УДК 517.977 + 517.925.51

© *В. А. Зайцев*

СОГЛАСОВАННОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ $n = 5$[1]

Рассматривается линейная управляемая система с линейной неполной обратной связью с дискретным временем

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = C^*x(t), \quad u(t) = Uy(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (x,u,y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^k.$$

Здесь $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Для замкнутой системы

$$x(t+1) = (A + BUC^*)x(t), \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{1}$$

вводится понятие согласованности. Это понятие является обобщением понятия полной управляемости на системы с неполной обратной связью. Исследуется свойство согласованности системы (1) в связи с задачей управления спектром собственных значений, которая заключается в приведении характеристического многочлена матрицы стационарной системы (1) с помощью стационарного управления U к произвольному наперед заданному полиному. Для системы (1) специального вида, когда матрица A имеет форму Хессенберга, а в матрицах B и C все строки соответственно до p-й и после p-й (не включая p) равны нулю, свойство согласованности является достаточным условием глобальной управляемости спектра собственных значений. В предыдущих работах было доказано, что обратное утверждение верно для $n < 5$ и неверно для $n > 5$. В настоящей работе открытый вопрос для $n = 5$ разрешен. Доказано, что при $n = 5$ для системы с коэффициентами специального вида свойство согласованности является необходимым условием глобальной управляемости спектра собственных значений. Доказательство производится перебором всевозможных допустимых значений размерностей m, k, p. Свойство согласованности эквивалентно свойству полной управляемости «большой системы» размерности n^2. Для доказательства строится большая система, строится матрица управляемости K этой системы размерности $n^2 \times n^2mk$. Доказывается, что матрица K имеет ненулевой минор порядка $n^2 = 25$. Для вычисления определителей больших порядков используется система Maple 15.

Ключевые слова: линейная управляемая система, неполная обратная связь, согласованность, управление спектром, стабилизация, дискретная система.

§ 1. Введение

В настоящей работе продолжаются исследования, проведенные в работах [Z.I, Z.II][2] и [1,2]. Здесь дается положительный ответ на вопрос, который был поставлен в [Z.II] (см. также [1]) и оставался открытым. Введем обозначения и определения. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n$ — линейное n-мерное пространство векторов-столбцов $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$, над полем $\mathbb{K}$; $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{K}^n$, то есть $e_1 = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1)$; $M_{n,m}(\mathbb{K})$ — пространство $n \times m$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $M_{n,m} :=$ $:= M_{n,m}(\mathbb{K})$; $M_n := M_{n,n}$; $I = [e_1, \ldots, e_n] \in M_n$ — единичная матрица; $\top$ – операция транспонирования вектора или матрицы; $*$ — эрмитово сопряжение, то есть $H^* = \overline{H}^{\top}$; $\langle a_1, \ldots, a_\ell \rangle$ — линейная оболочка элементов $a_1, \ldots, a_\ell$ некоторого линейного пространства; $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц [3, с. 235].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195) и Минобрнауки России в рамках базовой части.

[2]Зайцев В.А. Согласованность и управление спектром собственных значений дискретных билинейных систем. I, II // Дифференциальные уравнения. (В печати.)

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем:

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t), \quad y(t)=C^*(t)x(t), \quad t\in\mathbb{Z}, \quad (x,u,y)\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^m\times\mathbb{K}^k. \tag{1}$$

Пусть управление в системе (1) строится по принципу линейной неполной обратной связи в виде $u(t)=U(t)y(t)$. Тогда система (1) переходит в замкнутую систему

$$x(t+1)=(A(t)+B(t)U(t)C^*(t))x(t), \quad t\in\mathbb{Z}, \quad x\in\mathbb{K}^n. \tag{2}$$

Обозначим через $X(t,s)$, $t\geqslant s$, матрицу Коши соответствующей невозмущенной системы

$$x(t+1)=A(t)x(t), \quad x\in\mathbb{K}^n.$$

Имеем $X(t,s)=A(t-1)A(t-2)\cdot\ldots\cdot A(s)$ при $t>s$ и $X(t,s)=I$ при $t=s$. Под промежутком $[t_0,t_1)$, где $t_0,t_1\in\mathbb{Z}, t_0<t_1$, будем понимать множество целочисленных точек $t_0,t_0{+}1,\ldots,t_1{-}1$.

Определение 1. Система (2) называется *согласованной на промежутке* $[t_0,t_1)$, если для всякой матрицы $G\in M_n$ найдется управление $\widehat{U}(t)\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $t\in[t_0,t_1)$, которое переводит решение матричной системы

$$Z(t+1)=A(t)Z(t)+B(t)\widehat{U}(t)C^*(t)X(t,t_0), \qquad t\in\mathbb{Z},$$

из точки $Z(t_0)=0$ в точку $Z(t_1)=G$.

Предположим, что $\det A(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{Z}$. Построим по системе (2) «большую систему» (см. [Z.I])

$$z(t+1)=F(t)z(t)+G(t)v(t), \qquad t\in\mathbb{Z}, \quad (z,v)\in\mathbb{K}^{n^2}\times\mathbb{K}^{mk}, \tag{3}$$

$$F(t)=A(t)\otimes(A^{\top}(t-1))^{-1}\in M_{n^2}, \quad G(t)=B(t)\otimes\overline{C(t)}\in M_{n^2,mk}. \tag{4}$$

Утверждение 1 (см. [Z.I, теорема 1]). *Пусть* $\det A(t)\neq 0$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta)$. *Тогда система* (2) *согласованна на* $[\tau,\tau+\vartheta)$ *в том и только в том случае, если большая система* (3), (4) *вполне управляема на* $[\tau,\tau+\vartheta)$.

Рассмотрим теперь систему (2) с постоянными коэффициентами:

$$x(t+1)=(A+BUC^*)x(t), \qquad t\in\mathbb{Z}, \quad x\in\mathbb{K}^n. \tag{5}$$

Будем отождествлять систему (5) с матрицей $\Sigma=(A,B,C)\in M_{n,n+m+k}$. Система Σ называется *ϑ-согласованной*, если она согласованна на промежутке $[0,\vartheta)$. Система Σ называется *согласованной*, если существует $\vartheta>0$ такое, что система Σ является ϑ-согласованной.

В работах [Z.I, Z.II] и [1] получены различные необходимые и достаточные условия согласованности системы (2) с переменными и постоянными коэффициентами, в частности следующие (см. [1, замечание 1]). Назовем систему $\Sigma=(A,B,C)$ *тривиальной*, если $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}C=n$, и *нетривиальной* — в противном случае. Если система тривиальная, то она является согласованной. Если система нетривиальная, то необходимым условием согласованности является условие $\det A\neq 0$.

