УДК 510.64

© *А. К. Кощеева*

АКСИОМАТИКА ПОЛНЫХ ПО П. С. НОВИКОВУ РАСШИРЕНИЙ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ $L2$ В ЯЗЫКЕ С ОДНОЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ КОНСТАНТОЙ

Проблема П. С. Новикова для суперинтуиционистской логики L состоит в описании семейства всех максимальных консервативных (то есть *полных по П. С. Новикову*) расширений L в обогащенном дополнительными логическими связками и константами языке. В связи с континуальностью семейства всех суперинтуиционистских логик имеет смысл рассматривать проблему П. С. Новикова применительно к логикам, уже попавшим по тем или иным причинам в поле зрения исследователей.

Известно, что существуют три так называемые *предтабличные* суперинтуиционистские логики (то есть не являющиеся табличными, но такие, что все их собственные расширения уже табличны). Одна из них — логика $L2$ — характеризуется классом корневых упорядоченных множеств глубины 2. Установлено, что для суперинтуиционистской логики $L2$ в языке с единственной дополнительной константой существует ровно пять полных по Новикову расширений; дано их семантическое описание.

В настоящей работе предлагается явная аксиоматика гильбертовского типа для каждого из пяти существующих полных по П. С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики $L2$ в языке с одной дополнительной логической константой.

Ключевые слова: суперинтуиционистская логика $L2$, новая логическая константа, аксиоматика полных по П. С. Новикову расширений.

Введение

Пусть Fm — множество формул языка логики высказываний с пропозициональными переменными $Var = \{p_i \ldots\}$, стандартными связками $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \neg$ и логическими константами 0 (ложь), 1 (истина). Эквиваленция $A \leftrightarrow B$ понимается стандартно как $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Определение 1. *Суперинтуиционистской* (*с.и.*) *логикой* называется произвольное подмножество $L \subsetneq Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику (Int) и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Добавим к пропозициональному языку дополнительную логическую константу φ. Получим множество $Fm(\varphi)$ формул расширенного языка, при этом формулы из Fm назовем *чистыми*. Переменные и константы, участвующие в формуле A, трактуются как ее атомарные подформулы. Пусть $\overline{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ — фиксированный конечный набор переменных. Запись $A(\varphi, \overline{p})$ означает, как обычно, что все атомарные подформулы формулы A принадлежат множеству $\{\varphi, p_1, p_2, \ldots, p_s\}$.

Определение 2. *Подстановкой* [1] на $Fm(\varphi)$ называется отображение $s\colon Fm(\varphi) \to Fm(\varphi)$, удовлетворяющее следующим условиям: $s(A \circ B) = s(A) \circ s(B)$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$; $s(\neg A) = \neg s(A)$, $s(0) = 0$, $s(1) = 1$, $s(\varphi) = \varphi$.

Следуя Д. П. Скворцову [2], назовем *φ-логикой* множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Определение 3. *φ-логика $\mathcal{L}$* называется *консервативным расширением* с.и. логики L, если $L \subseteq \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A : из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

Через $\mathcal{L}+\Gamma$ обозначается, как обычно, наименьшая φ-логика, включающая φ-логику $\mathcal{L}$ и множество формул Γ.

Проблема новой одноместной логической связки в Int была поставлена П. С. Новиковым и впервые сформулирована в статьях Я. С. Сметанича [3,4]. В дальнейшем фамилия «Новиков», будет означать исключительно «П. С. Новиков».

Определение 4. *φ-логика $\mathcal{L}$* называется *полным по Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L}+A$ неконсервативна над L (то есть $\mathcal{L}$ *не допускает присоединения* никакой новой формулы).

Под *проблемой Новикова для с.и. логики L* понимается описание класса всех полных по Новикову расширений L (*пополнений логики L в конкретном расширении языка*).

Известно, что семейство с.и. логик имеет мощность континуума [5], поэтому естественным представляется рассмотрение проблемы Новикова для таких с.и. логик, которые по тем или иным причинам уже находились в поле зрения исследователей. Новые константы в связи с проблемой Новикова для Int изучались в работах А. Д. Яшина [6–9].

Цель данной работы — аксиоматика гильбертовского типа полных по Новикову расширений с.и. логики $L2$ в языке с одной дополнительной константой [1].

Логика $L2$ является одной из трех так называемых предтабличных суперинтуиционистских логик, то есть она не является табличной, но всякое ее собственное расширение таблично. Описание этих логик впервые было дано Л. Л. Максимовой [10]. В работе А. Д. Яшина [11] установлено, что для с.и. логики $L2$ в языке с единственной дополнительной константой существует ровно пять полных по Новикову расширений, и дано их семантическое описание.

Введем необходимые обозначения: $\rightleftharpoons$ — «по определению равносильно»; $:=$ — «по определению равно»; $[1,m]$ — натуральные числа от 1 до m включительно.

§ 1. Предварительные сведения

В этом разделе приводим необходимые сведения из метаматематики с.и. логик (изложение частично опирается на [6]).

Определение 5. *Шкалой* называется пара $(W,\leqslant)$, где W — непустое множество, $\leqslant$ — частичный порядок на нем. Если из контекста ясно, о каком частичном порядке идет речь, то в рассуждениях его будем опускать.

Элементы шкал будем в дальнейшем называть *точками*. При наличии наименьшего элемента он называется *корнем*, а шкала называется *корневой* (или *порожденной*). При $x \leqslant y$ говорят, что точка x видит точку y. Формула $\max_W x$ означает, что x — максимальный элемент частично упорядоченного множества W.

Определение 6. Подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом*, если оно замкнуто относительно увеличения: $x \in X$, $x \leqslant y \Rightarrow y \in X$. Конус вида $W^x = \{y \in W \mid x \leqslant y\}$ называется *конусом с корнем x* (или *конусом, порожденным точкой x*). Если имеет место включение $W' \subseteq W$ и W' — конус, то говорят, что конус W' *порожден* из шкалы W.

