УДК 517.977.8

© *А. С. Банников, Н. Н. Петров*

ЛИНЕЙНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ УБЕГАЮЩИМИ [1]

Рассматривается линейная нестационарная дифференциальная игра преследования группы убегающих группой преследователей. Цель преследователей — поймать всех убегающих, цель убегающих — хотя бы одному уклониться от встречи. Все игроки обладают равными динамическими возможностями, геометрические ограничения на управление — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Рассматривается вопрос о минимальном количестве убегающих, достаточном для уклонения от заданного числа преследователей из любых начальных позиций. Для оценки сверху этого количества используются достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения. В предположении, что для поимки одного убегающего достаточно принадлежности начальной позиции убегающего внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей, строится оценка снизу.

Полученная двухсторонняя оценка числа убегающих, достаточного для уклонения от встречи из любой начальной позиции от заданного числа преследователей, иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, убегающий, преследователь.

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Айзексом [1], в настоящее время представляют содержательную математическую теорию [2–11]. Были разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе определенного уравнения в частных производных и его характеристик, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие. Естественным обобщением дифференциальных игр преследования–уклонения двух лиц являются игры с участием группы преследователей и одного или нескольких убегающих [12–15]. Эти игры интересны с теоретической точки зрения, так как не могут быть решены при помощи теории для игр двух лиц. Одна из причин этого состоит в том, что объединение множеств достижимости всех преследователей и объединение всех целевых множеств представляют собой множества, не являющиеся выпуклыми и, более того, не являющиеся связными. С другой стороны, есть некоторые приложения этих игр к задачам движения транспортных средств, избежания столкновений кораблей и др. Наиболее сложными задачами преследования–уклонения являются задачи с участием группы преследователей и группы убегающих. По всей видимости, первой работой, посвященной задаче преследования–уклонения с участием группы преследователей и группы убегающих, была работа [16], в которой были получены достаточные условия разрешимости локальной и глобальных задач уклонения и двухсторонние оценки для наименьшего числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций в предположении, что все участники обладают простым движением, множеством допустимых управлений является шар единичного радиуса с центром в начале координат. Улучшенная оценка снизу для наименьшего числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей, была получена в [17]. В работах [18,19] были получены достаточные условия разрешимости локальной и глобальной задач уклонения в линейных стационарных дифференциальных играх со многими преследователями и убегающими в предположении, что все участники обладают равными динамическими возможностями, а множество допустимых управлений — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Кроме того, в работе [19] получена оценка сверху для наименьшего

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12–01–00195 и № 14–01–31176).

числа преследователей, уклоняющихся от заданного числа убегающих из любых начальных позиций. В работах [20, 21] получены соответствующие оценки для некоторых конкретных игровых задач с участием групп преследователей и убегающих.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей и m убегающих. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$, имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид

$$\dot{y}_j(t) = A(t)y_j(t) + v_j(t), \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v_j \in U, \tag{2}$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $A(t)$ — квадратная матрица порядка n, непрерывная на всей оси t.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z^0)$, где $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$.

Определение 1. В дифференциальной игре $\Gamma(n, m, z^0)$ из начального состояния z^0 *разрешима локальная задача уклонения*, если существуют такие управления $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ убегающих, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей найдется номер $s \in \{1, \ldots, \mu\}$ такой, что $y_s(t) \neq x_i(t)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ при всех $t \geqslant t_0$. При этом в момент t управления убегающих формируются на основе реализовавшейся позиции

$$z(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_m(t)).$$

Определение 2. В дифференциальной игре $\Gamma(n, m)$ *разрешима глобальная задача уклонения*, если из любого начального состояния z^0 в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ разрешима локальная задача уклонения.

Определение 3. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ *происходит поимка убегающего* E_p, если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t^1(\cdot), \ldots, v_t^m(\cdot)), \ldots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t^1(\cdot), \ldots, v_t^m(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что что для любых измеримых функций $v^1(\cdot), \ldots, v^m(\cdot)$, $v^j(t) \in U$ для всех $t \in [t_0, T(z^0)]$ и всех j существуют момент времени $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ и номер s, что $x_s(\tau) = y_p(\tau)$, где $v_t^l(\cdot) = \{v^l(s), s \in [0, t]\}$ — предыстория убегающего E_l.