В работах [Z.II], [1, 2] исследовалась задача управления спектром собственных значений системы (5). Для систем с непрерывным временем аналогичная задача исследовалась в работах [4–9]. В этой задаче для заданной системы (5) и заданного приведенного многочлена $p(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$ с коэффициентами $\gamma_i\in\mathbb{K}$ требуется построить управление $U\in M_{m,k}$ в системе (5) такое, чтобы характеристический многочлен $\rho(\lambda;U)=\det(\lambda I-A-BUC^*)$ матрицы системы (5) совпадал с $p(\lambda)$. Если такое управление найдется *для любого* $\gamma=\operatorname{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{K}^n$, то спектр стационарной системы (2) называется *глобально управляемым* [8].

Известно, что для стационарной системы с полной обратной связью (то есть когда $C=I$) имеет место следующее утверждение (см. ссылки в [8]), справедливое и для $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, и для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ как в случае систем с непрерывным, так и с дискретным временем.

Утверждение 2. *Следующие условия эквивалентны:*
1) *система* (1) *вполне управляема;*
2) $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$;
3) *спектр системы* (5) *глобально управляем.*

Для систем с неполной обратной связью доказаны теоремы (в работах [8, 9] — для систем с непрерывным временем, в работах [Z.I, Z.II] — для систем с дискретным временем), аналогичные утверждению 2, в случае когда коэффициенты системы (5) имеют специальный вид: матрица A имеет форму Хессенберга, а в матрицах B и C все строки соответственно до p-й и после p-й (не включая p) равны нулю, то есть

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} B = \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{is}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, k}; \\ b_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}; \quad c_{is} = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \quad s = \overline{1, k}; \quad p \in \{\overline{1, n}\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы* (5) *имеют вид* (6), (7)*. Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений:*
1) *система* Σ *согласованна;*
2) *матрицы* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы;*
3) *спектр системы* (5) *глобально управляем.*

Верна ли импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1? Для систем с непрерывным временем ответ на этот вопрос дает теорема 3 [8]. В частности, было доказано, что импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 верна, если $n < 6$, и неверна, если $n \geqslant 6$. Для систем в дискретным временем неполный ответ на этот вопрос был получен в работах [Z.II] и [1]. В работе [Z.II] было показано, что если $n < 4$ (и $\det A \neq 0$ — это необходимое условие согласованности в нетривиальном случае), то импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 верна (см. [Z.II, утверждение 7], [1, утверждение 9]), а если $n \geqslant 6$, то импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 неверна (см. [Z.II, пример 4], [1, утверждение 10]). Таким образом, неисследованными оставались случаи $n = 4$, $n = 5$. По аналогии с системами с непрерывным временем была выдвинута гипотеза о том, что при $n = 4$, $n = 5$ (и $\det A \neq 0$) импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 верна. Для $n = 4$ эта гипотеза была доказана в [1]. Основной результат настоящей работы (см. ниже теорему 2) заключается в доказательстве этой гипотезы для $n = 5$. Доказательство теоремы 2 идейно следует доказательству аналогичной теоремы для систем с непрерывным временем [10, теорема 12]. Докажем предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *система* $\Sigma = (A, B, C)$ *согласованна;*
2) *для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, *система* $\Sigma_1 = (\lambda A, B, C)$ *согласованна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$ (импликация $2 \Longrightarrow 1$ очевидна: берем $\lambda = 1$). Предположим сначала, что $\det A \neq 0$. Пусть система Σ согласованна. В силу утверждения 1 это эквивалентно тому, что большая система

$$z(t+1) = Fz(t) + Gv(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad (z, v) \in \mathbb{K}^{n^2} \times \mathbb{K}^{mk}, \tag{8}$$

$$F = A \otimes (A^{\top})^{-1} \in M_{n^2}, \quad G = B \otimes \overline{C} \in M_{n^2, mk} \tag{9}$$

вполне управляема. Будем отождествлять большую систему (8), (9) с парой (F, G). Большая система (F_1, G_1), построенная по системе $\Sigma_1 = (\lambda A, B, C)$, совпадает с системой (F, G), поскольку $G_1 = G$, $F_1 = (\lambda A) \otimes ((\lambda A)^{\top})^{-1} = (\lambda\lambda^{-1})(A \otimes (A^{\top})^{-1}) = F$. Следовательно, система

(F_1, G_1) вполне управляема. Поскольку $\lambda \neq 0$ и $\det A \neq 0$, то $\det(\lambda A) \neq 0$. Отсюда, в силу утверждения 1, следует согласованность системы Σ_1.

Предположим теперь, что $\det A = 0$. Пусть система Σ согласованна. Это означает, что существует $\vartheta > 0$ такое, что система Σ ϑ-согласованна. Утверждение 1 [Z.1] (см. также [1, утверждение 4]) гласит, что если система Σ является ϑ-согласованной и $\vartheta > 1$, то $\det A \neq 0$. Отсюда следует, что $\vartheta = 1$. В силу предложения 10 [Z.1] это означает, что $\langle BUC^*, U \in M_{m,k}\rangle = M_n$. Это значит, что $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = n$, то есть система $\Sigma = (A, B, C)$ тривиальная. Но тогда система $\Sigma_1 = (\lambda A, B, C)$ также тривиальная и, следовательно, является согласованной (см. [Z.I, следствие 6], [1, теорема 3]). Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Векторы* $x^1 = \operatorname{col}(x_1^1, \ldots, x_r^1) \in \mathbb{K}_1^r$, $\ldots$, $x^s = \operatorname{col}(x_1^s, \ldots, x_r^s) \in \mathbb{K}_1^r$ *линейно независимы над полем* $\mathbb{K}_1$ ($\mathbb{K}_1 = \mathbb{C}$ *или* $\mathbb{K}_1 = \mathbb{R}$) *тогда и только тогда, когда для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, *векторы* $y^1 = x^1$, $y^2 = \lambda \cdot x^2$, $\ldots$, $y^s = \lambda^{s-1} \cdot x^s \in \mathbb{K}_2^r$ *линейно независимы над полем* $\mathbb{K}_2$ ($\mathbb{K}_2 = \mathbb{C}$ *или* $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$).