На множестве $Con\,W$ конусов шкалы W рассматриваются теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$, а также операции *псевдодополнения* и *относительного псевдодополнения:*

$$-X = \{x \in W \mid W^x \cap X = \varnothing\}, \qquad X \supset Y = \{x \in W \mid X \cap W^x \subseteq Y \cap W^x\}.$$

Структура $(Con\,W, \cap, \cup, \supset, -, \varnothing, W)$ является примером *псевдобулевой алгебры* (*алгебры Гейтинга, п.б.а.*). Псевдобулевы алгебры являются моделями интуиционистской логики высказываний так же, как булевы алгебры — моделями классической логики высказываний (см. [12]).

[1] Результаты изложены в 2012 г. на Международной конференции «Мальцевские чтения», г. Новосибирск.

Оценка переменных v на шкале W определяется как отображение $v\colon Var \to Con\,W$. Шкала W с заданной на ней оценкой v называется *моделью* (W, v), при этом $v(p)$ называется *значением* переменной p в данной модели. По оценке v определяется *отношение вынуждения* между точками шкалы и переменными: $x \Vdash_v p \Leftrightarrow x \in v(p)$ (читается так: в точке x относительно оценки v вынуждается (или истинна) переменная p). Значение произвольной формулы в модели определяется по индукции:

$$v(0) := \varnothing; \quad v(1) := W; \quad v(A \wedge B) := v(A) \cap v(B);$$
$$v(A \vee B) := v(A) \cup v(B); \quad v(A \to B) := v(A) \supset v(B); \quad v(\neg A) := -v(A).$$

Формула A называется *истинной в модели* (W, v), если $v(A) = W$; *общезначимой в шкале* W, если для любой оценки v в шкале W имеем $v(A) = W$. Обозначение $W \models A$.

Логикой L шкалы W называется множество $L(W) \ \rightleftharpoons\ \{A \mid W \models A\}$. *Логикой* класса $\mathbf{M} = \{W_i \mid i \in I\}$ шкал называется множество $L(\mathbf{M})$ формул, общезначимых в каждой шкале этого класса.

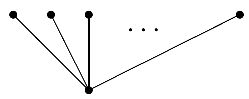
Замечание 1. Первоначально Int была определена в виде дедуктивной системы гильбертовского типа. Классические результаты Крипке о семантической полноте Int в классе так называемых *моделей Крипке* позволяют дать эквивалентное определение интуиционистской логики в терминах шкал: Int — логика класса конечных корневых шкал.

Определение 7. Пусть W — шкала. Точка $x \in W$ *имеет глубину* 1, если $\max_W x$ (обозначение $d(x) = 1$), и *глубину* $k > 1$ (обозначение $d(x) = k$, $k \in \omega \setminus \{0\}$) тогда и только тогда, когда существует цепь $x < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1}$ длины k и не существует цепей с началом в точке x длины $k + 1$ (если длины таких цепей в совокупности неограничены, глубина принимается за ∞). *Глубиной корневой шкалы* будем называть глубину ее корня.

Далее приведем необходимые сведения о логике $L2$, отмеченной во введении.

Определение 8. *Веером* будем называть корневое частично упорядоченное множество глубины 2, а множество его максимальных точек — *крышей*.

Типичный веер имеет следующий вид:



Замечание 2. Заметим, что веера могут быть как конечными, так и бесконечными.

В работах [10, 13] с.и. логика $L2$ характеризуется как «логика шкал глубины не более 2»; доказано, что $L2 = Int + bd_2$. Обозначение формулы $bd_2 \ \rightleftharpoons\ p \vee (p \to (q \vee \neg q))$ взято из [14], где так обозначается соответствующая логика $\mathbf{BD_2}$ (bounded depth 2).

Далее приведем без доказательств необходимые сведения из метаматематики φ-логик и φ-шкал (изложение опирается на [2, 6]).

Определение 9. *φ-шкалой* назовем пару $\mathcal{W} = (W, \Phi)$, где W — шкала, Φ — фиксированный (выделенный) конус, которым при построении моделей интерпретируется $\varphi : x \Vdash_v \varphi \ \rightleftharpoons\ x \in \Phi$. Отношение вынуждения для константы φ не зависит от оценки переменных, поэтому индекс v можно опускать.

Интерпретацию константы φ на φ-шкале можно также задавать также с помощью понятия цвета [15]. Говорим, что точка x *окрашена*, если $x \in \Phi$, и соответственно *не окрашена*, если $x \notin \Phi$.

Понятия *модели, истинности формулы в модели, общезначимости формулы в φ-шкале* и *в классе φ-шкал* определяются аналогично.

Определение 10. *φ-веером* назовем веер, на котором каким-то образом задан выделенный конус.

φ-Логикой класса $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \{\mathcal{W}_i = (W_i, \Phi_i) \mid i \in I\}$ φ-шкал называется множество

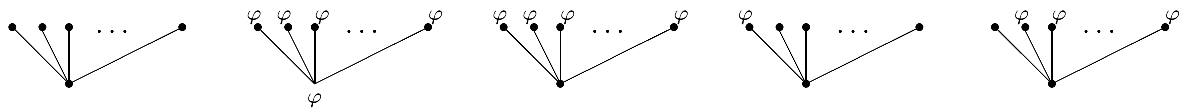
$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{M}}) := \{A \in Fm(\varphi) \mid \forall \mathcal{W}_i \in \boldsymbol{\mathcal{M}} : \mathcal{W}_i \models A\}.$$

Понятие *порожденной* φ-подшкалы, $(W', \Phi') \subseteq (W, \Phi)$, определяется следующим образом: $W' \in Con\,W$ и $\Phi' = \Phi \cap W'$. Пусть $(W', \Phi') \subseteq (W, \Phi)$ и v — оценка на W. *Наследуемая оценка* v' на W' определяется посредством $v'(p) \rightleftharpoons v(p) \cap W'$ для $p \in Var$.

Теорема 1 (о порожденной φ-модели). *При указанных предположениях для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$ имеет место $v'(A) = v(A) \cap W'$.*

Приведем сведения, относящиеся к семантическому описанию полных по Новикову расширений с.и. логики $L2$ в языке с единственной дополнительной константой, которые были исследованы в работе А. Д. Яшина [11]. В работе было доказано, что логика $L2$ в языке с одной дополнительной константой имеет ровно пять полных по Новикову расширений $\mathcal{L}^1, \ldots, \mathcal{L}^5$, характеризуемых классами φ-вееров $\boldsymbol{\mathcal{F}}^1, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{F}}^5$.