Определение 4. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ *происходит поимка,* если в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит поимка убегающих $E_1, \ldots, E_m$.

Определим **функцию** $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$$f(n) = \min\{m \mid \text{в игре } \Gamma(n, m, z^0) \ \text{ происходит уклонение от встречи для любого } z^0\} =$$
$$= \min\{m \mid \text{в игре } \Gamma(n, m) \text{ разрешима глобальная задача уклонения}\}.$$

К настоящему времени известны значения функции f только в некоторых отдельных точках. В частности, $f(n) = 1$, если $n \leqslant k$, $f(k+1) = f(k+2) = 2$. Поэтому возникает задача об асимптотическом поведении функции f.

§ 2. Оценка функции f снизу

Предположение 1. *Если* $y_1^0 \in \operatorname{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$, *то в игре* $\Gamma(n, 1, z^0)$ *происходит поимка.*

Отметим, что данное предположение, в частности, выполнено для задачи простого преследования [22], для рекуррентных дифференциальных игр, если множество допустимых управлений игроков — строго выпуклый компакт с гладкой границей [23].

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда существует константа* $C_1 > 0$ *такая, что для всех* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, *справедливо следующее неравенство:*

$$f(n) \geqslant C_1 n \ln n.$$

Предварительно докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор начальных позиций z^0 такой, что в игре $\Gamma((k+1)^n, n(k+1)^{n-1}, z^0)$ происходит поимка. Доказательство данного факта проведем по индукции. Если $n = 1$, то данный факт является следствием предположения 1. Предположим, что утверждение верно для всех $n \leqslant p$. Докажем данное утверждение для $n = p + 1$.

В силу индукционного предположения существует вектор начальных позиций z^0 такой, что в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$ происходит поимка не позднее момента T. Зафиксируем данные начальные позиции.

Пусть A — множество данных начальных позиций, R — радиус шара с центром в начале координат, который содержит все положения игроков в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$ до момента T.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^k$ правильный симплекс с вершинами $a_1, \ldots, a_{k+1}$ и длиной ребра β. Сделаем трансляцию множества A на каждый из векторов a_s, $s = 1, \ldots, k+1$, и рассмотрим все точки вида $a_s + x_i^0$, где x_i^0 — начальное положение преследователя P_i в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$, a_s — один из вектров $a_1, \ldots, a_{k+1}$.

В каждую из точек данного вида поместим по преследователю, получим $(k+1)^p$ преследователей.

В каждую точку вида $y_j^0 + a_s$, где y_j^0 — положение убегающего E_j в момент $t = t_0$ в игре $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^p, z^0)$, a_s — один из векторов $a_1, \ldots, a_{k+1}$, поместим по убегающему, получим $p(k+1)^p$ убегающих. Еще $(k+1)^p$ убегающих поместим внутрь шара $D_1(\hat{z})$ единичного радиуса с центром в центре $\hat{z}$ симплекса. Тогда общее число убегающих будет $(p+1)(k+1)^p$.

Рассмотрим получившуюся игру $\Gamma((k+1)^{p+1}, (p+1)(k+1)^p, z^0)$ и покажем, что β можно подобрать так, чтобы в данной игре произошла поимка. Для этого рассмотрим шары $D_1, \ldots, D_{k+1}$ радиуса R с центрами в точках $a_1, \ldots, a_{k+1}$ соответственно. Обозначим через H_j гиперплоскость, опорную к каждому из шаров $D_s (s \neq j)$ и разделяющую $\bigcup\limits_{s \neq j} D_s$ и D_j.

Такая гиперплоскость существует, если β достаточно велико. Пусть H_j^+ — замкнутое полупространство, определяемое гиперплоскостью H_j и содержащее D_j, $F(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{w} = A(t)w$, $F(t_0) = E$, где E — единичная матрица, R_j — положительные числа, такие, что

$$\bigl\{z \mid z = F(t)(y_j^0 + \int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)U ds)\bigr\} \subset D_{R_j}(y_j^0)$$

для всех $t \in [t_0, T]$, $y_j^0 \in D^0$, где $D_R(a)$ — шар радиуса R с центром в точке a. Выберем $R_0 > 0$ так, что $D_{R_j}(y_j^0) \subset D_{R_0}(\hat{z})$ для всех j, для которых $y_j^0 \in D_1(\hat{z})$.

