УДК 517.977

© *А. В. Метельский, В. Е. Хартовский, О. И. Урбан*

УСПОКОЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПОСРЕДСТВОМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В работе изучена следующая задача: для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с запаздыванием в состоянии требуется обеспечить ее полное успокоение с помощью обратной связью. Для решения указанной задачи предложен линейный автономный динамический дифференциально-разностный регулятор типа обратной связи по состоянию, не выводящий замкнутую систему из исходного класса линейных автономных систем нейтрального типа. Достаточное условие существования такого регулятора совпадает с критерием полной управляемости. Кроме того, замкнутая система будет иметь конечный спектр, что существенно упрощает задачу вычисления текущего состояния в ходе технической реализации регулятора. Основная идея исследования заключается в выборе параметров регулятора так, чтобы замкнутая система стала точечно вырожденной в направлениях, отвечающих фазовым компонентам исходной (разомкнутой) системы. Для этого на начальном этапе исходная система обратной связью приводится к системе запаздывающего типа с одним входом. Далее для полученного объекта строится динамический регулятор, обеспечивающий вырождение соответствующих фазовых компонент.

Предложенная процедура построения управляющего воздействия базируется на алгебраических свойствах оператора сдвига и не предполагает вычисления корней характеристического квазиполинома исходной системы. Возможно ее использование для обеспечения замкнутой системе не только полного успокоения, но и экспоненциальной устойчивости. Однако в последнем случае возникает необходимость использовать динамические регуляторы с обратной связью по состоянию интегрального типа.

Ключевые слова: дифференциально-разностная система, нейтральный тип, полная управляемость, регулятор, обратная связь, точечная вырожденность.

Введение

Одним из важнейших требований, предъявляемых к реальным системам управления, является обеспечение им наперед заданных свойств. Это приводит к необходимости исследования задач стабилизации [1–4], модальной управляемости [5–7], спектральной приводимости [8, 9], полной управляемости обратной связью [10–13].

Проблема полной управляемости (полного успокоения) впервые была поставлена Н.Н. Красовским [14] для систем запаздывающего типа, а затем исследовалась многими авторами [10–19] (исторические сведения и современное состояние этой проблемы обсуждаются в [10–12, 15], поэтому здесь не приводятся). С позиции теории автоматического регулирования наибольший интерес в решении задачи полной управляемости представляет возможность успокоения системы обратной связью. В этом отношении стоит отметить работы [10–13], в которых построен регулятор типа обратной связи по состоянию, обеспечивающий не только полное успокоение, но и асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Основная идея [10] заключается в выборе параметров дифференциально-разностного регулятора так, чтобы замкнутая система стала точечно вырожденной в направлениях, отвечающих фазовым компонентам исходной (разомкнутой) системы [20]. При этом достаточным условием существования такого регулятора в случае дифференциально-разностных систем с одним входом является условие полной управляемости [19]. В работах [11, 12] эта идея распространяется на интегральный тип регулятора для дифференциально-разностных систем с одним входом, позволяющим, помимо полного успокоения, обеспечить еще и асимптотическую устойчивость замкнутой системы. В [13] идея [10] переносится на случай алгебро-дифференциальных регулярных многовходных систем с запаздыванием в управлении, при этом отличительной чертой работы является отсутствие у исследуемой системы свойства полной управляемости.

В настоящей статье дано дальнейшее развитие идей [10–13] на случай многовходных систем нейтрального типа с многими запаздываниями. Показано, что в случае наличия у таких систем свойства полной управляемости [15, 17, 18] их всегда можно успокоить за счет выбора линейной обратной связи по состоянию. Для этого разработан линейный автономный динамический дифференциально-разностный регулятор с обратной связью по состоянию, который, во-первых, не выводит замкнутую систему из исходного класса линейных автономных систем нейтрального типа с многими запаздываниями и, во-вторых, обеспечивает замкнутой системе конечный спектр. Последнее является актуальным при построении процедуры вычисления текущего состояния [15, 18] и обеспечения замкнутой системе экспоненциальной устойчивости (в случае конечного спектра асимптотически устойчивая система нейтрального типа будет экспоненциально устойчивой).

§ 1. Постановка задачи

Предположим, что объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа:

$$\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{m}D_i\dot{x}(t-ih)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-ih)+Bu(t),\quad t>0, \tag{1.1}$$

с начальным состоянием $x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0]$, где $x\in\mathbb{R}^n$ — решение уравнения (1.1), $u\in\in\mathbb{R}^r$ — кусочно-непрерывное управляющее воздействие (управление) $\big(\mathbb{R}^{k\times s}$ — действительное пространство постоянных матриц размера $k\times s$, $\mathbb{R}^{k\times 1}=\mathbb{R}^k\big)$, $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $i=\overline{0,m}$; $D_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $i=\overline{1,m}$; $B\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $h>0$ — постоянное запаздывание.

Начальное состояние η будем считать абсолютно непрерывной на отрезке $[-mh,0]$ вектор-функцией со значениями в $\mathbb{R}^n$. Тогда [21] при любом управлении $u(t)$, $t>0$, существует единственная абсолютно непрерывная функция $\big($решение системы (1.1)$\big)$ $x(t)$, $t\geqslant -mh$, удовлетворяющая (1.1) почти всюду.