Замечание 1. Поясним, в чем заключается смысл леммы. Два вектора (скажем, $x^1 = \operatorname{col}(1, i) \in \mathbb{C}^2$, $x^2 = \operatorname{col}(i, -1) \in \mathbb{C}^2$) могут быть линейно зависимыми над полем $\mathbb{C}$ (то есть найдутся $\mu_1 = 1 \in \mathbb{C}$, $\mu_2 = i \in \mathbb{C}$ такие, что $\mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 = 0 \in \mathbb{C}^2$), но могут быть линейно независимыми над полем $\mathbb{R}$ (то есть вещественных чисел μ_1, μ_2 таких, что $\mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 = 0 \in \mathbb{C}^2$, не найдется). Это означает, что линейная независимость векторов (если ее понимать как отсутствие нетривиальной линейной комбинации, равной нулю) над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$ — это, вообще говоря, разные свойства. В лемме 2 векторы $x^1, \ldots, x^s$ с координатами из поля $\mathbb{K}_1$ ($= \mathbb{R}$ или $= \mathbb{C}$) умножаются на коэффициенты $1, \lambda, \ldots, \lambda^{s-1}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Может оказаться (пример: $x^1 = \operatorname{col}(1, 1) \in \mathbb{C}^2$, $x^2 = \operatorname{col}(i, i) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda = i$, $y^1 = \operatorname{col}(1, 1) \in \mathbb{R}^2$, $y^2 = \operatorname{col}(-1, -1) \in \mathbb{R}^2$), что полученные при этом векторы $y^1, \ldots, y^s$ лежат в $\mathbb{K}_2^r$, где поле $\mathbb{K}_2$ не совпадает с $\mathbb{K}_1$ (а считать, что $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1 = \mathbb{C}$, нельзя, так как линейная независимость над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ отличаются). При таком умножении линейная зависимость/независимость может, вообще говоря, измениться, так как может поменяться само поле, которому принадлежат координаты векторов $y^1, \ldots, y^s$, и может поменяться понятие линейной независимости над полем $\mathbb{K}_2$. Смысл леммы 2 заключается в том, что на самом деле при таком преобразовании $(x^1, \ldots, x^s) \to (y^1, \ldots, y^s)$ свойство линейной независимости не изменится.

Доказательство леммы 2. ($\Longleftarrow$). Очевидно. Берем $\lambda = 1$. Тогда $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1$ и $y^j = x^j$, $j = 1, \ldots, s$, и свойство линейной независимости сохраняется.

($\Longrightarrow$). Построим матрицу $X = [x^1, \ldots, x^s] \in M_{r,s}(\mathbb{K}_1)$, $Y = [y^1, \ldots, y^s] \in M_{r,s}(\mathbb{K}_2)$, $\Lambda = \operatorname{diag}\{1, \lambda, \ldots, \lambda^{s-1}\} \in M_s(\mathbb{C})$. Тогда $X = Y\Lambda$. Поскольку $\lambda \neq 0$, то $\det \Lambda \neq 0$. Пусть векторы $x^1, \ldots, x^s \in \mathbb{K}_1^r$ линейно независимы над $\mathbb{K}_1$. Это означает, что $\operatorname{rank} X = s$, то есть существует ненулевой минор порядка s матрицы X. Поскольку $\det \Lambda \neq 0$, то $\operatorname{rank} Y$ также равен s (то есть существует ненулевой минор порядка s матрицы Y). Поскольку элементы матрицы Y лежат в $\mathbb{K}_2$, следовательно, столбцы матрицы Y линейно независимы над $\mathbb{K}_2$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *матрицы* $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{n-1}B \in M_{k,m}(\mathbb{K}_1)$ *линейно независимы над полем* $\mathbb{K}_1$;

2) *для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, *матрицы* $C^*B, C^*(\lambda A)B, \ldots, C^*(\lambda A)^{n-1}B \in M_{k,m}(\mathbb{K}_2)$ *линейно независимы над полем* $\mathbb{K}_2$.

Доказательство следует из леммы 2, если развернуть матрицы $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{n-1}B$ в вектор-столбцы.

Замечание 2. Лемма 1 и следствие 1 говорят о том, что условия 1 и 2 в теореме 1 не изменяются при переходе от системы $\Sigma = (A, B, C)$ к системе $\Sigma_1 = (\lambda A, B, C)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Далее будем называть условия 1 и 2 в теореме 1 *свойствами* 1 и 2 для заданной системы $\Sigma = (A, B, C)$.

Лемма 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Система* $\Sigma = (A, B, C)$ ϑ*-согласованна;*

2) $\langle A^{\vartheta-1}BU_1C^*,\ A^{\vartheta-2}BU_2C^*A,\ \ldots,\ BU_\vartheta C^*A^{\vartheta-1},\ U_i \in M_{m,k}\rangle = M_n$;

3) $\langle (A^*)^{\vartheta-1}CV_1B^*,\ (A^*)^{\vartheta-2}CV_2B^*A^*,\ \ldots,\ CV_\vartheta B^*(A^*)^{\vartheta-1},\ V_j \in M_{k,m}\rangle = M_n$;

4) *система* $\Sigma_1 = (A^*, C, B)$ ϑ*-согласованна.*

Доказательство. Эквивалентность $1 \iff 2$ — это предложение 10 [Z.I]. Из него следует эквивалентность $3 \iff 4$. Если применить к левой части соотношения 2 операцию $*$, то получится эквивалентное равенство, которое имеет вид соотношения 3 (где $U_i^* = V_{\vartheta+1-i}$). $\square$

Лемма 4. *Система* $\Sigma = (A, B, C)$ *согласованна тогда и только тогда, когда для любой невырожденной матрицы* $S \in M_n$ *система* $\widetilde{\Sigma} := S\Sigma S^{-1} := (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, *где*

$$\widetilde{A} = SAS^{-1}, \quad \widetilde{B} = SB, \quad \widetilde{C} = (S^{-1})^*C, \tag{10}$$

является согласованной.

Другими словами, свойство согласованности инвариантно относительно преобразования $\Sigma \to \widetilde{\Sigma}$. Лемма 4 вытекает из [Z.I, следствие 3] (см. также [1, утверждение 6]).

Лемма 5. *Свойство* 2 *инвариантно относительно преобразования* $\Sigma \to \widetilde{\Sigma}$.

Это вытекает из равенств $\widetilde{C}^*\widetilde{A}^{i-1}\widetilde{B} = C^*S^{-1}(SAS^{-1})^{i-1}SB = C^*A^{i-1}B$, $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 6. *Свойство* 1 *инвариантно относительно преобразования*

$$\Sigma = (A, B, C) \to \Sigma_1 = (A, BT, CR), \tag{11}$$

где $T \in M_m$, $R \in M_k$ *— произвольные невырожденные матрицы.*

Лемма 6 вытекает из [Z.I, следствие 2] (см. также [1, утверждение 5]).

Лемма 7. *Свойство* 2 *инвариантно относительно преобразования* (11).