Возьмем β так, чтобы множество $H = \bigcap\limits_{j=1}^{k+1} H_j^+$ содержало шар $\widetilde{D}$ радиуса $2R_0 + 2$ с центром в точке $\hat{z}$. Покажем, что такой выбор β гарантирует поимку в игре $\Gamma((k+1)^{p+1}, (p+1)(k+1)^p, z^0)$. Обозначим через $A_j = A + a_j$, $j = 1, \ldots, k+1$; $\mu = (k+1)^p$, $\nu = p(k+1)^{p-1}$, $P_1^i, \ldots, P_\mu^i$ — преследователи, начальные позиции которых при $t = t_0$ находятся в A_i; $E_1^i, \ldots, E_\nu^i$ — убегающие, начальные позиции которых при $t = t_0$ находятся в A_i, $i = 1, \ldots, k+1$; $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\mu$ — убегающие, начальные позиции которых при $t = t_0$ лежат в шаре $D_1(\hat{z})$; $x_1^i(T), \ldots, x_\mu^i(T)$ — положения преследователей $P_1^i, \ldots, P_\mu^i$ в момент $t = T$; $\overline{y}_1(T), \ldots, \overline{y}_\mu(T)$ — положения убегающих $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\mu$ в момент $t = T$. Преследователи строят свои стратегии следующим образом:

сначала преследователи $P_1^i, \dots, P_\mu^i$ ловят убегающих $E_1^i, \dots, E_\nu^i$, $i = 1, \dots, k+1$. В силу индукционного предположения поимка указанных убегающих произойдет не позднее момента T, в момент $t = T$ преследователи $P_1^1, P_2^1, \dots, P_\mu^{k+1}$ начинают ловить убегающих $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_\mu$. Так как, в силу выбора β, $\widetilde{D} \subset H$, то $y_j(T) \in \operatorname{Intco}\{x_i^1(T), \dots, x_i^{k+1}(T)\}$. Поэтому из предположения 1 следует возможность поимки убегающих $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_\mu$; преследователи $P_i^1, \dots, P_i^{k+1}$ ловят убегающего $\overline{E}_i$, $i = 1, \dots, \mu$.

Тем самым доказано, что в игре $\Gamma((k+1)^{p+1}, (p+1)(k+1)^p, z^0)$ происходит поимка.

Поэтому

$$f((k+1)^p) \geqslant p(k+1)^{p-1} \text{ для всех } p \in \mathbb{N}.$$

Пусть n — произвольное натуральное число ($n \geqslant k+1$), p — натуральное число такое, что

$$(k+1)^p \leqslant n, \quad (k+1)^{p+1} > n.$$

Тогда $f(n) \geqslant f((k+1)^p) \geqslant p(k+1)^{p-1}$. Так как $p = [\log_{k+1} n]$, то

$$f(n) \geqslant C_1 n \ln n.$$

Теорема доказана. □

§ 3. Достаточные условия разрешимости задачи уклонения и оценка функции f сверху

Теорема 2. *Для любых натуральных чисел p, m таких, что $m \geqslant p2^p + 2$, в игре $\Gamma(2^p + 1, m, z^0)$ разрешима глобальная задача уклонения.*

Пусть $n = 2^p + 1$, $x_1^0, \dots, x_n^0$ — начальные позиции преследователей, $y_1^0, \dots, y_m^0$ — начальные позиции убегающих. Считаем, что точки $x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0$ попарно различны. Пусть q — единичный вектор, такой, что

$$(q, x_i^0 - x_j^0) \neq 0, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n, \tag{3}$$

$$(q, y_i^0 - y_j^0) \neq 0, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant m, \tag{4}$$

$$(q, y_j^0 - x_i^0) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \tag{5}$$

Пусть $H_1, \dots, H_n$ — гиперплоскости с нормалью q такие, что $x_i^0 \in H_i$, $i = 1, \dots, n$, причем $H_{i+1}^+ \subset H_i^+$, $i = 1, \dots, n-1$. Считаем, что q направлен в H_1^+ и $y_j^0 \in H_1^+ \cap H_n^-$, $j = 1, \dots, m$.