Определим полиномиальные матрицы $D(z)=\sum\limits_{i=1}^{m}D_iz^i$, $A(z)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_iz^i$. Систему (1.1) можно записать в следующем операторном виде:

$$\big(E_n-D(z)\big)\dot{x}(t)=A(z)x(t)+Bu(t),\quad t>0,$$

где z — оператор сдвига $\big($то есть $zf(t)=f(t-h)\big)$, $E_k\in\mathbb{R}^{k\times k}$ — единичная матрица. Далее для удобства изложения будем придерживаться операторной формы записи.

Определение 1. Систему (1.1) называют *полностью управляемой*, если для любого начального состояния η существуют момент времени $t_1>0$ и управление $u(t)$, $t\in[0,t_1]$, $u(t)\equiv 0$, $t>t_1$, такие, что

$$x(t)\equiv 0,\quad t\geqslant t_1. \tag{1.2}$$

Известен [15, 18] критерий полной управляемости системы (1.1).

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1.1) *была полностью управляемой, необходимо и достаточно одновременного выполнения двух условий:*

$$\operatorname{rank}\big[\lambda\big(E_n-D(e^{-\lambda h})\big)-A(e^{-\lambda h}),B\big]=n\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{rank}\Big[\lambda^mE_n-\sum_{i=1}^{m}\lambda^{m-i}D_i,B\Big]=n\quad\forall\lambda\in\mathbb{C},\quad\lambda\neq 0, \tag{1.4}$$

где $\mathbb{C}$ *— множество комплексных чисел.*

Перейдем к формулировке задачи настоящего исследования. Пусть для системы (1.1) выполняются условия (1.3), (1.4). Требуется обратной связью по состоянию обеспечить решению системы (1.1) тождество (1.2).

Для решения поставленной задачи будем строить линейный дифференциально-разностный регулятор вида

$$u(t) = T^1(z)\dot{x}(t) + T^2(z)x(t) + e_k x_{n+1}(t), \tag{1.5}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_{11}(z)x(t) + F_{12}(z)x_{n+1}(t) + F_{13}(z)y(t), \tag{1.6}$$

$$\dot{y}(t) = F_{21}(z)x(t) + F_{22}(z)x_{n+1}(t) + F_{23}(z)y(t), \quad t > 0, \tag{1.7}$$

где $T^i \in \mathbb{R}^{r\times n}[z]$, $i = 1,2$, $T^1(0) = 0$, $e_k = \mathrm{col}[0,\ldots,1,\ldots,0] \in \mathbb{R}^{\mathrm{r}}$ (единица стоит на k-ом месте),

$$F_{11}(z) \in \mathbb{R}^{1\times n}[z], \quad F_{12}(z) \in \mathbb{R}^{1\times 1}[z], \quad F_{13}(z) \in \mathbb{R}^{1\times s}[z],$$

$$F_{21}(z) \in \mathbb{R}^{s\times n}[z], \quad F_{22}(z) \in \mathbb{R}^{s\times 1}[z], \quad F_{23}(z) \in \mathbb{R}^{s\times s}[z],$$

$\big(\mathbb{R}^{m\times n}[z]$ — множество полиномиальных матриц размера $m \times n\big)$; $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $y = \mathrm{col}\,[y_1,\ldots,y_s] \in \mathbb{R}^s$ — дополнительные переменные, s — некоторое натуральное число. Будем считать в (1.5)–(1.7) функции $x(t)$, $t < -mh$, $x_{n+1}(t)$, $y(t)$, $t < 0$, произвольными абсолютно непрерывными. Регулятор (1.5)–(1.7), обеспечивающий системе (1.1) выполнение тождества (1.2), назовем регулятором полного успокоения.

Система (1.1), замкнутая регулятором (1.5)–(1.7), в силу равенства $T^1(0) = 0$ является линейной автономной однородной дифференциальной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями и имеет вид

$$\begin{bmatrix} \big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big] & 0_{n\times 1} & 0_{n\times s} \\ 0_{1\times n} & 1 & 0_{1\times s} \\ 0_{s\times n} & 0_{s\times 1} & E_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} A(z) + BT^2(z) & Be_k & 0_{n\times s} \\ F_{11}(z) & F_{12}(z) & F_{13}(z) \\ F_{21}(z) & F_{22}(z) & F_{23}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

где $0_{k\times s} \in \mathbb{R}^{k\times s}$ — нулевая матрица.

В следующих §§ 2, 3 приведем процедуру построения матриц, образующих регулятор (1.5)–(1.7), а затем (§ 4) обоснуем то, что построенный регулятор обеспечивает системе (1.1) выполнение тождества (1.2).