Типичные представители этих классов выглядят следующим образом:



На соответствующих φ-шкалах каждого из этих пяти классов определенным образом задано значение константы φ, которое определяет так называемый «цветовой тип класса».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^1 := \{\mathcal{F}_n^1 \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}_n^1 = (F_n, \varnothing)$. Цветовой тип класса «$\varphi$ — нигде».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^2 := \{\mathcal{F}_n^2 \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}_n^2 = (F_n, F_n)$ — «φ — везде».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^3 := \{\mathcal{F}_n^3 \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}_n^3 = (F_n, \{m_1, \ldots, m_n\})$ — «φ — во всех точках крыши».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^4 := \{\mathcal{F}_n^4 \mid n > 1\}$, где $\mathcal{F}_n^4 = (F_n, \{m_1\})$ — «φ — в единственной точке крыши»;

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^5 := \{\mathcal{F}_n^5 \mid n > 1\}$, где $\mathcal{F}_n^5 = (F_n, \{m_2, \ldots, m_n\})$ — «φ — во всех точках крыши, кроме одной».

Отметим, что упомянутые пять цветовых типов имеют смысл и для каждого бесконечного φ-веера. Каким является рассматриваемый φ-веер (конечным или бесконечным), будет уточняться в ходе рассуждений.

§ 2. Исчисления в расширенном языке

В этом параграфе мы основываемся на исчислении $Int(\varphi)$ гильбертовского типа в языке $Fm(\varphi)$. Оно определяется схемами аксиом Int (A1)–(A10) [16]:

(A1) $A \to (B \to A)$;
(A2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
(A3) $(A \wedge B) \to A$;
(A4) $(A \wedge B) \to B$;
(A5) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$;
(A6) $A \to (A \vee B)$;
(A7) $B \to (A \vee B)$;
(A8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;
(A9) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$;
(A10) $\neg A \to (A \to B)$

и правилом вывода *modus ponens*: $A, A \to B \;/\; B$.

Исчисление $L2(\varphi)$ задается аксиомами[2] (A1)–(A10) и специфической аксиомой $bd_2(\varphi)$. К исчислению $L2(\varphi)$ можно добавлять некоторые формулы в качестве *дополнительных аксиом*

[2]Мы рассматриваем вариант бесподстановочного вывода, то есть под *аксиомой* понимаем частный случай схемы аксиом.

исчисления. Исходя из цели данной статьи, дополнительные аксиомы будем выбирать из следующего списка:

1°. $\neg\varphi$;
2°. φ;
3°. $\neg\neg\varphi$;
4°. $\varphi \to (A \vee \neg A)$;
5°. $\neg\varphi \to (A \vee \neg A)$;
6°. $Irr(\varphi) \rightleftharpoons (\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$ (*неразложимость* φ);
7°. $Irr(\neg\varphi) \rightleftharpoons (\neg\varphi \to (A \vee B)) \to ((\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to B))$ (*неразложимость* $\neg\varphi$).

Определение 11. В исчислении $\mathcal{I}$ *выводом из множества гипотез* Γ называется конечная последовательность формул $B_1, B_2, \ldots, B_l$ такая, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ B_i есть либо аксиома, либо гипотеза из Γ, либо получается из двух предшествующих формул последовательности по правилу вывода. Формула A *выводима из* Γ (обозначение $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} A$), если существует вывод из Γ, заканчивающийся формулой A. Если $\Gamma = \varnothing$, то говорят, что формула A *выводима в* $\mathcal{I}$ (обозначение $\vdash_{\mathcal{I}} A$).

Теорема 2 (о дедукции). $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{I}} B$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} A \to B$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для Int (см. [17]). □

Определение 12. Исчисление $\mathcal{I}$ называется *противоречивым*, если $\vdash_{\mathcal{I}} A \wedge \neg A$ для некоторой формулы A. Заметим, что это равносильно выводимости любой формулы в $\mathcal{I}$.

Конкретное исчисление $\mathcal{I}$ задается аксиомами $L2(\varphi)$ и некоторым подмножеством списка 1° – 7°, приведенного выше. Часть этих исчислений являются противоречивыми, например исчисления, содержащие формулы 1° и 2°.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее предположение.

Предположение 1. Исчисление $\mathcal{I}$ непротиворечиво, то есть не все формулы выводимы.

Непротиворечивость конкретного исчисления $\mathcal{I}$ можно устанавливать путем построения семантики Крипке, в которой будут тождественно истинны все аксиомы $\mathcal{I}$.

§ 3. Непротиворечивые множества и типы

Пусть $\mathcal{I}$ — некоторое исчисление. Произвольные подмножества множества $Fm(\varphi)$ обозначим буквами $\Gamma, \Delta, \ldots$. Вместо $\Gamma \cup \{A\}$ для краткости пишем ΓA или Γ, A.

Определение 13. Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq Fm(\varphi)$. Упорядоченная пара $(\Gamma; \Delta)$ называется *непротиворечивой (относительно* $\mathcal{I}$*)*, если для любых конечных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Gamma$ и $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \Delta$ формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$ невыводима в $\mathcal{I}$; иначе пара называется *противоречивой.* Здесь при $n = 0$ (то есть $\Gamma = \varnothing$) имеется в виду формула $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$, при $k = 0$ (то есть $\Delta = \varnothing$) имеется в виду формула $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$, при $n = k = 0$ — формула $\mathsf{0}$.

Замечание 3. В силу предположения 1 хотя бы одна непротиворечивая пара в $\mathcal{I}$ существует.

Лемма 1 (см. [18, с. 379]). *Пусть* $(\Gamma; \Delta)$ *— непротиворечивая пара и* $C \in Fm(\varphi)$*, тогда хотя бы одна из пар* $(\Gamma, C; \Delta)$, $(\Gamma; \Delta, C)$ *непротиворечива.*

По существу, это утверждение является вариантом известного правила сечения (см., например, [17]).

Определение 14. Пару $(\Gamma; \Delta)$ будем называть *максимальной*, если для любой формулы A выполнено либо $A \in \Gamma$, либо $A \in \Delta$.