Зададим управления $v_1(t), \dots, v_m(t)$ следующим образом. При $p = 1$ рассмотрим множества

$$A_1 = \{j | y_j^0 \in H_1^+ \cap H_2^-\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\},$$
$$A_2 = \{j | y_j^0 \in H_2^+ \cap H_3^-\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\},$$

причем

$$(q, y_{\alpha_1}^0) < (q, y_{\alpha_2}^0) < \dots < (q, y_{\alpha_s}^0), \tag{6}$$

$$(q, y_{\beta_1}^0 > (q, y_{\beta_2}^0) > \dots > (q, y_{\beta_r}^0). \tag{7}$$

Обозначим через $\overline{x}_1$ траекторию игрока P_1, если управление $\overline{u}_1$ выбирается из равенства

$$(\overline{u}_1(t), \overline{\psi}_1(t)) = C(U; \overline{\psi}_1(t)), \tag{8}$$

где $\overline{\psi}_1(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t) \tag{9}$$

при $\overline{\psi}_1(t_0) = q$.

Аналогично, $\overline{x}_3$ — траектория игрока P_3, соответствующая управлению $\overline{u}_3$, которое выбирается из равенства

$$(\overline{u}_3(t), \overline{\psi}_3(t)) = C(U; \overline{\psi}_3(t)),$$

где $\overline{\psi}_3(t)$ — решение сопряженной системы (9) при $\overline{\psi}_1(t_0) = -q$.

Пусть

$$H^1(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (x, q) = (\overline{x}_1(t), q)\}, \tag{10}$$

$$H^2(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (x, q) = (\overline{x}_3(t), q)\}, \tag{11}$$

$$P(x, G) = \{p \in \partial S \colon (x, p) - C(G; p) \geqslant 0\} \quad (G \text{ — выпуклый компакт}). \tag{12}$$

Обозначим $t^* = \min\{t \colon H^1(t) = H^2(t)\}$. До момента $t = t_{\alpha_1}$, когда убегающий E_{α_1} впервые попадает на гиперплоскость $H^1(t)$, управление $v_{\alpha_1}(t)$ находим из равенства

$$(u_{\alpha_1}(t), \psi_{\alpha_1}(t)) = C(U; \psi_{\alpha_1}(t)),$$

где $\psi_{\alpha_1}(t)$ — решение системы (9) при $\psi_{\alpha_1}(0) = q_{\alpha_1}$,

$$q_{\alpha_1} \in P(y^0_{\alpha_1}, \mathrm{co}\{\bigcup_{i=2,\ldots,s} y^0_{\alpha_i}, \bigcup_{i \in A_2} y^0_i, \bigcup_{i=2,3} x^0_i\}), \text{ если } s > 1,$$

$$q_{\alpha_1} \in P(y^0_{\alpha_1}, \mathrm{co}\{\bigcup_{i \in A_2} y^0_i, \bigcup_{i=2,3} x^0_i\}), \text{ если } s = 1.$$

При $t \geqslant t_{\alpha_1}$ положим $v_{\alpha_1}(t) = \overline{u}_1(t)$. Кроме того, выбираем q_{α_1} так, чтобы $y_{\alpha_1}(t_{\alpha_1}) \neq \overline{x}_1(t_{\alpha_1})$, $y_{\alpha_1}(t^*) \neq \overline{x}_3(t^*)$. Если такого момента t_{α_1} не существует, то считаем $t_{\alpha_1} = +\infty$. При выбранном управлении убегающий E_{α_1} избежит поимки. Поэтому считаем, что $t_{\alpha_1} < +\infty$.