§ 2. Построение матрицы $T^1(z)$

Выберем матрицу $T^1(z)$ так, чтобы замкнутая система (1.8) имела характеристический квазиполином запаздывающего типа при любых матрицах $T^2(z)$, $F_{ij}(z)$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,3}$. Это будет выполняться, если $\det \begin{bmatrix} \big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big] & 0_{n\times 1} & 0_{n\times s} \\ 0_{1\times n} & 1 & 0_{1\times s} \\ 0_{s\times n} & 0_{s\times 1} & E_s \end{bmatrix} \equiv 1.$

Лемма 1. *Пусть выполняется условие* (1.4). *Тогда существует матрица* $T^1(z)$, $T^1(0) = 0$, *такая, что*

$$\det\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big] \equiv 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Определим матрицы

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \ldots & D_{m-1} & D_m \\ E_n & \ldots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{n\times n} & \ldots & E_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n\times r} \\ \ldots \\ 0_{n\times r} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Вначале покажем, что существует полиномиальная матрица $\widetilde{T}(z)$, $\widetilde{T}(0)=0$, такая, что имеет место тождество

$$\det\big[E_{nm}-\big(\widetilde{D}z+\widetilde{B}\widetilde{T}(z)\big)\big]\equiv 1. \tag{2.3}$$

Для этого, прежде всего, заметим, что из (1.4) следует равенство

$$\operatorname{rank}\big[E_{nm}-\widetilde{D}z,\widetilde{B}\big]\equiv nm \quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Докажем условие (2.4). Действительно, предположим противное: при некотором $z_0\in\mathbb{C}$ ($z_0\neq 0$) $\operatorname{rank}\big[E_{nm}-\widetilde{D}z_0,\widetilde{B}\big]<nm$. Тогда найдется вектор $q=\operatorname{col}[q_1,\ldots,q_m]$, $q_i\in\mathbb{R}^n$, $q\neq 0$, такой, что выполняются соотношения

$$q'\big[E_{nm}-\widetilde{D}z_0\big]=0, \qquad q'\widetilde{B}=0. \tag{2.5}$$

Здесь и далее символ «$'$» (штрих) обозначает операцию транспонирования. В силу первого соотношения в (2.5) имеем

$$q'\big[E_{nm}-\widetilde{D}z_0\big]\operatorname{col}[E_n,E_nz_0,\ldots,E_nz_0^{m-1}]=q'\operatorname{col}[E_n-D(z_0),0_{n\times n},\ldots,0_{n\times n}]=q_1'\big[E_n-D(z_0)\big]=0.$$

Из второго равенства в (2.5) следует, что $q_1{}'B=0$. Значит, условие (1.4) нарушается при $\lambda=1/z_0$. Получили противоречие.

Определим матрицу $\widetilde{D}_{\widetilde{B}}=\big[\widetilde{B},\widetilde{D}\widetilde{B},\ldots,\widetilde{D}^{n-1}\widetilde{B}\big]$. Условие (2.4) равносильно условию

$$\operatorname{rank}\widetilde{D}_{\widetilde{B}}=\operatorname{rank}\big[\widetilde{D}_{\widetilde{B}},\widetilde{D}^n\big]. \tag{2.6}$$

Пусть $\operatorname{rank}\widetilde{D}_{\widetilde{B}}=\rho$. Построим матрицу Q, $\det Q\neq 0$, такую, что $Q^{-1}\widetilde{D}Q=\begin{bmatrix}\widetilde{D}_1 & \widetilde{D}_2\\ 0 & N\end{bmatrix}$, $Q^{-1}\widetilde{B}=\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1\\ 0\end{bmatrix}$, где $\widetilde{D}_1\in\mathbb{R}^{\rho\times\rho}$, $\widetilde{B}_1\in\mathbb{R}^{\rho\times r}$, размеры блоков $\widetilde{D}_2$, N очевидны. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\operatorname{rank}\big[\widetilde{B}_1,\widetilde{D}_1\widetilde{B}_1,\ldots,\widetilde{D}_1^{\rho-1}\widetilde{B}_1\big]=\rho. \tag{2.7}$$

Заметим, что в силу (2.6) блок N будет нильпотентный, следовательно, $\det\big[E_{nm-\rho}-Nz\big]\equiv 1$. Из равенства (2.7) следует, что существует матрица $\widehat{T}_1\in\mathbb{R}^{r\times\rho}$ такая, что

$$\det\big[E_\rho-\big(\widetilde{D}_1z+\widetilde{B}_1\widehat{T}_1z\big)\big]\equiv 1.$$

Для ее построения достаточно привести матрицу $\widetilde{D}_1$ к блочно-треугольному виду с диагональными блоками в форме Фробениуса. Положим $\widetilde{T}(z)=\big[\widehat{T}_1,\widehat{T}_2\big]zQ^{-1}$, где $\widehat{T}_2$ — любая матрица подходящего размера. Тогда

$$\det\big[E_{nm}-\big(\widetilde{D}z+\widetilde{B}\widetilde{T}(z)\big)\big]=\det\big[E_{nm}-\big(Q^{-1}\widetilde{D}Qz+Q^{-1}\widetilde{B}\widetilde{T}(z)Q\big)\big]=$$
$$=\det\big[E_\rho-\big(\widetilde{D}_1+\widetilde{B}_1\widehat{T}_1\big)z\big]\det\big[E_{nm-\rho}-Nz\big]\equiv 1.$$

