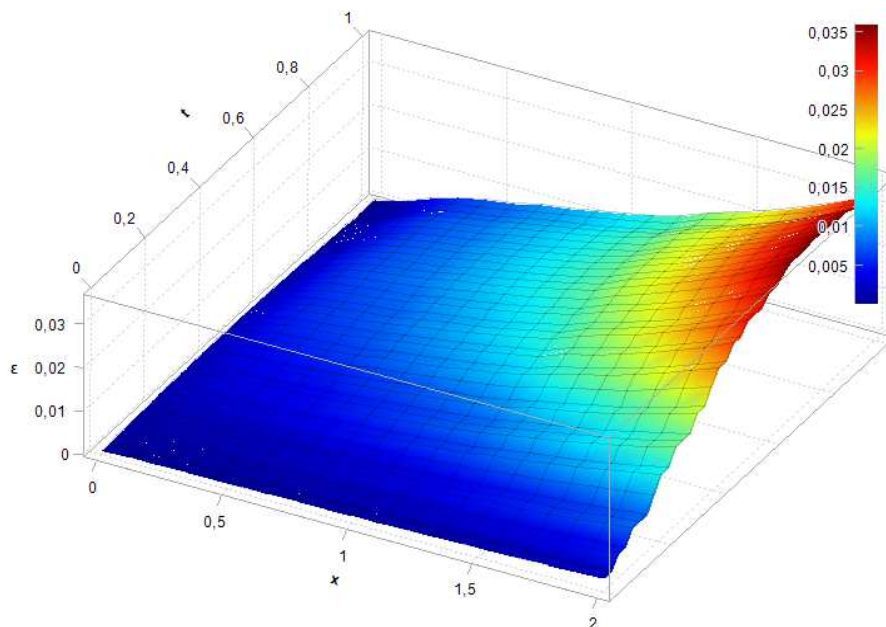


Рис. 5. Абсолютная погрешность решения уравнения (6.3) (количество шагов по x — 40, по t — 10) при помощи аналога схемы Кранка–Николсон

6. Волканин Л.С. Численное решение уравнения переноса с эффектом наследственности // Теория управления и математическое моделирование: тез. докл. Всероссийской конференции. ИжГТУ. Ижевск, 2012. С. 12–13.
7. Волканин Л.С., Пименов В.Г. Сеточные схемы для решения уравнения переноса с запаздыванием // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: тез. докл. VI Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова. Абрау-Дюрсо, 2012. С. 22–23.
8. Солодушкин С.И. Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последствием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 10. С. 77–82.
9. Ким А.В., Пименов В.Г. i -гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
10. Пименов В.Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 105–114.
11. Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 178–189.

Поступила в редакцию 03.06.2014

Пименов Владимир Германович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра вычислительной математики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Свиридов Сергей Владимирович, аспирант, кафедра вычислительной математики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: sergey.sviridov@urfu.ru

V. G. Pimenov, S. V. Sviridov

Grid methods of solving advection equations with delay

Keywords: advection equation, delay, grid schemes, interpolation, extrapolation, stability, convergence order.

MSC: 65M12

We consider a first-order partial differential equation with heredity effect

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}.$$

For such an equation we construct grid methods using the principle of separation of finite-dimensional and infinite-dimensional state components. These grid methods are: analog of running schemes family, analog of Crank–Nicolson scheme, an approximation method to the middle of the square. The one-dimensional and double piecewise linear interpolation and the extrapolation by continuation are applied in order to account the effect of heredity. It is shown that the considered methods have orders of a local error: $O(h + \Delta)$, $O(h + \Delta^2)$ and $O(h^2 + \Delta^2)$ respectively, where h is the spatial discretization interval, Δ is the time discretization interval. Properties of double piecewise linear interpolation are investigated. Using the results of the general theory of differential schemes, stability conditions of the proposed methods are established. Including them in the general scheme of numerical methods for the functional-differential equations, theorems of orders of proposed algorithms convergence are received. Test examples comparing errors of methods are given.

REFERENCES

1. Wu J. *Theory and application of partial functional differential equations*, New York: Springer-Verlag, 1996, 438 p.
2. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of difference schemes), Moscow: Nauka, 1989, 656 p.
3. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* (Numerical methods), St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2011, 586 p.

4. Petrov I.B., Lobanov A.I. *Lektsii po vychislitel'noi matematike* (Lectures on calculus mathematics), Moscow: Binom, 2006, 524 p.
5. Kamont Z., Czernous W. Implicit difference methods for Hamilton-Jacobi functional differential equations, *Numerical Analysis and Applications*, 2009, vol. 2, no. 1, pp. 46–57.
6. Volkanin L.S. Numerical solution of advection equations with delay, *Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie: tez. dokl. Vserossiiskoi konferentsii* (Theory of control and mathematical modeling: abstracts of All-Russian conference), Izhevsk Technical State University, Izhevsk, 2012, pp. 12–13 (in Russian).
7. Volkanin L.S., Pimenov V.G. Grid schemes for the solution of the equation of advection with delay, *Aktual'nye problemy prikladnoi matematiki i mekhaniki: tez. dokl. VI Vserossiiskoi konferentsii* (Actual problems of applied mathematics and mechanics: abstracts of VI All-Russian conference dedicated to memory of the academician A.F.Sidorov), Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Abrau-Durso, 2012, pp. 22–23 (in Russian).
8. Solodushkin S.I. A difference scheme for the numerical solution of an advection equation with aftereffect, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 65–70.
9. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (i-smooth calculus and numerical methods for functional differential equations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2004, 256 p.
10. Pimenov V.G. General linear methods for the numerical solution of functional-differential equations, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 116–127.
11. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 178–189 (in Russian).

Received 03.06.2014

Pimenov Vladimir Germanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Computational Mathematics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Sviridov Sergei Vladimirovich, post-graduate student, Department of Computational Mathematics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: sergey.sviridov@urfu.ru