Предположим, что управления игроков $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_{i-1}}$, $i \leqslant s$, заданы. Определим управление игрока E_{α_i}. До момента $t = t_{\alpha_i}$, когда убегающий E_{α_i} впервые попадает на гиперплоскость $H^1(t)$, управление $v_{\alpha_i}(t)$ находим из равенства

$$(u_{\alpha_i}(t), \psi_{\alpha_i}(t)) = C(U; \psi_{\alpha_i}(t)),$$

где $\psi_{\alpha_i}(t)$ — решение сопряженной системы (9) при $\psi_{\alpha_i}(t_0) = q_{\alpha_i}$,

$$q_{\alpha_i} \in P(y^0_{\alpha_i}, \mathrm{co}\{\bigcup_{l=i+1,\ldots,s} y^0_{\alpha_l}, \bigcup_{i \in A_2} y^0_i, \bigcup_{i=2,3} x^0_i\}), \text{ если } i < s,$$

$$q_{\alpha_s} \in P(y^0_{\alpha_s}, \mathrm{co}\{\bigcup_{i \in A_2} y^0_i, \bigcup_{i=2,3} x^0_i\}).$$

При $t \geqslant t_{\alpha_i}$ положим $v_{\alpha_i}(t) = \overline{u}_1(t)$. Кроме того, вектор q_{α_i} выбираем так, чтобы $y_{\alpha_i}(t_{\alpha_i}) \neq \overline{x}_1(t_{\alpha_i})$, $y_{\alpha_1}(t^*) \neq \overline{x}_3(t^*)$, $y_{\alpha_i}(t_{\alpha_i}) \neq y_l(t_{\alpha_i})$, $l = 1, \ldots, i-1$. Если такого момента t_{α_i} не существует, то считаем $t_{\alpha_i} = +\infty$. При выбранном управлении убегающий E_{α_i} избежит поимки. Поэтому считаем, что $t_{\alpha_i} < +\infty$, $i = 1, \ldots, s$.

Считая управления убегающих $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_s}$ заданными, построим управления убегающих $E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_r}$. До момента $t = t_{\beta_1}$, когда убегающий E_{β_1} впервые попадает на гиперплоскость $H^2(t)$, управление $v_{\beta_1}(t)$ находим из равенства

$$(u_{\beta_1}(t), \psi_{\beta_1}(t)) = C(U; \psi_{\beta_1}(t)),$$

где $\psi_{\beta_1}(t)$ — решение системы (9) при $\psi_{\beta_1}(t_0) = q_{\beta_1}$,

$$q_{\beta_1} \in P(y^0_{\beta_1}, \mathrm{co}\{\bigcup_{i=2,\ldots,r} y^0_{\beta_i}, \bigcup_{i \in A_1} y^0_i, \bigcup_{i=1,2} x^0_i\}), \text{ если } r > 1,$$

$$q_{\beta_1} \in P(y^0_{\beta_1}, \mathrm{co}\{\bigcup_{i \in A_1} y^0_i, \bigcup_{i=1,2} x^0_i\}), \text{ если } r = 1.$$

Положим $v_{\beta_1}(t) = \overline{u}_3(t)$ при $t \in [t_{\beta_1}, t^*)$, при $t \geqslant t_{\beta_1}$ $v_{\beta_1}(t) = \overline{u}_1(t)$. Кроме того, выбираем вектор q_{β_1} так, чтобы

$$y_{\beta_1}(t_{\beta_1}) \neq \overline{x}_3(t_{\beta_1}), \quad y_{\beta_1}(t^*) \neq y_{\alpha_l}(t^*),\ l = 1, \ldots, s, \quad y_{\beta_1}(t^*) \neq \overline{x}_1(t^*).$$

Пусть управления игроков $E_{\beta_1}(t), \ldots, E_{\beta_{i-1}}$, $i \leqslant r$, заданы. Определим управление убегающего E_{β_i}. До момента $t = t_{\beta_i}$, когда убегающий E_{β_i} впервые попадает на гиперплоскость $H^2(t)$, управление $v_{\beta_i}(t)$ находим из равенства

$$(u_{\beta_i}(t), \psi_{\beta_i}(t)) = C(U; \psi_{\beta_i}(t)),$$

где $\psi_{\beta_i}(t)$ — решение сопряженной системы (9) при $\psi_{\beta_i}(t_0) = q_{\beta_i}$,

$$q_{\beta_i} \in P(y^0_{\beta_i}, \mathrm{co}\{\bigcup_{l=i+1,\ldots,r} y^0_{\alpha_l}, \bigcup_{i \in A_1} y^0_i, \bigcup_{i=1,2} x^0_i\}),\ \text{если } i < r,$$
$$q_{\beta_r} \in P(y^0_{\beta_r}, \mathrm{co}\{\bigcup_{i \in A_1} y^0_i, \bigcup_{i=1,2} x^0_i\}).$$