Пусть $\widetilde{T}(z)=\big[\widetilde{T}_1,\ldots,\widetilde{T}_m\big]z$, где блоки $\widetilde{T}_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $i=\overline{1,m}$. Положим $T^1(z)=\sum\limits_{i=1}^{m}\widetilde{T}_iz^i$. Покажем, что матрица $T^1(z)$ обеспечивает (2.1). Действительно, выполняя элементарные преобразования над строками, имеем следующую цепочку равенств:

$$1\equiv\det\big[E_{nm}-\big(\widetilde{D}z+\widetilde{B}\widetilde{T}(z)\big)\big]=$$

$$=\det\begin{bmatrix} E_n-\big(D_1+B\widetilde{T}_1\big)z & -\big(D_2+B\widetilde{T}_2\big)z & \ldots & -\big(D_m+B\widetilde{T}_m\big)z\\ -E_nz & E_n & \ldots & 0_{n\times n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \ldots & E_n\end{bmatrix}=$$

$$= \det \begin{bmatrix} E_n - \sum\limits_{i=1}^{m} \big(D_i + B\widetilde{T}_i\big) z^i & -\sum\limits_{i=2}^{m} \big(D_i + B\widetilde{T}_i\big) z^{i-1} & \ldots & -\big(D_m + B\widetilde{T}_m\big) z \\ 0_{n\times n} & E_n & \ldots & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \ldots & E_n \end{bmatrix} =$$

$$= \det \big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big].$$

Лемма доказана. □

В соотношении (1.5) выберем матрицу $T^1(z)$ так, чтобы имело место (2.1).

§ 3. Построение матриц $T_2(z)$, $F_{ij}(z)$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 3}$

Пусть $\Gamma(z)$ — матрица, присоединенная к матрице $\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big]$, где матрица $T^1(z)$ удовлетворяет (2.1). Тогда

$$\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big]\Gamma(z) = \Gamma(z)\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big] = E_n.$$

Обозначим $\Pi_A(z) = A(z)\Gamma(z)$. Простая проверка показывает, что из (1.3) и (2.1) следует равенство

$$\operatorname{rank}\big[\lambda E_n - \Pi_A\big(e^{-\lambda h}\big), B\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

которое, в свою очередь, влечет равенство

$$\operatorname{rank}\big[B, \Pi_A(z)B, \ldots, \Pi_A^{n-1}(z)B\big] = n \tag{3.2}$$

(здесь и далее под рангом полиномиальной матрицы понимаем [22, с. 143] наибольший порядок неравного тождественному нулю ее минора). Выберем любые p ($p \leqslant r$) столбцов матрицы $B = [b_1, \ldots, b_r]$ так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\big[b_{s_1}, \ldots, \Pi_A^{n_1-1}(z)b_{s_1}\big] = n_1, \\
&\operatorname{rank}\big[b_{s_1}, \ldots, \Pi_A^{n_1-1}(z)b_{s_1}, \Pi_A^{n_1}(z)b_{s_1}\big] = n_1, \\
&\operatorname{rank}\big[b_{s_1}, \ldots, \Pi_A^{n_1-1}(z)b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, \Pi_A^{n_2-1}(z)b_{s_2}\big] = n_1 + n_2, \\
&\operatorname{rank}\big[b_{s_1}, \ldots, \Pi_A^{n_1-1}(z)b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, \Pi_A^{n_2-1}(z)b_{s_2}, \Pi_A^{n_2}(z)b_{s_2}\big] = n_1 + n_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\operatorname{rank}\big[b_{s_1}, \ldots, \Pi_A^{n_1-1}(z)b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, \Pi_A^{n_2-1}(z)b_{s_2}, \ldots, b_{s_p}, \ldots, \Pi_A^{n_p-1}(z)b_{s_p}\big] = n_1 + \ldots + n_p = n.
\end{aligned}$$

В (1.5) полагаем $k = s_1$, то есть в качестве вектора e_k берем вектор e_{s_1}.

Обозначим $\widetilde{\Pi}_A(z) = \big[b_{s_1}, \ldots, \Pi_A^{n_1-1}(z)b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, \Pi_A^{n_2-1}(z)b_{s_2}, \ldots, b_{s_p}, \ldots, \Pi_A^{n_p-1}(z)b_{s_p}\big]$. Учитывая, что $\operatorname{rank}\widetilde{\Pi}_A(z) = n$, построим [22, с. 139] квадратную полиномиальную матрицу $G(z)$, $\det G(z) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, такую, что матрица $G(z)\widetilde{\Pi}_A(z)$ будет иметь следующую структуру:

$$G(z)\widetilde{\Pi}_A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & * & \ldots & * \\ * & * & \ldots & * \end{bmatrix},$$

где символом «$*$» обозначены некоторые полиномы, причем полиномы, стоящие на побочной диагонали, отличны от тождественного нуля. Заметим, что умножение матрицы $\widetilde{\Pi}_A(z)$ слева на матрицу $G(z)$ равносильно элементарным преобразованиям ее строк. Положим $\overline{A}(z) = G(z)\Pi_A(z)G^{-1}(z)$, $\overline{B}(z) = G(z)B$. Далее для простоты считаем, что в матрице $\widetilde{\Pi}_A(z)$ номер $s_1 = 1$. Тогда можно считать, что первый столбец матрицы $\overline{B}(z)$ будет иметь вид $\overline{b}_1 = \operatorname{col}\big[0, \ldots, 0, \overline{b}\big]$, где $\overline{b}$ — некоторое число.

Поскольку имеет место (3.1), то $\operatorname{rank}\big[\lambda E_n - \overline{A}\big(e^{-\lambda h}\big), \overline{B}\big(e^{-\lambda h}\big)\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. В силу последнего условия можно построить [23] полиномиальную матрицу $\overline{T}^2(z)$ такую, что

$$\operatorname{rank}\big[\lambda E_n - L\big(e^{-\lambda h}\big), \overline{b}_1\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

где матрица $L(z) = \overline{A}(z) + \overline{B}(z)\overline{T}^2(z)$.