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{vec} : M_{n,m} \to \mathbb{K}^{nm}$ отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, по строкам в вектор-столбец

$$\mathrm{vec}\, H := \mathrm{col}\,(h_{11}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nm}).$$

Нетрудно проверить, что для любых $L \in M_{m,n}$, $A \in M_{n,k}$, $N \in M_{k,l}$ равенство $D = LAN$ эквивалентно $\mathrm{vec}\, D = (L \otimes N^\top)\mathrm{vec}\, A$. Применим к матрицам $C^*A^{i-1}B$, $i = 1, \ldots, n$, отображение vec и построим матрицу $P = [\mathrm{vec}(C^*B), \mathrm{vec}(C^*AB), \ldots, \mathrm{vec}(C^*A^{n-1}B)] \in M_{km,n}$. Свойство 2 для системы $\Sigma = (A, B, C)$ равносильно тому, что $\mathrm{rank}\, P = n$. Свойство 2 для системы $\Sigma_1 = (A, BT, CR)$ означает, что матрицы $R^*C^*A^{i-1}BT$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы. Это означает, что $\mathrm{rank}\, Q = n$, где $Q = [\mathrm{vec}(R^*C^*BT), \mathrm{vec}(R^*C^*ABT), \ldots, \mathrm{vec}(R^*C^*A^{n-1}BT)] \in M_{km,n}$. В силу свойства отображения vec имеем $\mathrm{vec}(R^*C^*A^{i-1}BT) = (R^* \otimes T^\top)\mathrm{vec}(C^*A^{i-1}B)$. Следовательно, $Q = (R^* \otimes T^\top)P$. Поскольку R и T невырожденные, то матрица $R^* \otimes T^\top$ невырожденная. Следовательно, условие $\mathrm{rank}\, P = n$ равносильно условию $\mathrm{rank}\, Q = n$. Это доказывает лемму. $\square$

Рассмотрим систему $\Sigma = (A, B, C)$. Пусть система Σ имеет вид (6), (7) для некоторых n, m, k, p, то есть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

и элементы $a_{i,i+1}$, $i=1,\dots,n-1$, первой наддиагонали матрицы A не равны нулю.

Построим матрицу $S=[e_n,e_{n-1},\dots,e_1]\in M_n$. Тогда $S=S^{-1}=(S^{-1})^*$. Произведем преобразование
$$\Sigma\to\Sigma_1=S\Sigma S^{-1},\tag{13}$$
то есть перейдем от системы $\Sigma=(A,B,C)$ к системе $\Sigma_1=(A_1,B_1,C_1)$, где $A_1=SAS^{-1}$, $B_1=SB$, $C_1=(S^{-1})^*C$. При умножении AS^{-1} столбцы матрицы A переставляются в обратном порядке, при умножении SA строки матрицы A переставляются в обратном порядке. Получим, что
$$A_1=\begin{Vmatrix}a_{nn} & a_{n,n-1} & \dots\dots & a_{n1}\\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \dots\dots & a_{n-1,1}\\ 0 & a_{n-2,n-1} & \dots\dots & a_{n-2,1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots\ a_{12} & a_{11}\end{Vmatrix},\quad B_1=\begin{Vmatrix}b_{n1} & \dots & b_{nm}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{p1} & \dots & b_{pm}\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{Vmatrix},\quad C_1=\begin{Vmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\\ c_{p1} & \dots & c_{pk}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{11} & \dots & c_{1k}\end{Vmatrix}.$$
Свойства 1 и 2 инвариантны относительно преобразования (13) в силу лемм 4, 5.

Перейдем от системы $\Sigma_1=(A_1,B_1,C_1)$ к системе $\Sigma_2=(A_2,B_2,C_2)$, где $A_2=A_1^*$, $B_2=C_1$, $C_2=B_1$. Свойство 2 инвариантно при таком преобразовании, поскольку для всех $i=1,\dots,n$
$$C_2^*A_2^{i-1}B_2=B_1^*(A_1^*)^{i-1}C_1=(C_1^*A_1^{i-1}B_1)^*.$$
Свойство 1 (согласованность) инвариантно при таком преобразовании в силу леммы 3 (эквивалентность $1\Longleftrightarrow 4$). Построим матрицы системы $\Sigma_2=(A_2,B_2,C_2)$, получим
$$A_2=\begin{Vmatrix}\overline{a}_{nn} & \overline{a}_{n-1,n} & \dots & 0\\ \overline{a}_{n,n-1} & \overline{a}_{n-1,n-1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \overline{a}_{21}\\ \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n-1,1} & \dots & \overline{a}_{11}\end{Vmatrix},\ B_2=\begin{Vmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\\ c_{p1} & \dots & c_{pk}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{11} & \dots & c_{1k}\end{Vmatrix},\ C_2=\begin{Vmatrix}b_{n1} & \dots & b_{nm}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{p1} & \dots & b_{pm}\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{Vmatrix},\tag{14}$$
и элементы первой наддиагонали матрицы A_2 не равны нулю. Таким образом, система $\Sigma_2=(A_2,B_2,C_2)$ имеет вид (6), (7) с размерностями n_2,m_2,k_2,p_2, где $n_2=n$, $m_2=k$, $k_2=m$, $p_2=n+1-p$. Кроме того, $\det A_2=\overline{\det A}$. Доказана следующая лемма.

Лемма 8. *Свойства 1 и 2 инвариантны относительно преобразования системы* $\Sigma=(A,B,C)$ *вида* (12) *к системе* $\Sigma_2=(A_2,B_2,C_2)$ *вида* (14).

Замечание 3. Лемма 8 означает, что свойства 1 и 2 сохраняются при переходе от системы Σ к системе Σ_2 и при обратном переходе $\Sigma_2\to\Sigma$. Это следует из того, что преобразование $\pi:\Sigma\mapsto\Sigma_2$ имеет обратное π^{-1} и при этом $\pi^{-1}=\pi$.

Замечание 4. Пусть задана система $\Sigma=(A,B,C)$ и столбцы матрицы B (или матрицы C) линейно зависимы. Построим систему $\widetilde{\Sigma}=(A,\widetilde{B},\widetilde{C})$, где матрицы $\widetilde{B},\widetilde{C}$ получены из матриц B,C вычеркиванием линейно зависимых столбцов. Очевидно, что свойства 1 и 2 инвариантны относительно преобразования $\Sigma\to\widetilde{\Sigma}$ (а также относительно обратного преобразования $\widetilde{\Sigma}\to\Sigma$, то есть операции приписывания линейно зависимых столбцов). Это означает, что, когда речь идет о свойствах 1 и 2 системы $\Sigma=(A,B,C)$, можно без ограничения общности считать, что $m\leqslant n$, $k\leqslant n$ и матрицы B и C имеют полный ранг: $\operatorname{rank}B=m$, $\operatorname{rank}C=k$.

§ 3. Основной результат

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(*a*) *коэффициенты системы* $\Sigma = (A, B, C)$ *имеют вид* (6), (7); (*b*) $\det A \neq 0$; (*c*) $n = 5$.