Лемма 2. *Любую непротиворечивую пару $(\Gamma; \Delta)$ можно дополнить до максимальной непротиворечивой пары $(\Gamma'; \Delta')$ такой, что $\Gamma \subset \Gamma'$, $\Delta \subset \Delta'$.*

Доказательство. Строим по индукции две возрастающие последовательности Γ_n и Δ_n следующим образом: зафиксируем пересчет $Fm(\varphi) = \{C_1, C_2, \ldots\}$ и положим $\Gamma_0 := \Gamma$, $\Delta_0 := \Delta$. Пара (Γ_0, Δ_0) непротиворечива по условию. Пусть построена непротиворечивая пара (Γ_n, Δ_n). Если пара $(\Gamma_{n+1}, C_{n+1}; \Delta_{n+1})$ непротиворечива, то положим $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, C_{n+1}$; $\Delta_{n+1} := \Delta_n$; иначе $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$, $\Delta_{n+1} := \Delta_n, C_{n+1}$. В силу леммы 1 пара $(\Gamma_{n+1}, \Delta_{n+1})$ тоже непротиворечива. Далее положим $\Gamma' := \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$, $\Delta' := \bigcup_{n\in\omega} \Delta_n$. Проверим, что пара Γ', Δ' — искомая максимальная пара. Ясно, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Delta \subseteq \Delta'$. Пусть $C \in Fm(\varphi)$; $C = C_n$ при некотором n в зафиксированном выше пересчете. Тогда по построению $C \in \Gamma_{n+1} \subset \Gamma'$ или $C \in \Delta_{n+1} \subset \Delta'$. Наконец, пара Γ', Δ' непротиворечива, так как иначе найдутся индекс s и конечные множества $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Gamma_s \subset \Gamma'$ и $B_1, B_2, \ldots, B_l \in \Delta_s \subset \Delta'$ такие, что в исчислении $\mathcal{I}$ выводима формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_l$, что означает противоречивость пары (Γ_s, Δ_s). Коллизия с тем, что все пары, построенные на каждом конечном шаге индукции, являются непротиворечивыми. □

Максимальные непротиворечивые пары будем в дальнейшем называть *типами* (*исчисления* $\mathcal{I}$) и обозначать $\sigma, \tau, \varkappa, \ldots$, при этом $\sigma = (\sigma^0; \sigma^1)$. Частичный порядок на множестве типов этого исчисления задается по включению левых компонент: $\sigma \leqslant \tau \ \rightleftharpoons\ \sigma^0 \subseteq \tau^0$. Рефлексивность и транзитивность этого отношения очевидны, антисимметричность следует из максимальности пар.

Лемма 3 (свойства типов). *Для произвольных $A, B \in Fm(\varphi)$ выполнено:*

(1) $A \wedge B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ *и* $B \in \sigma^0$;

(2) $A \wedge B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ *или* $B \in \sigma^1$;

(3) $A \vee B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ *или* $B \in \sigma^0$;

(4) $A \vee B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ *и* $B \in \sigma^1$;

(5) $A \to B,\ A \in \sigma^0 \Rightarrow B \in \sigma^0$;

(6) $A \to B \in \sigma^1 \Rightarrow \exists \tau \geqslant \sigma : A \in \tau^0 \wedge B \in \tau^1$; *если при этом* $\max_M \sigma$, *то* $A \in \sigma^0 \wedge B \in \sigma^1$;

(7) $\neg A \in \sigma^0 \implies A \in \sigma^1$;

(8) $\neg A \in \sigma^1 \implies \exists \tau \geqslant \sigma : A \in \tau^0$; *если при этом* $\max_M \sigma$, *то* $A \in \sigma^0$.

Пусть $M = (\{\sigma \mid \sigma \text{ есть тип}\}, \leqslant)$ есть множество типов из $\mathcal{I}$ с заданным выше отношением порядка. В силу замечания 3 хотя бы один тип для исчисления $\mathcal{I}$ существует, то есть $M \neq \varnothing$. Строго говоря, у буквы M должен быть атрибут, указывающий на исчисление $\mathcal{I}$, но, избегая громоздкости обозначений, мы его опускаем; о каком $\mathcal{I}$ идет речь, будет далее ясно из контекста. Множество M называется *канонической $\mathcal{I}$-шкалой*.

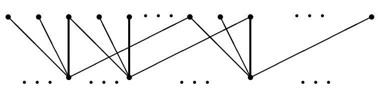
В исчислении $\mathcal{I}$ присутствует аксиома bd_2, обуславливающая специфическое свойство канонической шкалы M.

Предложение 1. *В шкале M не существует цепей длины более 2.*

Доказательство (от противного). Пусть нашлись $\sigma, \tau, \varkappa \in M$ такие, что $\sigma < \tau < \varkappa$, откуда $\sigma_0 \subset \tau_0 \subset \varkappa_0$. Так как $\sigma < \tau$, то найдется $A \in \sigma^1$ такая, что $A \in \tau^0$. Так как $\tau < \varkappa$, то найдется $B \in \tau^1$ такая, что $\neg B \in \tau^0$. Формула bd_2 — аксиома в $\mathcal{I}$, значит, $A \vee (A \to (B \vee \neg B)) \in \sigma^0$. Тогда имеем $A \to (B \vee \neg B) \in \sigma^0$, откуда $B \vee \neg B \in \tau^0$, и, по лемме 3, получим $B \in \tau^0$ или $\neg B \in \tau^0$. По предположению, $B \in \tau^1$, значит, $\neg B \in \tau^0$ и $\neg B \in \varkappa^0$. Но и $\neg B \in \tau^0$ (по предположению). Откуда $(B \wedge \neg B) \in \varkappa^0$, значит, $\varkappa$ — противоречивый тип. □

В этой шкале любой конус, порожденный точкой x глубины 2, является веером, возможно с бесконечной крышей.

Типичные фрагменты этой шкалы имеют следующий вид:



§ 4. Построение канонической φ-модели

Зададим *каноническую $\mathcal{I}$-φ-шкалу*, определив интерпретацию константы φ следующим образом: $\sigma \in \Phi \rightleftharpoons \varphi \in \sigma^0$. Тем самым в шкале задан выделенный конус $\Phi = \{\sigma \in M \mid \sigma \in \sigma^0\}$. Заметим, что Φ действительно является конусом, так как это множество замкнуто относительно увеличения: если $\varphi \in \sigma^0$ и $\sigma < \tau$, то $\varphi \in \tau^0$. Полученную φ-шкалу $\mathcal{M} := (M, \Phi)$ называем *канонической φ-шкалой исчисления $\mathcal{I}$*.