Введем вспомогательную линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями и одним входом:

$$\dot{\overline{x}}(t) = L(z)\overline{x}(t) + \overline{b}_1\overline{x}_{n+1}(t), \tag{3.4}$$

$$\dot{\overline{x}}_{n+1}(t) = v(t), \quad t > 0, \tag{3.5}$$

где $\overline{x} = \operatorname{col}\big[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\big] \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_{n+1} \in \mathbb{R}$ — решение системы (3.4)–(3.5), $v(t)$, $t > 0$, — скалярное кусочно-непрерывное управляющее воздействие. Из (3.3) следует, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda E_n - L\big(e^{-\lambda h}\big) & -\overline{b}_1 & 0_n \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} = n + 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

где $0_n = \operatorname{col}\big[0, \ldots, 0\big] \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, система (3.4)–(3.5) является полностью управляемой [19]. В работах [10–12] показано, что линейную автономную дифференциально-разностную систему с одним входом при наличии свойства полной управляемости всегда можно замкнуть линейной обратной связью, обеспечивающей ее точечную вырожденность в направлениях, отвечающих фазовым компонентам разомкнутой системы. Используя методику работы [10], систему (3.4)–(3.5) замкнем регулятором

$$v(t) = \overline{F}_{11}(z)\overline{x}(t) + F_{12}(z)\overline{x}_{n+1}(t) + F_{13}(z)\overline{y}(t), \tag{3.6}$$

$$\dot{\overline{y}}(t) = \overline{F}_{21}(z)\overline{x}(t) + F_{22}(z)\overline{x}_{n+1}(t) + F_{23}(z)\overline{y}(t), \quad t > 0, \tag{3.7}$$

где $\overline{x}_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\overline{y} = \operatorname{col}\big[\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_s\big] \in \mathbb{R}^s$ — вспомогательные переменные, s — некоторое натуральное число,

$$\overline{F}_{11}(z) \in \mathbb{R}^{1\times n}[z], \quad F_{12}(z) \in \mathbb{R}^{1\times 1}[z], \quad F_{13}(z) \in \mathbb{R}^{1\times s}[z],$$

$$\overline{F}_{21}(z) \in \mathbb{R}^{s\times n}[z], \quad F_{22}(z) \in \mathbb{R}^{s\times 1}[z], \quad F_{23}(z) \in \mathbb{R}^{s\times s}[z].$$

Замкнутая система (3.4)–(3.7) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}(t) \\ \dot{\overline{x}}_{n+1}(t) \\ \dot{\overline{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(z) & \overline{b}_1(z) & 0_{n\times s} \\ \overline{F}_{11}(z) & F_{12}(z) & F_{13}(z) \\ \overline{F}_{21}(z) & F_{22}(z) & F_{23}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{x}_{n+1}(t) \\ \overline{y}(t) \end{bmatrix}, \quad t > 0. \tag{3.8}$$

Матрицы регулятора (3.6)–(3.7) выберем так, чтобы замкнутая система (3.8) стала точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым $n+1$ компонентам ее решения, то есть компонентам $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n+1}$. Тогда найдется момент времени $\widehat{t}_1 > 0$ такой, что каково бы ни было начальное состояние $\overline{x}(t), \overline{x}_{n+1}(t), \overline{y}(t), t \leqslant 0$ системы (3.8), будут выполняться тождества

$$\overline{x}_i(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \widehat{t}_1, \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{3.9}$$

Замечание 1. Система (3.8) называется точечно вырожденной [20, 21] в момент времени $t_1 > 0$, если существует ненулевой вектор $g \in \mathbb{R}^{n+s+1}$ такой, что $g'\operatorname{col}\big[\overline{x}(t_1), \overline{x}_{n+1}(t_1), \overline{y}(t_1)\big] = 0$ для всех начальных состояний системы (3.4)–(3.7). Вектор g называют вектором (направлением) вырождения системы (3.4)–(3.7). Известно [20], что если система является точечно вырожденной в момент времени $t_1 > 0$ в направлении вектора g, то она точечно вырождена в этом направлении при всех $t > t_1$.

Вернемся к регулятору (1.5)–(1.7). В соотношениях (1.5)–(1.7) полагаем

$$\begin{aligned} T^2(z) &= \overline{T}^2(z)G(z)\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big], \\ F_{11}(z) &= \overline{F}_{11}(z)G(z)\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big], \\ F_{21}(z) &= \overline{F}_{21}(z)G(z)\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big], \end{aligned} \tag{3.10}$$

остальные матрицы F_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 2, 3$, в (1.6), (1.7) те же, что и в (3.6), (3.7). Регулятор полного успокоения (1.5)–(1.7) построен.

§ 4. Обоснование тождества (1.2) для построенного регулятора (1.5)–(1.7)

Следующее утверждение обосновывает то, что построенный выше регулятор (1.5)–(1.7) обеспечивает решению системы (1.1) тождество (1.2).