Тогда, если матрицы

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{15}$$

линейно независимы, система Σ *согласованна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему $\Sigma = (A, B, C)$. Пусть система Σ имеет вид (6), (7). Считаем, что $m \leqslant n$, $k \leqslant n$ и матрицы B и C имеют полный ранг: $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = k$. Отсюда и из вида матриц B и C следуют неравенства $n - p + 1 \geqslant m$ и $p \geqslant k$. Отсюда, в частности, следует, что $n + 1 \geqslant m + k$. Из линейной независимости матриц (15) следует, что $mk \geqslant n$. Если $m = 1$, или $m = n$, или $k = 1$, или $k = n$, то утверждение теоремы следует из [Z.II, утверждение 4] (см. также [1, утверждение 8]). Таким образом, следует рассмотреть случаи, когда выполнены неравенства

$$\begin{array}{lll} (a)\ 1 < m < n, & (c)\ n - p + 1 \geqslant m, & (e)\ n + 1 \geqslant m + k, \\ (b)\ 1 < k < n, & (d)\ p \geqslant k, & (f)\ mk \geqslant n. \end{array} \tag{16}$$

Начиная с этого момента всюду далее будем считать, что $n = 5$.

$\mathbf{n = 5}$. Рассмотрим неравенства (16). Из неравенства (*e*) следует, что $m + k \leqslant 6$.

При $m + k = 6$ условиям (*a*), (*b*), (*f*) удовлетворяют пары $(m, k) = \{(4, 2), (3, 3), (2, 4)\}$. В этом случае из (*c*) и (*d*) с необходимостью вытекает, что $p = k$.

При $m + k = 5$ условиям (*a*), (*b*), (*f*) удовлетворяют пары $(m, k) = \{(3, 2), (2, 3)\}$. Если $m = 3$, $k = 2$, то из неравенств (*c*), (*d*) следует, что $2 \leqslant p \leqslant 3$. Если $m = 2$, $k = 3$, то из неравенств (*c*), (*d*) следует, что $3 \leqslant p \leqslant 4$.

При $m + k \leqslant 4$ условие (*f*) не выполнено, поэтому других случаев нет.

Таким образом, возможны 7 случаев, удовлетворяющих неравенствам (16):
1) $m = 4$, $k = 2$, $p = 2$; 2) $m = 3$, $k = 3$, $p = 3$; 3) $m = 2$, $k = 4$, $p = 4$;
4) $m = 3$, $k = 2$, $p = 2$; 5) $m = 3$, $k = 2$, $p = 3$; 6) $m = 2$, $k = 3$, $p = 3$;
7) $m = 2$, $k = 3$, $p = 4$.

Проведем некоторые рассуждения, которые позволяют сузить класс рассматриваемых систем Σ, не ограничивая общность. Покажем, что, к примеру, случай 7 можно свести к случаю 4, то есть они в определенном смысле симметричны (а именно, в смысле преобразования π в лемме 8). Предположим, что в случае 4 (то есть когда $m = 3$, $k = 2$, $p = 2$) теорема 2 доказана. Это означает, что для всякой системы $\Sigma = (A, B, C) \in M_{n,n+m+k}$, удовлетворяющей условиям (*a*), (*b*), (*c*) теоремы 2, свойства 1 и 2 эквивалентны (так как импликация $1 \Longrightarrow 2$ верна из теоремы 1). Покажем, что отсюда следует, что теорема 2 будет доказана в случае 7. Рассмотрим произвольную систему $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1) \in M_{n,n+m_1+k_1}$, удовлетворяющую условиям (*a*), (*b*), (*c*) теоремы 2, и пусть $m_1 = 2$, $k_1 = 3$, $p_1 = 4$ для системы Σ_1 (случай 7). Произведем преобразование π системы $\Sigma_1 = (A_1, B_1 C_1)$ вида (12) к системе $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2) \in M_{n,n+m_2+k_2}$ вида (14). Получим, что

$$m_2 = k_1 = 3, \quad k_2 = m_1 = 2, \quad p_2 = n + 1 - p_1 = 2 \tag{17}$$

для системы Σ_2. При этом, в силу вида (14), система Σ_2 удовлетворяет условиям (*a*), (*c*) теоремы 2. Кроме того, $\det A_2 = \overline{\det A_1} \neq 0$, поскольку Σ_1 удовлетворяет условиям теоремы 2 (в частности, условию (*b*)). Таким образом, система Σ_2 удовлетворяет всем условиям (*a*), (*b*), (*c*) теоремы 2 и относится к случаю 4 в силу равенств (17). По предположению, для системы Σ_2 свойства 1 и 2 эквивалентны. В силу леммы 8 свойства 1 и 2 инвариантны относительно преобразования $\Sigma_1 \to \Sigma_2$, а также относительно обратного преобразования $\Sigma_2 \to \Sigma_1$. Поэтому если свойства 1 и 2 эквивалентны для системы Σ_2, то они эквивалентны и для системы Σ_1. Таким образом, мы сводим случай 7 к случаю 4. Аналогично случай 3 сводится к случаю 1, и случай 5 — к случаю 6. Таким образом, достаточно разобрать случаи 1, 2, 4, 6.

Далее, пусть $a = \det A \neq 0$ в системе $\Sigma = (A, B, C)$. Положим $\lambda = \sqrt[n]{a} \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Пусть $A_1 = \lambda^{-1}A$. Тогда $\det A_1 = 1$. Предположим, что для системы $\Sigma_1 = (A_1, B, C)$ доказана теорема 2 (то есть эквивалентность свойств 1 и 2). При переходе от системы (A_1, B, C) к системе $(\lambda A_1, B, C)$ эти свойства сохраняются в силу леммы 1 и следствия 1. Тогда эти свойства будут эквивалентны и для системы $\Sigma = (\lambda A_1, B, C)$. Таким образом, теорему 2 достаточно доказать лишь для таких систем (A_1, B, C), у которых $\det A_1 = 1$.

Далее, пусть $\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n := \chi(A; \lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A. Построим сопровождающую матрицу (матрицу Фробениуса)

$$F = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{Vmatrix} \tag{18}$$

для многочлена $\chi(A; \lambda)$. Существует невырожденная, нижняя треугольная матрица S (ее построение описано в [5], см. также [10]), которая приводит матрицу A к матрице Фробениуса, то есть $F = SAS^{-1}$. Матрица S^{-1} также невырожденная, нижняя треугольная. Перейдем от системы $\Sigma = (A, B, C)$ к системе $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}) := S\Sigma S^{-1}$, матрицы которой определяются равенствами (10). Тогда $\widetilde{A}$ — это матрица Фробениуса. Она имеет вид (6). Поскольку B и C имеют вид (7), а матрица S нижняя треугольная, легко видеть, что матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ также имеют вид (7), то есть строки матрицы $\widetilde{B}$ до p-й и матрицы $\widetilde{C}$ после p-й (не включая p) равны нулю. Свойства 1 и 2, в силу лемм 4, 5, инвариантны относительно такого преобразования $\pi_S : \Sigma \mapsto \widetilde{\Sigma}$ (и относительно обратного π_S^{-1}, поскольку $\pi_S^{-1} = \pi_{S^{-1}}$). Кроме того, все остальные условия в теореме (вид системы Σ, определитель матрицы A, условие полного ранга матриц B и C, неравенства (16)) также инвариантны относительно преобразований π_S и π_S^{-1}. Таким образом, теорему 2 достаточно доказать лишь для таких систем $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, у которых матрица $\widetilde{A}$ имеет форму Фробениуса (18). Кроме того, считаем, что определитель матрицы $\widetilde{A}$ равен 1.