Далее зададим *каноническую оценку* $\Vdash$ переменных из $Var : \sigma \Vdash p \rightleftharpoons p \in \sigma^0$. Полученная модель называется *канонической моделью* исчисления $\mathcal{I}$.

Лемма 4 (семантическая). *Для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$ и любой $\sigma \in \mathcal{M}$ выполнено*

$$A \in \sigma^0 \implies \sigma \Vdash A,$$
$$A \in \sigma^1 \implies \sigma \nVdash A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем индукцией по построению формулы A. Пусть A есть $p \in Var$. Тогда если $p \in \sigma^0$, то $\sigma \Vdash p$ (по определению канонической оценки); если же $p \in \sigma^1$, то $p \notin \sigma^0$ (в силу непротиворечивости пар) и $\sigma \nVdash p$. Аналогично доказываем, если A есть φ. Пусть A — неатомарная формула. Лемма предполагается верной для любой подформулы этой формулы. Шаги для связок обоснованы леммой 3. □

В канонической модели истинны все аксиомы исчисления $\mathcal{I}$, но каноническая оценка есть лишь одна из возможных оценок. Для нас важна общезначимость дополнительных аксиом исчисления $\mathcal{I}$, которую будем устанавливать отдельно для каждой из них в шкале $\mathcal{M}$, соответствующей заданному исчислению.

§ 5. Влияние специфических аксиом на устройство канонической φ-шкалы

Для каждой полной по Новикову φ-логики $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_5$, описанных в § 1, зададим соответствующее исчисление:

$\mathcal{I}_1 = L2(\varphi) + \neg\varphi$;
$\mathcal{I}_2 = L2(\varphi) + \varphi$;
$\mathcal{I}_3 = L2(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$;
$\mathcal{I}_4 = L2(\varphi) + \varphi \to (A \vee \neg A) + \neg\varphi \to (A \vee \neg A) + (\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$;
$\mathcal{I}_5 = L2(\varphi) + \varphi \to (A \vee \neg A) + \neg\varphi \to (A \vee \neg A) + (\neg\varphi \to (A \vee B)) \to ((\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to B))$.

Теорема 3 (корректности). *Каждое из исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_5$ корректно относительно соответствующего класса φ-вееров $\boldsymbol{\mathcal{F}}^1, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{F}}^5$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в проверке общезначимости специфических аксиом исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_5$ в соответствующем классе φ-вееров. Покажем для примера общезначимость аксиомы неразложимости $Irr(\varphi)$ в классе $\boldsymbol{\mathcal{F}}^4$. Рассмотрим φ-веер $\mathcal{F}^4_n = \{o, m_1, \ldots, m_n\}$ с $\Phi = \{m_1\}$ и некоторой оценкой на нем. Пусть найдется $x \in \mathcal{F}^4_n$ такая, что $x \Vdash \varphi \to (p \vee q)$ и $x \nVdash (\varphi \to p) \vee (\varphi \to q)$. Отсюда найдется $y \geqslant x$ такая, что $y \Vdash \varphi$ и $y \nVdash p$. Аналогично найдется $z \geqslant x$ такой, что $z \Vdash \varphi$ и $z \nVdash q$. В силу строения φ-веера $\mathcal{F}^4_n$ получим $y = z = m_1$, то есть $m_1 \Vdash \varphi, m_1 \nVdash p$ и $m_1 \nVdash q$, что противоречит $x \Vdash \varphi \to p \vee q$, так как $m_1 \geqslant x$. □

Выясним далее влияние специфических аксиом рассматриваемых исчислений на строение соответствующих канонических φ-шкал.

Лемма 5. *Если исчисление $\mathcal{I}$ содержит аксиому $\neg\varphi$, то $\Phi = \varnothing$. Если исчисление содержит аксиому φ, то $\Phi = M$.*

Доказательство. Если $\neg\varphi$ — аксиома $\mathcal{I}$, то $\neg\varphi \in \sigma^0$. По лемме 3, имеем $\varphi \in \sigma^1$. В силу непротиворечивости типов $\varphi \notin \sigma^0$. Аналогично доказываем для φ. □

Лемма 6. *Если в исчислении $\mathcal{I}$ есть аксиома $\varphi \to (A \vee \neg A)$, то для любого $\sigma \in M$ из $\varphi \in \sigma^0$ следует $\max_M \sigma$. Если в исчислении $\mathcal{I}$ есть аксиома $\neg\varphi \to (A \vee \neg A)$, то для любого $\sigma \in M$ из $\neg\varphi \in \sigma^0$ следует $\max_M \sigma$.*

Доказательство (от противного). Пусть $\varphi \in \sigma^0$ и при этом σ — не максимальный элемент. Тогда найдутся тип $\tau > \sigma$ такой, что $\varphi \in \tau^0$, и формула A такая, что $A \in \tau^0$ и $A \notin \sigma^0$. Откуда получим, что $A \in \sigma^1$, $\neg A \in \tau^1$ и $\neg A \in \sigma^1$. Получили $\varphi \in \sigma^0$, $A, \neg A \in \sigma^1$. По условию $\varphi \to (A \vee \neg A)$ — аксиома $\mathcal{I}$. Получили, что σ — противоречивый тип (quod non). Для $\neg\varphi$ доказательство аналогично. □

Лемма 7. *Если исчисление $\mathcal{I}$ содержит аксиому $\neg\neg\varphi$, то для любого $\sigma \in M$ из $\max_M \sigma$ следует $\varphi \in \sigma^0$.*

Доказательство. Пусть σ — максимальный элемент и при этом $\varphi \notin \sigma^0$, то есть $\varphi \in \sigma^1$. Так как $\neg\neg\varphi$ — аксиома $\mathcal{I}$, то $\neg\neg\varphi \in \sigma^0$. Откуда $\neg\varphi \in \sigma^1$ и $\varphi \in \sigma^0$ (quod non). □

Лемма 8. *В исчислениях $\mathcal{I}_4$ и $\mathcal{I}_5$ выводимы следующие формулы:*
(1) $I_4 \vdash (\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A)$;
(2) $I_5 \vdash (\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to \neg A)$.