Теорема 2. *Система* (1.8) *является точечно вырожденной в направлениях*

$$g^i = \mathrm{col}\,\big[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\big] \in \mathbb{R}^{n+s+1}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

(*в векторах* g^i *единица стоит на* i*-м месте*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Систему (3.4)–(3.5), замкнутую регулятором (3.6)–(3.7), запишем в виде

$$\dot{\overline{X}}(t) = \widehat{A}(z)\overline{X}(t), \quad t > 0, \tag{4.1}$$

где $\overline{X}(t) = \mathrm{col}\,\big[\overline{x}(t), \overline{x}_{n+1}(t), \overline{y}(t)\big]$,

$$\widehat{A}(z) = \begin{bmatrix} G(z)\Pi_A(z)G^{-1}(z) + G(z)B\overline{T}^2(z) & G(z)Be_1 & 0_{n\times s} \\ \overline{F}_{11}(z) & F_{12}(z) & F_{13}(z) \\ \overline{F}_{21}(z) & F_{22}(z) & F_{23}(z) \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\overline{G}(z) = \mathrm{diag}\,\big[G(z), 1, E_s\big]$. В (4.1) сделаем замену $\overline{X}(t) = \overline{G}(z)\widetilde{X}(t)$, в итоге получим линейную дифференциально-разностную систему

$$\dot{\widetilde{X}}(t) = \widetilde{A}(z)\widetilde{X}(t), \quad t > 0, \tag{4.2}$$

где $\widetilde{A}(z) = \overline{G}^{-1}(z)\widehat{A}(z)\overline{G}(z)$. Обратим внимание, что первые $n+1$ компонент вектора $\widetilde{X}(t)$ при $t \geqslant \widehat{t}_1$ тождественно равны нулю. Положив

$$\mathrm{col}\,\big[x(t), x_{n+1}(t), y(t)\big] = \widetilde{X}(t)\Big(\mathrm{diag}\,\Big[\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big], 1, E_s\Big]\Big)^{-1},$$

получим систему (1.8), первые n компонент которой удовлетворяют тождеству

$$\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big]x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \widehat{t}_1. \tag{4.3}$$

Докажем, что из (4.3) следует (1.2). Ранее (§ 2) было показано, что можно построить полиномиальную матрицу $T^1(z)$, $T^1(0) \equiv 0$, такую, что степени полиномов ее компонент не будут превышать числа m. Поэтому ее можно представить в виде $T^1(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} T_i z^i$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $i = \overline{1, m}$ — некоторые полиномиальные матрицы. Обозначим $\widehat{x}(t) = \mathrm{col}\,\big[x(t), \ldots, x\big(t-(m-1)h\big)\big]$,

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} D_1 + BT_1 & D_2 + BT_2 & \ldots & D_{m-1} + BT_{m-1} & D_m + BT_m \\ E_n & 0_{n\times n} & \ldots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \ldots & E_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Разностное уравнение (4.3) перепишем в виде

$$\widehat{x}(t) = \widehat{D}\widehat{x}(t-h), \quad t \geqslant \widehat{t}_1. \tag{4.4}$$

Используя теорему Лапласа для определителей и (2.3), приходим к равенству

$$\det\big[\lambda E_{nm} - \widehat{D}\big] = \lambda^{nm},$$

то есть матрица $\widehat{D}$ является нильпотентной. Обозначим ξ — индекс нильпотентности матрицы $\widehat{D}$ ($\widehat{D}^{\xi} = 0$). Из (4.2) и нильпотентности матрицы $\widehat{D}$ следует, что $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $t \geqslant \widehat{t}_1 + (\xi - 1)h$. Из последнего равенства в силу структуры матрицы $\widehat{D}$ имеем [16] $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, где $t_1 = \widehat{t}_1 + (\xi - m)h$. Теорема доказана. □

Замечание 2. В процессе построения регулятора (3.6)–(3.7) системе (3.8) попутно обеспечивается конечный спектр [10]. В силу условия (2.1) система (1.8) также будет иметь конечный спектр. Поэтому вектор-функция $\operatorname{col}\Big[\big[E_n - \big(D(z) + BT^1(z)\big)\big]x(t), x_{n+1}(t), y(t)\Big]$, $t > 0$, с течением времени сглаживается. Это обстоятельство играет важную роль при построении непрерывной операции восстановления текущего состояния системы (1.8) [15, 18].

§ 5. Обсуждение результатов. Пример

Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями представлена процедура построения линейной обратной связи, обеспечивающей успокоение решения исходной системы. Если к системе (3.4)–(3.5) применить рассуждения работ [11,12] и замкнуть ее интегральным регулятором, то можно, наряду со свойством точечной вырожденности, обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Тогда, в силу (2.1) система (1.1), замкнутая построенным регулятором, также будет асимптотически устойчивой. Кроме того, в силу (2.1) характеристический квазиполином замкнутой системы будет являться полиномом, поэтому из асимптотической устойчивости замкнутой системы будет следовать ее экспоненциальная устойчивость [21, с. 321].

Пример 1. Рассмотрим систему (1.1) с матрицами ($m = 2, n = 3$)

$$D(z) = \begin{bmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 2z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(z) = \begin{bmatrix} 2z^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2. \tag{5.1}$$

Несложно убедиться, что условия полной управляемости (1.3)–(1.4) для данной системы выполнены. Построим регулятор (1.5)–(1.7), обеспечивающий рассматриваемой системе тождество (1.2).