Учитывая все вышесказанное, без ограничения общности будем считать, что матрица A системы $\Sigma = (A, B, C)$ имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & y & z & w \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

где $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ — произвольные числа, а B и C имеют вид (7).

Построим по системе Σ большую систему (8), (9). В силу утверждения 1 свойство согласованности системы Σ эквивалентно свойству полной управляемости большой системы, которое равносильно условию

$$\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{n^2-1}G] = n^2. \tag{20}$$

Будем доказывать равенство (20) для $n = 5$. Разберем каждый из случаев 1, 2, 4, 6 по отдельности.

Замечание 5. Будем пользоваться тем, что, в силу лемм 6, 7, свойства 1 и 2 (а также другие условия: вид (7) матриц B, C; условие полного ранга матриц B и C; неравенства (16)) инвариантны относительно преобразования $\pi_{T,R} : (A, B, C) \mapsto (A, BT, CR)$, $T \in M_m$, $R \in M_k$, $\det T \neq 0$, $\det R \neq 0$, а также относительно обратного преобразования $\pi_{T,R}^{-1}$, поскольку $\pi_{T,R}^{-1} = \pi_{T^{-1},R^{-1}}$. Преобразование $\pi_{T,R}$, в частности, позволяет без ограничения общности менять местами столбцы в матрице B, умножать столбец на скаляр, не равный нулю, прибавлять к столбцу линейную комбинацию других столбцов (то же относится к матрице C).

1. $\mathbf{m=4}$, $\mathbf{k=2}$, $\mathbf{p=2}$.

Имеем $B = \begin{Vmatrix} 0 \\ B_1 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} C_1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $B_1 \in M_4$, $C_1 \in M_2$. При этом, поскольку матрицы B и C имеют полный ранг, следовательно, $\det B_1 \neq 0$, $\det C_1 \neq 0$. Применяя к системе Σ преобразование $\pi_{T,R}$, где $T = B_1^{-1}$, $R = C_1^{-1}$, можно считать без ограничения общности, что матрицы B и C системы $\Sigma = (A, B, C)$ имеют вид

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

Матрица A имеет вид (19). Построим матрицы (15), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{22}$$

Очевидно, что матрицы (22) линейно независимы для любых x, y, z, w. Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{25}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{25,8}$. Вычеркнем в матрице G столбцы 1, 3 и 5, полученную матрицу обозначим через $G_1 \in M_{25,5}$. Построим матрицу $L_0 = [G_1, FG_1, F^2G_1, F^3G_1, F^4G_1] \in M_{25}$ и вычислим ее определитель; получим, что $\det L_0 = -1$. Следовательно, $\operatorname{rank} L_0 = 25$, значит, $\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{24}G] = 25$, что и требовалось доказать.

2. $\mathbf{m=3}$, $\mathbf{k=3}$, $\mathbf{p=3}$.

По аналогии со случаем 1 можно считать без ограничения общности, что матрицы B и C системы $\Sigma = (A, B, C)$ имеют вид

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

матрица A имеет вид (19). Построим матрицы (15), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & z & w \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & z & w \\ x + wy & y + wz & z + w^2 \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{23}$$

Очевидно, что матрицы (23) линейно независимы для любых x, y, z, w. Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{25}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{25,9}$. Вычеркнем в матрице G столбцы 1, 2, 4 и 5, полученную матрицу обозначим через $G_1 \in M_{25,5}$. Построим матрицу $L_0 = [G_1, FG_1, F^2G_1, F^3G_1, F^4G_1] \in M_{25}$ и вычислим ее определитель; получим, что $\det L_0 = -1$. Следовательно, $\operatorname{rank} L_0 = 25$, значит, $\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{24}G] = 25$, что и требовалось доказать.

4. $\mathbf{m=3}$, $\mathbf{k=2}$, $\mathbf{p=2}$.

Можно считать без ограничения общности, что матрица C имеет вид (21). Матрица B имеет вид

$$B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\b_{41}&b_{42}&b_{43}\\b_{51}&b_{52}&b_{53}\end{Vmatrix}.$$

Вторая строка матрицы B не равна нулю (в противном случае $C^*B=0\in M_{2,3}$). Следовательно, во второй строке найдется ненулевой элемент. Предположим, что $b_{21}\neq 0$ (если $b_{21}=0$, то поменяем местами столбцы матрицы B так, что $b_{21}\neq 0$). Тогда, силу замечания 5, можно считать, что $b_{21}=1$. Прибавляя ко второму и к третьему столбцам первый столбец, умноженный на соответствующие коэффициенты, можно добиться того, что $b_{22}=0$, $b_{23}=0$. Далее, рассмотрим элементы b_{32},b_{33}. Возможны два случая: (1) $b_{32}=b_{33}=0$; (2) $b_{32}\neq 0$ или $b_{33}\neq 0$.

(1) Пусть $b_{32}=b_{33}=0$. Тогда элементы b_{42}, b_{43} не могут быть равны нулю одновременно (иначе $\operatorname{rank} B<3$). Следовательно, в силу замечания 5, без ограничения общности можно считать, что $b_{42}=1$, и тогда $b_{41}=b_{43}=0$ (этого можно добиться, прибавляя к первому и к третьему столбцам второй столбец, умноженный на некоторые коэффициенты). Тогда элемент b_{53} не может быть равен нулю (иначе $\operatorname{rank} B<3$). Следовательно, можно считать, что $b_{53}=1$ и $b_{51}=b_{52}=0$.

(2) Пусть $b_{32}\neq 0$ или $b_{33}\neq 0$. Можно считать, что $b_{32}\neq 0$. Тогда, далее, можно считать, что $b_{32}=1$, $b_{31}=b_{33}=0$. Рассмотрим элемент b_{43}. Возможны два случая: (2.1) $b_{43}=0$; (2.2) $b_{43}\neq 0$.

(2.1) Пусть $b_{43}=0$. Тогда $b_{53}\neq 0$ (иначе $\operatorname{rank} B<3$). Тогда можно считать, что $b_{53}=1$ и $b_{51}=b_{52}=0$.

(2.2) Пусть $b_{43}\neq 0$. Тогда можно считать, что $b_{43}=1$ и $b_{41}=b_{42}=0$.

Таким образом, все возможные значения матрицы B (без ограничения общности) исчерпываются тремя указанными выше случаями (1), (2.1), (2.2). Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности, обозначив их пунктами 4.1, 4.2, 4.3.

4.1.