Доказательство. (1) В формуле $(\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$ положим $B := \neg A$. Тогда $(\varphi \to (A \vee \neg A)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A))$, $\varphi \to (A \vee \neg A)$ — аксиома $\mathcal{I}_4$ и $(\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A)$ выводима в $\mathcal{I}_4$. (2) Доказывается аналогично. □

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_4$. Тогда для любого σ существует не более одного $\tau \geqslant \sigma$ такого, что $\varphi \in \tau^0$.*

Доказательство (от противного, с применением пункта 1 леммы 8). Пусть $\sigma \leqslant \tau$, $\sigma \leqslant \varkappa$, $\tau \neq \varkappa$. В силу разности типов τ и $\varkappa$ найдется формула A и возможны следующие два распределения формул $A, \neg A, \varphi$:

$$A,\ \varphi \in \tau^0,\ \neg A \in \tau^1; \quad \neg A,\ \varphi \in \varkappa^0,\ A \in \varkappa^1.$$

Пусть $\varphi \to A \in \sigma^0$, тогда $\varphi \to A \in \varkappa^0$. Так как $\varphi \in \varkappa^0$, то и $A \in \varkappa^0$; при этом $\neg A \in \varkappa^0$. Откуда получаем, что $\varkappa$ — противоречивый тип, следовательно, $\varphi \to A \in \sigma^1$.

Допустим, что $\varphi \to \neg A \in \sigma^0$, тогда $\varphi \to \neg A \in \tau^0$. Так как $\varphi \in \tau^0$, то и $\neg A \in \tau^0$; при этом $A \in \tau^0$. Откуда получаем, что τ — противоречивый тип, следовательно, $\varphi \to \neg A \in \sigma^1$. В итоге получили, что $(\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A) \in \sigma^1$. Противоречие с тем, что формула $(\varphi \to A) \vee$ $\vee (\varphi \to \neg A)$ выводима в $\mathcal{I}_4$. □

Лемма 10. *Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_5$. Тогда для любого σ существует не более одного $\tau \geqslant \sigma$ такого, что $\neg\varphi \in \tau^0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 9. □

§ 6. Семантическая полнота исчислений $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4, \mathcal{I}_5$

В этом параграфе мы докажем полноту каждого из исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_5$ относительно соответствующих классов φ-вееров $\boldsymbol{\mathcal{F}}^1 \ldots, \boldsymbol{\mathcal{F}}^5$.

Теорема 4 (полноты). *Пусть A — произвольная формула. Для каждого $k \in [1, 5]$ выполнено следующее: если $\boldsymbol{\mathcal{F}}^k \models A$, то $\mathcal{I}_k \vdash A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о (от противного). Пусть $\mathcal{I}$ — одно из исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_5$. Зафиксируем формулу A, невыводимую в $\mathcal{I}$. Пара $(\varnothing; A)$ непротиворечива, значит, найдется тип $\sigma : A \in \sigma^1$, откуда, по лемме 4, в канонической $\mathcal{I}$-φ-модели $(\mathcal{M}, v)$ в точке σ имеем $\sigma \not\Vdash A$. Рассмотрим корневую подмодель $\mathcal{M}^\sigma$ с наследуемой оценкой v^σ. В силу теоремы 1 $\mathcal{M}^\sigma \not\models A$.

Теперь покажем, что для каждого исчисления $\mathcal{I} = \mathcal{I}_k$ для $k \in [1, 5]$, корневая φ-шкала $\mathcal{M}^\sigma$ имеет цветовой тип $\boldsymbol{\mathcal{F}}^k$.

Если $\max_{\mathcal{M}} \sigma$, то в $\mathcal{I}_1$ цветовой тип точки σ — «φ — нигде» — соответствует максимальным точкам вееров класса «φ — нигде». В $\mathcal{I}_2$ цветовой тип точки σ — «φ–везде» — соответствует максимальным точкам вееров класса «φ — везде». Для $\mathcal{I}_3$ цветовой тип точки σ — «φ — во всех точках крыши» — соответствует максимальным точкам вееров класса «φ — во всех точках крыши». Для $\mathcal{I}_4$ и $\mathcal{I}_5$ цветовой тип точки σ не важен, так как в классах $\boldsymbol{\mathcal{F}}^4$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}^5$ есть φ-веера как с окрашенными, так и с неокрашенными точками крыши.

Пусть σ — точка глубины 2. Тогда $\mathcal{M}^\sigma$ является веером, возможно с бесконечным числом точек крыши.

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$, тогда $\neg\varphi$ есть аксиома исчисления $\mathcal{I}_1$. По лемме 5, получим $\Phi = \varnothing$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — нигде».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2$, тогда φ есть аксиома исчисления $\mathcal{I}_2$. По лемме 5, получим $\Phi = \mathcal{M}^\sigma$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — везде».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_3$. Пусть $\tau > \sigma$, тогда $\max_{\mathcal{M}} \tau$ в силу аксиомы bd_2, отсюда, по лемме 7, получим $\varphi \in \tau^0$. Так как $\neg\neg\varphi$ — аксиома исчисления $\mathcal{I}_3$, то $\neg\neg\varphi \in \tau^0$ и, по лемме 3, получим $\neg\varphi \in \tau^1$, то есть крыша φ-веера $\mathcal{M}^\sigma$ полностью окрашена.

Покажем, что $\sigma \not\Vdash \varphi$. Предположим противное. Пусть $\varphi \in \sigma^0$. Тогда найдутся тип $\tau > \sigma$ и формула A такая, что $A \in \sigma^1$ и $A \in \tau^0$. Из аксиомы $\varphi \to (A \vee \neg A)$ получаем $(A \vee \neg A) \in \sigma^0$. По лемме 3, имеем $A \in \sigma^0$ или $\neg A \in \sigma^0$, но первый случай невозможен в силу непротиворечивости типа σ, во втором случае $\neg A \in \tau^0$, что тоже невозможно в силу непротиворечивости типа τ. Поэтому $\varphi \notin \sigma^0$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — во всех точках крыши».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_4$. По лемме 9, существует не более одной точки $\tau \geqslant \sigma$ такой, что $\varphi \in \tau^0$. Убедимся, что хотя бы одна такая точка существует. Поскольку $d(\sigma) = 2$, то найдутся $\tau > \sigma$ и формула A такая, что $A \in \sigma^1$ и $A \in \tau^0$. Из аксиомы $(\varphi \vee \neg\varphi) \to (A \vee \neg A)$ получаем, что $\varphi \vee \neg\varphi \in \sigma^1$ и $\varphi \in \sigma^0$. По лемме 3, из $\neg\varphi \in \sigma^1$ получим, что найдется $\varkappa > \sigma$ такой, что $\varphi \in \varkappa^0$. Откуда $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — в единственной точке крыши».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_5$. По лемме 10, существует не более одного $\tau \geqslant \sigma$ такого, что $\neg\varphi \in \tau^0$. Все дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям предыдущего абзаца. $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — во всех точках крыши, кроме одной».

Таким образом, для каждого из пяти исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_5$, если $\mathcal{I}_k \nvdash A$, существует φ-веер соответствующего цветового типа, в котором формула A опровергается.

В каждом из пяти рассматриваемых случаев $\mathcal{M}^\sigma$ может иметь бесконечное число точек крыши. Сделаем переход от бесконечного веера к конечному, применив известный метод фильтрации [19] и отвлекаясь от конкретного вида полученной модели $\mathcal{M}^\sigma$.

Рассмотрим бесконечный φ-веер $\mathcal{W} = (W, \Phi)$ с корнем o одного из пяти рассматриваемых типов с заданной на нем оценкой v переменных из Var. Зафиксируем конечный набор переменных $\overline{p} = \{p_1, \ldots, p_s\}$.

Зададим на множестве точек крыши $\mathcal{W}$ отношение эквивалентности $x \sim y$:

$$x \in \Phi \Leftrightarrow y \in \Phi; \tag{6.1}$$

$$x \Vdash_v p_i \Leftrightarrow y \Vdash_v p_i \text{ для всех } p_i \in \overline{p}. \tag{6.2}$$

Свойства рефлексивности, транзитивности, симметричности выполнены. Тогда крыша φ-веера $\mathcal{W}$ разбивается не более чем на 2^{s+1} классов эквивалентности $W_1, \ldots, W_l$. Далее строим конечный веер $F_l = \{r, \omega_1, \ldots, \omega_l\}$, на котором задаем выделенный конус Ψ следующим образом:

$$w_k \in \Psi \rightleftharpoons \forall x \in W_k : x \in \Phi \, (\Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \in \Phi) \text{ для } k \in [1, l]; \tag{6.3}$$

$$r \in \Psi \rightleftharpoons o \in \Phi. \tag{6.4}$$

Далее зададим оценку u переменных списка $\overline{p}$ на φ-веере $(\mathcal{F}_l;\Psi)$ следующим образом:

$$\omega_k \Vdash_u p_i \rightleftharpoons \forall x \in W_k : x \Vdash_v p_i \, (\Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v p_i) \text{ для всех } p_i \in \overline{p}; \tag{6.5}$$

$$r \Vdash_u p_i \rightleftharpoons o \Vdash_v p_i \text{ для всех } p_i \in \overline{p}. \tag{6.6}$$

Лемма 11. *Для каждой формулы $B(\varphi;\overline{p})$ выполнено:*
(1) $\omega_k \Vdash_u B \Leftrightarrow \forall x \in W_k : v \Vdash_v B \Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v B$ *для* $k \in [1, l]$;
(2) $r \Vdash_u B \Leftrightarrow o \Vdash_v B$.

Доказательство проводим индукцией по построению формулы $B(\varphi;\overline{p})$. Для константы φ и переменных списка $\overline{p}$ оба утверждения вытекают непосредственно из определений (6.1)–(6.6).

Проведем шаг индукции для формулы вида $B_1 \to B_2$, предполагая оба утверждения леммы для B_1 и B_2 верными.

Докажем (1). Пусть $w_k \Vdash_u B_1 \to B_2$. В силу максимальности точки w_k получаем $w_k \nVdash_u B_1$ или $w_k \Vdash_u B_2$. По предположению индукции $\forall x \in W_k : x \nVdash_v B_1$ или $\forall x \in x \Vdash_v B_2$. Отсюда $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2$.

Импликация $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2 \Rightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2$ очевидна.

Пусть $\exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2$. Для подразумеваемой точки $x \in W_k$ в силу ее максимальности имеем $x \nVdash_v B_1$ или $x \Vdash_v B_2$. Из первого получаем $\neg\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ (в силу законов внешней логики), из второго, по индукционному предположению, получаем $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_2$. По предположению индукции имеем $w_k \nVdash_u B_1$ или $w_k \Vdash_u B_2$, из чего, в силу максимальности w_k, вытекает $w_k \Vdash_u B_1 \to B_2$.

Докажем (2). Пусть $r \nVdash_u B_1 \to B_2$. Найдется $z \geqslant r : z \Vdash_u B_1$ и $z \nVdash_u B_2$.

Если $z = r$, то, по предположению индукции (утверждение 2), получаем $o \Vdash_v B_1$ и $o \nVdash_v B_2$, то есть $o \nVdash_v B_1 \to B_2$. Если $z > r$, то $z = w_k$ для некоторого k и $w_k \Vdash_u B_1$ и $w_k \nVdash_u B_2$. В силу предположения индукции (утверждение 1) получаем $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $\exists x \in W_k : x \nVdash_v B_2$. Отсюда $\exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $x \nVdash_v B_2$, поэтому $o \nVdash_v B_1 \to B_2$.

В обратную сторону аналогично. □

Заметим также, что если исходный φ-веер $\mathcal{W}$ относится к одному из указанных пяти типов, то и полученный из него φ-веер $\mathcal{F}_l$ имеет тот же цветовой тип.

Завершим доказательство теоремы о полноте. Пусть формула A не содержит других переменных, кроме как из списка $\overline{p}$, и невыводима в исчислении $\mathcal{I}_k$. По описанному выше, существует φ-веер k-го цветового типа, опровергающий A. По лемме 11, существует конечный веер цветового типа k, опровергающий A, то есть $\boldsymbol{\mathcal{F}}^k \not\models A$, что и требовалось доказать. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. 2-е изд. М.: Наука, 1987. 336 с.
2. Скворцов Д.П. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 154–173.
3. Сметанич Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139. № 2. С. 309–312.
4. Сметанич Я.С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Труды Московского математического общества. 1960. Т. 9. С. 357–371.
5. Янков В.А. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. № 1. С. 33–34.
6. Яшин А.Д. О новой константе в интуиционистской логике высказываний // Фундаментальная и прикладая математика. 1999. Т. 5. № 3. С. 903–926.
7. Yashin A.D. New intuitionistic logical constants and Novikov completeness // Stud. Log. 1999. Vol. 63. № 2. P. 151–180.
8. Яшин А.Д. Классификация полных по Новикову логик с дополнительными логическими константами // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 3. С. 366–383.

9. Яшин А.Д. Новая регулярная константа в интуиционистской логике высказываний // Сиб. матем. журнал. 1996. Т. 37. № 6. С. 1413–1432.
10. Максимова Л.Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 5. С. 558–570.
11. Яшин А.Д. О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика. 2011. Т. 50. № 2. С. 246–267.
12. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики М.: Наука, 1972. 592 с.
13. Захарьящев М.В. Синтаксис и семантика суперинтуиционистских логик // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 4. С. 402–429.
14. Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal logic. Oxford: Oxford University Press, 1997. 605 p.
15. Григолия Р.Ш. Свободные S4.3-алгебры с конечным числом образующих // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 281–287.
16. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2004. 256 с.
17. Клини С.К. Введение в метаматематику М.: Иностранная литература, 1957. 526 с.
18. Шютте К. Полные системы модальной и интуиционистской логики // Модальная логика / Р. Фейс. М.: Наука, 1974. С. 324–421.
19. Gabbay D.M. On some new intuitionistic propositional connectives. I // Stud. Log. 1977. Vol. 36. № 1–2. P. 127–139.

Поступила в редакцию 27.08.2014

Кощеева Анна Константиновна, старший преподаватель, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kannakst@mail.ru

A. K. Koshcheeva

Axiomatics of P. S. Novikov complete extensions of the superintuitionistic logic $L2$ in the language containing an additional constant

Keywords: the superintuitionistic logic $L2$, a new logical constant, an explicit axiomatics of Novikov-complete extensions.

MSC: 03B55, 03B60

The Novikov problem for a superintuitionistic logic L is to describe the class of all maximal conservative (i.e. P. S. Novikov complete) extensions of L in the language with additional logical connectives and logical constants. Since the family of all superintuitionistic logics has the power of the continuum, it is sensible to apply the P. S. Novikov problem to superintuitionistic logics which for one reason or other have already come to researchers' attention.

In particular, there are three so-called pretabular superintuitionistic logics (i.e. non-tabular, but all their own extensions are tabular). One of them — the logic $L2$ — is characterized by the class of finite rooted linearly ordered sets of depth 2. It is established that for superintuitionistic logic $L2$ in the language with one additional constant there are exactly five P. S. Novikov complete extensions; their semantic description is given.

In this paper we propose an explicit axiomatics for each of the five existing P. S. Novikov complete extensions of the superintuitionistic logic $L2$ in the language containing an additional constant.

REFERENCES

1. Ershov Yu.L., Palyutin E.A. *Matematicheskaya logika* (Mathematical logic), Moscow: Nauka, 1987, 336 p.

2. Skvortsov D.P. On intuitionistic propositional calculus with an additional logical connective, *Issledovaniya po neklassicheskim logikam i formal'nym sistemam* (Studies in nonclassical logics and formal systems), Moscow: Nauka, 1983, pp. 154–173 (in Russian).

3. Smetanich Ya.S. On statement calculi with an additional operation, *Soviet Math. Doklady*, 1961, vol. 2, pp. 937–939.

4. Smetanich Ya.S. On the completeness of the propositional calculus with additional operations in one argiment, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1960, vol. 9, pp. 357–371 (in Russian).

5. Yankov V.A. Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, *Soviet Math. Dokl.*, 1968, vol. 9, pp. 806–807.

6. Yashin A.D. On a new constant in intuitionistic propositional logic, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 903–926 (in Russian).

7. Yashin A.D. New intuitionistic logical constants and Novikov completeness, *Stud. Log.*, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 151–180.

8. Yashin A.D. Classification of Novikov complete logics with extra logical constants, *Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 207–216.

9. Yashin A.D. A new regular constant in intuitionistic propositional logic, *Siberian Math. Journal*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1242–1258.

10. Maksimova L.L. Pretabular superintuitionistic logics, *Algebra and Logic*, 1972, vol. 11, no. 5, pp. 308–314.

11. Yashin A.D. New constants in two pretabular superintuitionistic logics, *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 2, pp. 171–186.

12. Rasiowa H., Sikorski R. *The mathematics of metamathematics*, Warszawa: PWN, 1963. Translated under the title *Matematika metamatematiki*, Moscow: Nauka, 1972, 592 p.

13. Zakharyaschev M.V. Syntax and semantics of intermediate logics, *Algebra and Logic*, 1989, vol. 28, no. 4, pp. 262–282.

14. Chagrov A., Zakharyaschev M. *Modal logic*, New York: Oxford University Press, 1997, 605 p.

15. Grigoliya R.Sh. Free S4.3-algebra with a finite number of generators, *Issledovaniya po neklassicheskim logikam i formal'nym sistemam* (Studies in nonclassical logics and formal systems), Moscow: Nauka, 1983, pp. 281–287 (in Russian).

16. Lavrov I.A., Maksimova L.L. *Zadachi po teorii mnozhestv, matematicheskoi logike i teorii algoritmov* (Tasks in set theory, mathematical logic and the theory of algorithms), Moscow: Fizmatlit, 2004, 256 p.

17. Kleene S.C. *Introduction to metamathematics*, New York: D. Van Nostrand Company, 1952. Translated under the title *Vvedenie v metamatematiku*, Moscow: Inostrannaya literatura, 1957, 526 p.

18. Schutte K. Complete systems of modal and intuitionistic logic, *Modal'naya logika* (Modal Logic), Ed.: Feys R., Moscow: Nauka, 1974, pp. 324–421 (in Russian).

19. Gabbay D.M. On some new intuitionistic propositional connectives. I, *Stud. Log.*, 1977, vol. 36, no. 1–2, pp. 127–139.

Received 27.08.2014

Koshcheeva Anna Konstantinovna, Senior Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kannakst@mail.ru