Вначале вычисляем матрицу $T^1(z)$, обеспечивающую равенство (2.2). Для этого воспользуемся доказательством леммы 1. После достаточно простых расчетов получим матрицу $T^1(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Переходим к вычислению матрицы $\overline{T}^2(z)$. Для этого найдем матрицу $\Gamma(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и построим $\Pi_A(z) = \begin{bmatrix} 2z^2 + 2z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2z & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Возьмем $s_1 = 2$, матрицу $G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и найдем матрицу $\overline{T}^2(z) = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z^2 - z \end{bmatrix}$. Теперь выпишем систему (3.4)–(3.5):

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2z \\ 7 & -6 & 0 \end{bmatrix} \overline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \overline{x}_4(t), \\ \dot{\overline{x}}_4(t) &= v(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Данная система является полностью управляемой, поэтому для нее можно построить регулятор полного успокоения (3.6)–(3.7). Система (5.2) имеет два инвариантных спектральных значения $\{1; 5\}$, которые входят в спектр замкнутой системы (1.8) при любых коэффициентах регулятора (1.5)–(1.7). Дополним спектр замкнутой системы (1.8), например, значениями $\{-1; -2; -3\}$. Таким образом, характеристический полином замкнутой системы (1.8) будет таким: $(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$. Согласно методике работы [10] вычисляем полиномиальные матрицы $\overline{F}_{11}(z), \overline{F}_{21}(z), F_{ij}(z)$, $i = 1, 2$, $j = 2, 3$.

На основании (3.10) выписываем регулятор (1.5)–(1.7) для исходной системы (1.1):

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 12z & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -z^2 - z & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4(t), \quad t > 0,$$

$$\dot{x}_4(t) = F_{11}(z)x(t) + F_{12}(z)x_{n+1}(t) + F_{13}(z)y(t), \quad t > 0,$$

$$\dot{y}(t) = F_{21}(z)x(t) + F_{22}(z)x_{n+1}(t) + F_{23}(z)y(t), \quad t > 0,$$

где

$$F_{11}(z) = \Big[\ \frac{149512797824z^5 - 2167301995508z^4 + 9409816785072z^3 - 13709987792023z^2 + 4650922007878z + 28763867520}{408051000},$$
$$-\frac{74756398912z^4 - 1083942718234z^3 + 4709183192721z^2 - 6874042736714z + 2357820444824}{408051000},$$
$$\frac{58562752z^4 - 849305254z^3 + 3691407951z^2 - 5394466934z + 1859855564}{321300}\ \Big],$$

$$F_{12}(z) = \Big[\ \frac{-61826984 + 64528142z - 38150763z^2 + 8411902z^3 - 570304z^4}{5440680}\ \Big],$$

$$F_{13}(z) = \Big[\ \frac{1}{64}(-8 + z)(-4 + z)(-2 + z)(-1 + 2z)(-1 + 32z)\ \Big],$$

$$F_{21}(z) = \Big[\ \frac{1332308541409664z^4 - 19604079012132940z^3 + 88426827964273408z^2 - 147557920273373273z - 13323963031139970}{34688670541875},$$
$$-\frac{666154270704832z^3 - 9804639027263750z^2 + 44252074998080279z - 73957722461043634}{34688670541875},$$
$$\frac{1043705366144z^3 - 15364478718580z^2 + 69374518965778z - 116052801249308}{54627827625}\ \Big],$$

$$F_{22}(z) = \Big[\ \frac{676592859142 - 357698314061z + 76069410914z^2 - 5081978944z^3}{462515607225}\ \Big],$$

$$F_{23}(z) = \Big[\ \frac{29182904 - 64528142z + 38150763z^2 - 8411902z^3 + 570304z^4}{5440680}\ \Big].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Известия академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
3. Миняев С.И., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: построение универсального стабилизатора для линейных объектов с запаздыванием с использованием спектральной проводимости // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1533–1539.
4. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. On strong stability and stabilizability of linear systems of neutral type // Advanced in Time-Delay Systems. 2004. P. 257–268.
5. Марченко В.М. Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017.
6. Павловская А.Т, Хартовский В.Е. Управление линейными системами с запаздыванием нейтрального типа регуляторами с обратной связью динамической структуры // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 3–18.
7. Хартовский В.Е., Павловская А.Т. К проблеме модального управления линейными системами нейтрального типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 146–155.
8. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for system with delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24. № 4. P. 266–269.
9. Watanabe K., Nobuyama E., Kitamori T., Ito M. A new algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with time delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. Vol. 37. № 9. P. 1377–1383.

10. Метельский А.В. Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
11. Метельский А.В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1453.
12. Метельский А.В. Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 3–11.
13. Хартовский В.Е., Урбан О.И. Управление линейными автономными алгебро-дифференциальными системами посредством динамических регуляторов // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. 2014. № 1. С. 36–42.
14. Красовский Н.Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Оптимальные системы. Статистические методы: Труды II Международного конгресса ИФАК. Базель, 1963. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 201–210.
15. Хартовский В.Е., Павловская А.Т. Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–79.
16. Хартовский В.Е. Задача полной управляемости и ее обобщение для линейных автономных систем нейтрального типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 15–28.
17. Метельский А.В., Минюк С.А. Полная управляемость и полная конструктивная идентифицируемость вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 3. С. 303–317.
18. Метельский А.В., Минюк С.А. Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 15–23.
19. Марченко В.М. К управляемости линейных систем с последействием // Доклады АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083–1086.
20. Метельский А.В. Проблема точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. № 2 (296). С. 103–140.
21. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
22. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 576 с.
23. Watanabe K. Finite Spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. № 6. P. 543–550.

Поступила в редакцию 30.06.2014

Метельский Анатолий Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики № 1, Белорусский национальный технический университет, 220013, Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 65, корпус 11а.
E-mail: ametelski@bntu.by

Хартовский Вадим Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Урбан Ольга Ивановна, аспирант, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: urban_ola@mail.ru

A. V. Metel'skii, V. E. Khartovskii, O. I. Urban
Calming the solution of systems of neutral type with many delays using feedback

Keywords: difference-differential system, neutral type, complete controllability, controller, feedback, point degeneration.

MSC: 93B05, 93C15

This paper examines the following problem: a linear autonomous differential-difference system of neutral type with delay in state requires ensuring its complete calming by feedback. To solve this problem linear

autonomous dynamic differential-difference controller with state feedback is proposed; this controller does not exclude a closed system from the original class of linear autonomous systems of neutral type. Sufficient condition for the existence of such a controller coincides with the criterion of complete controllability. In addition, the closed system has a finite spectrum, which simplifies greatly the problem of calculating the current state during the technical implementation of the controller. The basic idea of research is to select parameters for the controller so that the closed system becomes point-degenerated in directions corresponding to phase components of the original (open) system. To do this, the original system is first converted via feedback to the single-input system of retarded type. Further, for the resulting object the dynamic controller that provides the degeneracy of the corresponding phase components is constructed.

The proposed procedure for constructing the control action is based on the algebraic properties of shift operator and does not involve calculating the roots of characteristic quasipolynomial of the original system. It can be used to provide full calming as well as exponential stability to a closed system. However, in the latter case it is necessary to use dynamic controller with state feedback of integral type.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Osipov Yu.S. On the stabilization of motions of a plant with delay in a control system, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1963, no. 6, pp. 3–15 (in Russian).

2. Osipov Yu.S. Stabilization of control systems with delays, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 606–618 (in Russian).

3. Minyaev S.I., Fursov A.S. Simultaneous stabilization: Construction of a universal stabilizer for linear plants with delay with the use of spectral reducibility, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1510–1516.

4. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. On strong stability and stabilizability of linear systems of neutral type, *Advanced in Time-Delay Systems*, 2004, pp. 257–268.

5. Marchenko V.M. Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to the type of feedback, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1014–1028.

6. Pavlovskaya A.T., Khartovskii V.E. Control of neutral delay linear systems using feedback with dynamic structure, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, no. 3, pp. 305–320.

7. Khartovskii V.E., Pavlovskaya A.T. To the problem of modal control for linear systems of neutral type, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 146–155 (in Russian).

8. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 541–553.

9. Watanabe K., Nobuyama E., Kitamori T., Ito M. A new algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with time delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, vol. 37, no. 9, pp. 1377–1383.

10. Metel'skii A.V. Complete damping of a linear autonomous differential-difference system by a controller of the same type, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1219–1235.

11. Metel'skii A.V. Spectral reduction, complete damping, and stabilization of a delay system by a single controller, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1405–1422.

12. Metel'skii A.V. Complete calming and stabilization of delay systems using spectral reduction, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, no. 1, pp. 1–19.

13. Khartovskii V.E., Urban O.I. Control of linear autonomous differential-algebraic systems by dynamic controllers, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Series of Physical-Mathematical Sciences*, 2014, no. 1, pp. 36–42 (in Russian).

14. Krasovskii N.N. Optimal processes in systems with delay, *Optimal systems. Statistical methods: Proceedings of the II International Congress of IFAC*, 1961, vol. 2, pp. 201–210.

15. Khartovskii V.E., Pavlovskaya A.T. Complete controllability and controllability for linear autonomous systems of neutral type, *Automation and Remote Control*, 2013, no. 5, pp. 769–784.

16. Khartovskii V.E. Complete controllability problem and its generalization for linear autonomous systems of neutral type, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, no. 6, pp. 755–769.

17. Metel'skii A.V., Minyuk S.A. Complete controllability and complete constructive identifiability of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 3, pp. 311–327.

18. Metel'skii A.V., Minyuk S.A. A criterion of constructive identifiability and complete controllability of linear stationary systems of neutral type, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2006, no. 5, pp. 690–698.

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 3

19. Marchenko V.M. To controllability of linear systems with aftereffect, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, vol. 236, no. 5, pp. 1083–1086.

20. Metel'skii A.V. The problem of point density in the theory of differential-difference systems control, *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 2, pp. 101–139.

21. Hale J. *Theory of functional differential equations*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1977, 365 p. Translated under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Mir, 1984, 421 p.

22. Gantmacher F.R. *The theory of matrices*, AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 2000, 660 p.

23. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 6, pp. 543–550.

Received 30.06.2014

Metel'skii Anatolii Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics No. 1, Belarusian National Technical University, pr. Nezavisimosti, 65, Minsk, 220013, Belarus.
E-mail: ametelski@bntu.by

Khartovskii Vadim Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Logistics and Methods of Control, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Urban Ol'ga Ivanovna, post-graduate student, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: urban_ola@mail.ru