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&x&y&z&w\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\1&0&0\\r&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{Vmatrix},$$

$x,y,z,w,r\in\mathbb{K}$ — произвольные числа. Построим матрицы (15), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}1&0&0\\r&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}r&0&0\\0&1&0\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&0&1\\x+yr&z&w\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{24}$$

Очевидно, что матрицы (24) линейно независимы для любых x,y,z,w,r. Построим матрицы

$$F=A\otimes(A^\top)^{-1}\in M_{25},\qquad G=B\otimes\overline{C}\in M_{25,6}.\tag{25}$$

Далее, построим матрицу

$$W=[G,FG,F^2G,F^3G,F^4G,F^5G]\in M_{25,36}.\tag{26}$$

Здесь и всюду далее (в случае 4 и в случае 6) будем использовать следующие рассуждения. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\operatorname{rank} W=25$. Для этого достаточно выбрать ненулевой минор порядка 25 в матрице W. Обозначим через h_i, $i=\overline{1,36}$, столбцы матрицы W, то есть $W = [h_1, \dots, h_{36}]$, $h_i \in \mathbb{K}^{25}$. Рассмотрим всевозможные упорядоченные размещения без повторений $\sigma_\nu = (i_1, \dots, i_{25})$ из 36 элементов (от 1 до 36) по 25 элементов: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{25} \leqslant 36$. Всякому размещению $\sigma_\nu = (i_1, \dots, i_{25})$ поставим в соответствие матрицу $R_\nu = [h_{i_1}, \dots, h_{i_{25}}]$, составленную из столбцов h_{i_j} матрицы W с номерами i_j, входящими в состав размещения σ_ν. Столбцы h_{i_j}, $j = 1, \dots, 25$, в матрице R_ν располагаются в том же порядке, в котором номера i_j входят в размещение σ_ν. Для всякой матрицы R_ν вычисляем определитель $\mu_\nu = \det R_\nu$. Если найдется размещение σ_{ν_0}, для которого $\mu_{\nu_0} \neq 0$, следовательно, теорема 2 доказана.

Так, в случае 4.1 выбираем размещение

$$\sigma_1 = (1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 34).$$

Вычисляя соответствующий минор μ_1, получаем, что $\mu_1 = 1$, что и требовалось.

4.2.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$x, y, z, w, r, s \in \mathbb{K}$ — произвольные числа. Построим матрицы (15), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r & s & 0 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} r & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x+zr & y+zs & w \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{27}$$

Очевидно, что матрицы (27) линейно независимы для любых x, y, z, w, r, s. Построим матрицы (25) и матрицу (26). Строим размещение

$$\sigma_2 = (1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 36)$$

и вычисляем соответствующий минор μ_2 матрицы W. Получаем, что $\mu_2 = 1$, что и требовалось.

4.3.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & s \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$x, y, z, w, r, q, s \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (15), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r & q & s \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} r & q & s \\ x+wr & y+wq & z+ws \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{28}$$

Построим матрицу

$$V = [\mathrm{vec}\,(C^*B), \dots, \mathrm{vec}\,(C^*A^4B)] = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 1 & 0 & 0 & r & x+wr \\ 0 & 1 & 0 & q & y+wq \\ 0 & 0 & 1 & s & z+ws \end{Vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_i, $i = \overline{1,6}$, определитель матрицы, полученной из матрицы V вычеркиванием i-й строки. Получим, что $\Delta_4 = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= z + ws - q - s^2 = -\Delta_5, \\ \Delta_2 &= y + wq - r - sq = -\Delta_6, \\ \Delta_3 &= qz - sy - q^2 + sr. \end{aligned} \tag{29}$$

По условию теоремы, матрицы (28) линейно независимы, следовательно, ранг матрицы V равен 5. Отсюда следует, что хотя бы одно из чисел (29) не равно нулю. Построим матрицы (25) и матрицу (26).

Пусть $\Delta_1 \neq 0$. Строим размещение

$$\sigma_3 = (1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 36)$$

и вычисляем соответствующий минор μ_3 матрицы W. Получаем, что $\mu_3 = (-z - ws + q + s^2)^5$. Следовательно, $\mu_3 = -\Delta_1^5 \neq 0$, что и требовалось.

Пусть $\Delta_2 \neq 0$. Строим размещение

$$\sigma_4 = (1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 34)$$

и вычисляем соответствующий минор μ_4 матрицы W. Получаем, что $\mu_4 = (-y - wq + r + sq)^5$. Следовательно, $\mu_4 = -\Delta_2^5 \neq 0$, что и требовалось.

Если $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то

$$0 = \Delta_1 q - \Delta_2 s = (z + ws - q - s^2)q - (y + wq - r - sq)s = zq - ys - q^2 + rs = \Delta_3.$$

Следовательно, $\Delta_i = 0$ для всех $i = \overline{1,6}$. Но это противоречит линейной независимости матриц (28). Следовательно, числа Δ_1, Δ_2 не могут одновременно обращаться в ноль. Согласованность системы Σ доказана. Случай 4 полностью разобран.

6. $\mathbf{m = 2}$, $\mathbf{k = 3}$, $\mathbf{p = 3}$.

По аналогии со случаем 4 можно показать, что без ограничения общности все возможные значения матриц системы Σ исчерпываются случаями 6.1 и 6.2.

6.1.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$x, y, z, w, r \in \mathbb{K}$ — произвольные числа. Построим матрицы (15), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \\ y + zr & w \end{Vmatrix}, \\ C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ y + zr & w \\ x + wy + (y + wz)r & z + w^2 \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{30}$$

Очевидно, что матрицы (30) линейно независимы для любых x, y, z, w, r. Построим матрицы (25) и матрицу (26). Строим размещение

$$\sigma_5 = (2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 36)$$

и вычисляем соответствующий минор μ_5 матрицы W. Получаем, что $\mu_5 = 1$, что и требовалось.

6.2.

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&x&y&z&w\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\r&q\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},$$

$x,y,z,w,r,q\in\mathbb{K}$ — произвольные числа. Построим матрицы (15), получим

$$C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{Vmatrix},\ C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\ C^*A^2B=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\r&q\end{Vmatrix},\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}0&1\\r&q\\y+wr&z+wq\end{Vmatrix},$$

$$C^*A^4B=\begin{Vmatrix}r&q\\y+wr&z+wq\\x+wy+(z+w^2)r&y+wz+(z+w^2)q\end{Vmatrix}. \tag{31}$$

Построим матрицу

$$V=[\mathrm{vec}\,(C^*B),\dots,\mathrm{vec}\,(C^*A^4B)]=\begin{Vmatrix}0&0&1&0&r\\0&0&0&1&q\\0&1&0&r&y+wr\\0&0&1&q&z+wq\\1&0&r&y+wr&x+wy+(z+w^2)r\\0&1&q&z+wq&y+wz+(z+w^2)q\end{Vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_i, $i=\overline{1,6}$, определитель матрицы, полученной из матрицы V вычеркиванием i-й строки. Получим, что

$$\begin{aligned}&\Delta_1=(w-q)(q^2-wq-z+r), &&\Delta_3=-(q^2-wq-z+r), &&\Delta_5=0,\\ &\Delta_2=(z-r)(q^2-wq-z+r), &&\Delta_4=w(q^2-wq-z+r), &&\Delta_6=\Delta_3.\end{aligned} \tag{32}$$