Положим

$$v_{\beta_i} = \overline{u}_3(t), \quad t \in [t_{\beta_i}, t^*),$$
$$v_{\beta_i} = \overline{u}_1(t), \quad t \in [t^*, +\infty),$$

причем вектор q_{β_i} выбираем так, чтобы

$$y_{\beta_i}(t_{\beta_i}) \neq \overline{x}_3(t_{\beta_i}), \quad y_{\beta_i}(t_{\beta_i}) \neq y_{\beta_l}(t_{\beta_i}), \quad l = 1, \ldots, i-1,$$
$$y_{\beta_i}(t^*) \neq \overline{x}_1(t^*), \quad y_{\beta_i}(t^*) \neq y_{\alpha_l}(t^*), \quad l = 1, \ldots, s.$$

Если такого момента t_{β_i} не существует, то считаем $t_{\beta_i} = +\infty$. При выбранном управлении убегающий E_{β_i} избежит поимки. Поэтому считаем, что $t_{\beta_i} < +\infty$, $i = 1, \ldots, r$.

Если $H^1(t) \neq H^2(t)$ для любого $t > t_0$, то положим $t^* = +\infty$. При выбранных таким образом управлениях игроков E_j, $j = 1, \ldots, m$, преследователи P_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, могут поймать только одного убегающего. Если же $t^* < +\infty$, то преследователи могут поймать не более трех убегающих.

Предположим, что управления игроков $E_1, \ldots, E_m$ для любого $p < k$ определены. Построим управления убегающих при $p = k$.

Пусть $n_1 = 2^{k-1} + 1$,

$$A_1 = \{j \in \{1, \ldots, m\} \colon y^0_j \in H^+_1 \cap H^-_{n_1}\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\},$$
$$A_2 = \{j \in \{1, \ldots, m\} \colon y^0_j \in H^+_{n_1} \cap H^-_n\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$$

и выполнены неравенства (6), (7). Гиперплоскость $H^1(t)$ определим равенством (10), где $\overline{x}_1$ — траектория игрока P_1, соответствующая управлению $\overline{u}_1$, выбранному из условия (8), в котором $\overline{\psi}_1(t)$ — решение сопряженной системы (9) при $\overline{\psi}_1(t_0) = q$. Обозначим через $\overline{x}_n(t)$ траекторию игрока P_n, соответствующую управлению $\overline{u}_n(t)$, которое выбирается из равенства

$$(\overline{u}_n(t), \overline{\psi}_n(t)) = C(U; \overline{\psi}_n(t)),$$

где $\overline{\psi}_n(t)$ — решение системы (9) при $\overline{\psi}_n(t_0) = -q$.

Определим гиперплоскость

$$H^2(t) = \{x \in \mathbb{R}^k \colon (x, q) = (\overline{x}_n(t), q)\}. \tag{13}$$

Предположим, что существует момент $t > 0$, при котором $H^1(t) = H^2(t)$, и

$$t^* = \min\{t > t_0 \colon H^1(t) = H^2(t)\}.$$

Рассмотрим в начальный момент два случая:

1) $i \in \{1, \dots, n_1\}$, j пробегает множество A_1;

2) $i \in \{n_1, \dots, n\}$, j пробегает множество A_2.

Согласно предположению индукции в случае 1 определим управления убегающих $v^1_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, s$, потребовав дополнительно, чтобы $y_{\alpha_i}(t^*) \neq \overline{x}_n(t^*)$, $i = 1, \dots, s$. Управление $v_{\alpha_i}(t)$ положим равным $v^1_{\alpha_i}(t)$, $i = 1, \dots, s$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Рассмотрим случай 2. Справедливы неравенства $(-q, y^0_{\beta_1}) < (-q, y^0_{\beta_2}) < \dots < (-q, y^0_{\beta_r})$. Перенумеруем гиперплоскости $H_{n_1}, \dots, H_n$ следующим образом:

$$n = 1, \quad n-1 = 2, \ \dots, \ n_1 = n - n_1 + 1 = 2^{k-1} + 1. \tag{14}$$

Считаем, что вектор $-q$ направлен в H^+_1, тогда $H^+_i \supset H^+_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, n - n_1\}$. Определим в случае 2 управления $v^2_{\beta_i}(t)$, $i = 1, \dots, r$, потребовав дополнительно, чтобы

$$y_{\beta_i}(t^*) \neq y_{\alpha_l}(t^*), \quad y_{\beta_i}(t^*) \neq \overline{x}_1(t^*), \quad i = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, s.$$

Положим

$$v_{\beta_i}(t) = v^2_{\beta_i}(t), \quad t \in [t_0, t^*),$$
$$v_{\beta_i}(t) = \overline{u}_1(t), \quad t \in [t^*, +\infty), \quad i = 1, \dots, r.$$

Таким образом, управления игроков $E_1, \dots, E_m$ при $t \geqslant t_0$ определены. Используя индукцию, получаем, что на отрезке $[t_0, t^*]$ преследователи ловят не более $(k-1)2^k + 1$ убегающих. На интервале $[t^*, +\infty)$ преследователи ловят не более 2^k убегающих. Следовательно, всего преследователи $P_1, \dots, P_{2^k+1}$ ловят не более $k2^k + 1$ убегающих. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Существует константа $C_2 > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, справедливо неравенство $f(n) \leqslant C_2 n \ln n$.*

Из теоремы 2 следует, что для всех $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $f(2^p + 1) \leqslant p2^p + 2$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. Возьмем $p \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{p-1} < n \leqslant 2^p + 1$. Тогда

$$f(n) \leqslant f(2^p + 1) \leqslant p2^p + 2 \leqslant C_2 n \ln n,$$

где в качестве C_2 можно взять $5/\ln 2$. □

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда существуют константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, справедливо неравенство*

$$C_1 n \ln n \leqslant f(n) \leqslant C_2 n \ln n. \tag{15}$$

§ 4. Следствия и примеры

Следствие 2. *Для любого натурального l существуют натуральные n, m, существует z^0 такие, что $m - n > l$ и в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит поимка.*

Возьмем натуральные числа m, n такие, что

$$C_2 n \ \ln n - (n+2) > l, \ m = [C_2 n \ln n] - 1.$$

Тогда $m - n > l$ и, по теореме, существует z^0, что в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит поимка. Следствие доказано. □

Следствие 3. *Для любого натурального l существуют натуральные n, m такие, что в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи для любого z^0, а в игре $\Gamma(n+1, m+l, z_1^0)$ происходит поимка при некотором z_1^0.*

Предварительно докажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[f(n+1) - f(n)] = \infty. \tag{16}$$

Предположим обратное. Тогда существует $c > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) - f(n) \leqslant c.$$

Тогда $f(n+1) \leqslant cn+1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Последняя оценка противоречит утверждению теоремы. Таким образом, соотношение (16) доказано. Из данного соотношения следует, что для любого натурального l существует натуральное n_0 такое, что $f(n_0+1) - f(n_0) \geqslant l+1$. Число m_0 выберем таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$f(n_0+1) - (l+1) \geqslant m_0 \geqslant f(n_0).$$

Так как $m_0 \geqslant f(n_0)$, то в игре $\Gamma(n_0, m_0, z^0)$ происходит уклонение от встречи для любого z^0. Из неравенства $m_0 + l < f(n_0+1)$ следует, что существует z_1^0 такой, что в игре $\Gamma(n_0+1, m_0+l, z_1^0)$ происходит поимка. Следствие доказано. $\square$

Пример 1. Пусть в системах (1), (2) матрица $A(t) = -a(t)E$, где E — единичная матрица, $a \in C[t_0, \infty)$. Обозначим $g(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\Big)d\tau$, $\lambda_0 = \inf\limits_{t\geqslant t_0} \frac{1}{g(t)}$.

Тогда если $\lambda_0 = 0$, то для игры $\Gamma(n, m, z^0)$ справедлива оценка (15).

Пример 2. Пусть в системах (1), (2) $k = 2$, $t_0 = 0$, матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 4\pi), \\ \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \ t \geqslant 4\pi, \end{cases}$$

Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы $\dot{z} = A(t)z$, $\Phi(0) = E$ является рекуррентной [24] и поэтому для игры $\Gamma(n, m, z^0)$ справедлива оценка (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. Quantitative and qualitative games. New York: Academic Press, 1969. 172 c.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Friedman A. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1971. 350 c.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
6. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. 266 p.
7. Leitmann G. Cooperative and noncooperative many-player differential games. Vienna: Springer-Verlag, 1974. 76 p.
8. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1977. 222 с.
9. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 272 с.
10. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

11. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63.
12. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 404 c.
13. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М: Изд-во Московского университета, 1990. 197 с.
14. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
15. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: ФАН, 2000. 176 с.
16. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
17. Петров Н.Н. Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими // Вестник Ленинградского университета. 1985. № 22. С. 107–109.
18. Чикрий А.А., Прокопович П.В. О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63, 78.
19. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.
20. Петров Н.Н. Мягкая поимка инерционных объектов // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 437–445.
21. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Известия вузов. Математика. 2009. № 5. С. 3–12. DOI: 10.3103/S1066369X09050016
22. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
23. Соловьева Н.А. Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 81–90.
24. Зубов В.И. Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 399 с.

Поступила в редакцию 25.08.2014

Банников Александр Сергеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: asbannikov@gmail.com

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kma3@list.ru

A. S. Bannikov, N. N. Petrov
Linear non-stationary differential pursuit games with several evaders

Keywords: differential game, group pursuit, evader, pursuer.

MSC: 49N70, 49N75

A linear non-stationary differential pursuit game with a group of pursuers and a group of evaders is considered. The pursuers' goal is to catch all evaders and the evaders' goal is at least for one of them to avoid contact with pursuers.

All players have equal dynamic capabilities, geometric constraints on the control are strictly convex compact set with smooth boundary. The point in question is the minimum number of evaders that is sufficient to evade a given number of pursuers from any initial position. Sufficient conditions for the solvability of the global problem of evasion are used as an upper estimate of this minimum. We assume that to capture one evader it suffices that the initial position of this evader lie in the interior of convex hull of initial positions of pursuers. Using this assumption we find a lower estimate of this minimum.

The obtained two-sided estimate of the number of evaders sufficient to avoid contact with a given number of pursuers from any initial position is illustrated by examples.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 479 p.

2. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. *Quantitative and qualitative games*, New York: Academic Press, 1969, 172 p.

3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the movements meeting), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.

4. Friedman A. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1971, 350 p.

5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Positsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Fizmatlit, 1974, 456 c.

6. Hajek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975, 266 p.

7. Leitmann G. *Cooperative and noncooperative many-player differential games*, Vienna: Springer-Verlag, 1974, 76 p.

8. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Pursuit differential games), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.

9. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Control and search game problems), Moscow: Nauka, 1978, 272 c.

10. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.

11. Pontryagin L.S. A linear differential evasion game, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1971, vol. 112, pp. 27–60.

12. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, 404 p.

13. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.

14. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.

15. Satimov N.Yu., Rikhsiev B.B. *Metody resheniya zadachi ukloneniya ot vstrechi v matematicheskoi teorii upravleniya* (Methods of solving the evasion problem in mathematical control theory), Tashkent: Fan, 2000, 176 p.

16. Petrov N.N., Petrov N.Nikandr. On the differential game "Casacks-robbers", *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian).

17. Petrov N.N. One estimate in the differential game with many players, *Vestnik Leningradskogo universiteta*, 1985, no. 22, pp. 107–109 (in Russian).

18. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. About evasion problem in the interaction of groups of moving objects, *Kibernetika*, 1989, no. 5, pp. 59–63, 78 (in Russian).

19. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. A linear evasion problem for interacting groups of objects, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 583–591.

20. Petrov N.N. The soft capture of inertial objects, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 343–349.

21. Bannikov A.S. A nonstationary group pursuit problem, *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, no. 5, pp. 1–9.

22. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).

23. Solovyova N.A. One objective of group pursuit linear recurrent differential games, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 81–90 (in Russian).

24. Zubov V.I. *Teoriya kolebanii* (Oscillation theory), Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 399 p.

Received 25.08.2014

Bannikov Aleksandr Sergeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: asbannikov@gmail.com

Petrov Nikolai Nikandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kma3@list.ru