Обозначим $\Delta:=q^2-wq-z+r$. По условию теоремы, матрицы (31) линейно независимы, следовательно, ранг матрицы V равен 5. Отсюда следует, что хотя бы одно из чисел (32) не равно нулю. Следовательно,

$$\Delta\neq 0. \tag{33}$$

Построим матрицы (25) и матрицу (26). Построим следующие размещения:

$$\begin{aligned}\sigma_6&=(1,2,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23,25,26,27,29,33),\\ \sigma_7&=(1,2,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23,26,27,28,29,33),\\ \sigma_8&=(1,2,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23,26,27,29,33,35).\end{aligned}$$

Вычислим соответствующие миноры μ_6,μ_7,μ_8 матрицы W, получим

$$\begin{aligned}\mu_6&=(q^2-wq-z+r)^5r,\\ \mu_7&=(q^2-wq-z+r)^5q,\\ \mu_8&=(q^2-wq-z+r)^5(z+wq).\end{aligned}$$

Покажем, что среди миноров μ_{6-8} существует ненулевой минор. Предположим противное, что $\mu_6=\mu_7=\mu_8=0$. В силу неравенства (33) отсюда следует, что выполнены равенства

$$r=0,\quad q=0,\quad z+wq=0.$$

Но тогда получим, что $\Delta=q^2-wq-z+r=0$. Это противоречит условию (33). Таким образом, предположение неверно и среди миноров μ_{6-8} существует ненулевой минор. Случай 6 полностью разобран.

На этом доказательство теоремы 2 завершено. □

Замечание 6. Вычисления определителей матриц размерностей 25×25 производились на ПЭВМ с процессором Intel i7-3610QM с 6 Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 7 (64-bit). Для вычисления использовалась система Maple 15, пакет LinearAlgebra, функция Determinant, метод algnum. Время вычисления каждого из определителей в случаях 1, 2 и миноров μ_{1-8} составляет меньше 1 секунды. Если в функции Determinant использовать другой метод либо вовсе не указывать метод, время вычисления одного определителя может возрастать на несколько порядков. Так, время T_i вычисления минора μ_i с помощью функции Determinant без указания метода вычисления составило (в секундах): $T_1 = 1$, $T_2 = 4$, $T_3 > 20000$, $T_4 > 20000$, $T_5 = 1$, $T_6 = 628$, $T_7 = 800$, $T_8 = 1111$. Разложение определителя, зависящего от нескольких переменных, на множители осуществляется с помощью функции factor. Операция занимает менее 1 секунды. Размещения σ_{1-8} были найдены перебором с помощью компьютера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев В.А., Максимова Н.В. К свойству согласованности четырехмерных дискретных линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью специального вида // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 19–31.
2. Зайцев В.А. Управление спектром собственных значений в системах с дискретным временем // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. ВСПУ-2014. Москва. ИПУ РАН, 2014. С. 862–867.
3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
4. Zaitsev V.A. Consistency and pole assignment in linear systems with incomplete feedback // Proceedings of IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. 2009. University of Jyvaskyla, Finland. Vol. 7. Part 1. P. 344–345. http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41934.html
5. Зайцев В.А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1320–1328.
6. Зайцев В.А. Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 7. С. 1061–1064.
7. Зайцев В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1789–1793.
8. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 1. С. 117–131.
9. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. II // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 851–859.
10. Зайцев В.А. Согласованность и управление спектром в линейных системах с наблюдателем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 50–80.

Поступила в редакцию 12.07.2014

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

V. A. Zaitsev

Consistency of discrete-time linear stationary control systems with an incomplete feedback of the special form for $n = 5$

Keywords: linear control system, incomplete feedback, consistency, eigenvalue assignment, stabilization, discrete-time system.

MSC: 93B55, 93C05, 93C55, 93D15

We consider a discrete-time linear control system with an incomplete feedback

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = C^*x(t), \quad u(t) = Uy(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (x,u,y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^k,$$

where $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. We introduce the concept of consistency for the closed-loop system

$$x(t+1) = (A + BUC^*)x(t), \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{1}$$

This concept is a generalization of the concept of complete controllability to systems with an incomplete feedback. We study the consistency of the system (1) in connection with the problem of arbitrary placement of eigenvalue spectrum which is to bring a characteristic polynomial of a matrix of the system (1) to any prescribed polynomial by means of the time-invariant control U. For the system (1) of the special form where the matrix A is Hessenberg and the rows of the matrix B before the p-th and the rows of the matrix C after the p-th (not including p) are equal to zero, the property of consistency is the sufficient condition for arbitrary placement of eigenvalue spectrum. In previous studies it has been proved that the converse is true for $n < 5$ and false for $n > 5$. In this paper, an open question for $n = 5$ is resolved. For the system (1) of the special form, it is proved that if $n = 5$ then the property of consistency is a necessary condition for the arbitrary placement of eigenvalue spectrum. The proof is carried out by direct searching of all possible valid values of dimensions m, k, p. The property of consistency is equivalent to the property of complete controllability of a big system of dimension n^2. For the proof we construct the big system and the controllability matrix K of this system of dimension $n^2 \times n^2mk$. We show that the matrix K has a nonzero minor of order $n^2 = 25$. We use Maple 15 to calculate the high-order determinants.

REFERENCES

1. Zaitsev V.A., Maksimova N.V. To the property of consistency for four-dimensional discrete-time linear stationary control systems with incomplete feedback of the special form, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 19–31 (in Russian).

2. Zaitsev V.A. Eigenvalue assignment in discrete-time systems, *Proceedings of XII All-Russian Conference on Control*, Moscow, Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, 2014, pp. 862–867 (in Russian).

3. Lancaster P. *Theory of matrices*, New York–London: Academic Press, 1969. Translated under the title *Teoriya matrits*, Moscow: Nauka, 1978, 280 p.

4. Zaitsev V.A. Consistency and pole assignment in linear systems with incomplete feedback, *Proceedings of IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. University of Jyvaskyla, Finland*, Jyvaskyla, 2009, vol. 7, part 1, pp. 344–345. http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41934.html

5. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 9, pp. 1348–1357.

6. Zaitsev V.A. Control of spectrum in bilinear systems, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1071–1075.

7. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 12, pp. 1789–1793.

8. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: I, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 120–135.

9. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: II, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 857–866.

10. Zaitsev V.A. Consistency and control over spectrum in linear systems with an observer, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 50–80 (in Russian).

Received 12.07.2014

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru