

УДК 519.6

© А. М. Липанов, С. А. Карсканов, Е. Ю. Ижболдин

**РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА  
АППРОКСИМАЦИИ<sup>1</sup>**

Приводится вычислительный алгоритм высокого порядка точности для решения задач аэродинамики и газовой динамики. Метод прямого численного моделирования основан на применении современных схем WENO при аппроксимации по пространству конвективных слагаемых и первых производных системы полных уравнений Навье–Стокса. Вторые производные и диффузионные члены уравнений разрешаются с помощью центрально-разностной схемы высокого порядка точности. Результаты моделирования с использованием метода демонстрируются на примере решения двух задач. Показывается, что вычислительные алгоритмы адекватно воспроизводят физические эффекты, свойственные как дозвуковым течениям (вихревые дорожки), так и сверхзвуковым потокам (разрывы параметров, ударные волны, скачки уплотнения).

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, прямое численное моделирование, схема высокого порядка, сверхзвуковое обтекание, число Маха.

**Введение**

Память и быстродействие современных компьютеров быстро увеличиваются, расширяя область того, что можно рассчитывать. Численный эксперимент в настоящее время доступен большинству ученых и инженеров, и для результативного использования этой распространенной и быстро совершенствующейся технологии решения сложных задач требуются высокоэффективные численные методы. Методы высокого порядка точности используются в основном в прямом численном моделировании. Для многих задач аэродинамики высокоточный расчет вихревого потока крайне важен, так как завихренность оказывает значительное влияние на распределение нагрузки на элементы конструкции. Широко распространенные методы второго порядка аппроксимации обладают численной диффузией неприемлемо высокого уровня. Методы высокого порядка точности с низкой либо отсутствующей численной вязкостью лишены данного недостатка. В настоящее время существуют конечно-разностные, конечно-объемные методы и методы конечных элементов высокого порядка точности.

Однако не обладающие схемной вязкостью методы не могут быть применены при расчете сверхзвуковых течений с ударными волнами и другими газодинамическими разрывами. Причина заключается в появлении вблизи разрывов численных осцилляций. Выделение же разрывов в отдельные подобласти на практике сложно реализуемо.

Все это привело к тому, что в настоящее время основными вычислительными алгоритмами, применяемыми при расчете сверхзвуковых течений, являются методы сквозного счета, использующие разности против потока [1]. Наиболее широко распространены в вычислительной практике так называемые TVD-схемы [2], в которых кусочно-линейная или кусочно-параболическая реконструкция решения используется вместе с нелинейными ограничителями, искусственно уменьшающими величину градиента решения вблизи разрывов и локальных экстремумов решения. Однако подобные схемы обычно хорошо работают для достаточно простых течений с небольшим числом изолированных разрывов. В то же время при попытке решения задач, включающих сложные взаимодействия волн между собой, вихрями, акустическими волнами,

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 12-Т-1-1006) и РФФИ (грант 13-01-96004 p\_урал\_a).

они, как правило, оказываются неудовлетворительными. Многообразие TVD-схем определяется многообразием существующих ограничителей, а также выбором ограничиваемых величин. Кроме того, общим недостатком TVD-схем является интенсивное размазывание сильных разрывов, так как в этих зонах осуществляется переход к схемам первого порядка точности [3]. В частности, ширина зон размазывания контактных разрывов увеличивается пропорционально  $t^2$ , где  $t$  — время.

Центрально-разностные схемы высокого порядка аппроксимации хорошо подходят для расчета дозвуковых течений, не содержащих разрывов параметров [4, 5]. В работах [6–9] было показано, что для сжимаемых потоков центрально-разностные схемы высокого порядка значительно устойчивее и точнее при расчете конвективных вихревых структур и аэроакустических возмущений, когда они используются совместно с явными фильтрами спектрального типа. Явные фильтры легко внедряются в существующий код, так как шаг фильтрации зависит, по существу, от изначальной разностной схемы и применяется как завершение итерации.

Одним из перспективных направлений в методологии численного моделирования является разработка устойчивых конечно-разностных схем произвольно высокого порядка точности. Среди известных работ в этом направлении можно отметить работы [10–12], где предлагаются схемы произвольно высокого пространственного порядка точности для решения уравнений гиперболического типа и схемы FCT-нелинейной коррекции потоков переноса. В работах [13, 14] описывается алгоритм коррекции потоков консервативных схем типа предиктор–корректор произвольного порядка аппроксимации. Приводится условие, необходимое для наложения на временной шаг, чтобы схемы с коррекцией были монотонными.

Для получения монотонного решения, кроме техники ограничения потоков, используются методы реконструкции решения. К методам реконструкции сеточных решений с автоматическим анализом гладкости можно отнести методы ENO (essentially non-oscillatory method) и WENO (weighted ENO). Идея ENO- и WENO-схем заключается в использовании адаптивных шаблонов в процедуре построения интерполяционных полиномов, которая основана на локальной гладкости численного решения. Это позволяет автоматически достигнуть высокого порядка точности, не приводит к появлению случайных колебаний вблизи разрывов и при этом хорошо разрешать монотонные переходы. Данные методы относятся к методам сквозного счета, расчет ударных волн и их сложных взаимодействий возможен без выделения и отслеживания разрывов. Современные WENO-схемы являются мощным инструментом для моделирования течений сжимаемого газа, особенно течений, содержащих сложные взаимодействия ударных волн.

Целью представленной работы является демонстрация возможностей современных схем высокого порядка аппроксимации на примере решения двух задач аэродинамики: внешнего обтекания профиля потоком высокоскоростного вязкого газа и истечения сверхзвуковой струи из конического сопла.

## § 1. Математическая модель

Высокоскоростное турбулентное течение вязкого сжимаемого газа описывается с помощью следующей системы уравнений законов сохранения [5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{kM^2} + \rho U^2 \right) + \frac{\partial \rho UV}{\partial y} + \frac{\partial \rho UW}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho UV}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{P}{kM^2} + \rho V^2 \right) + \frac{\partial \rho VW}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \frac{\partial \rho UW}{\partial x} + \frac{\partial \rho VW}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P}{kM^2} + \rho W^2 \right) = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{P}{kM^2} + \rho E \right) U \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{P}{kM^2} + \rho E \right) V \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{P}{kM^2} + \rho E \right) W \right] = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ U \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \right. \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[ V \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ W \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] - \\ & \quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ V \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ U \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ W \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] - \\ & \quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[ W \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ U \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ V \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] + \\ & \quad \left. + \frac{1}{(k-1)M^2 \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) записаны в безразмерных переменных в ортогональной декартовой системе координат. Потoki  $\rho$ ,  $\rho U$ ,  $\rho V$ ,  $\rho W$ ,  $\rho E$  являются неизвестными, определяемыми в результате решения уравнений (1)–(5). Остальные газодинамические параметры выражаются через перечисленные выше пять переменных. Система замыкается уравнением состояния Менделеева–Клапейрона, которое не является следствием закона сохранения, поэтому непосредственно в систему его не включаем, хотя в вычислениях оно участвует. Температура рассчитывается по формуле

$$T = k(k-1)M^2 \left[ \frac{\rho E}{\rho} - \frac{(\rho U)^2 + (\rho V)^2 + (\rho W)^2}{2\rho^2} \right],$$

а безразмерное давление определяется по формуле

$$P = k(k-1)M^2 \left[ \rho E - \frac{(\rho U)^2 + (\rho V)^2 + (\rho W)^2}{2\rho} \right].$$

Система уравнений (1)–(5) содержит безразмерные комплексы:  $\text{Re} = \rho_0 U_0 h / \mu$  — число Рейнольдса,  $M^2 = U_0 / c_0$  — число Маха,  $\text{Pr} = C_P \mu / \lambda$  — число Прандтля, а также  $c_0 = (k P_0 / \rho_0)^{1/2}$  — скорость звука,  $k = C_P / C_V$  — отношение теплоемкостей. Здесь  $U_0$  — величина продольной компоненты вектора скорости потока на входе,  $P_0$ ,  $\rho_0$  — величины давления и плотности газа на входе;  $\mu$ ,  $\lambda$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности (для воздуха принимались постоянными и равными  $2 \cdot 10^5$  кг/м·с и 0,03 Вт/(м·К) соответственно).  $C_P$ ,  $C_V$  — изобарная и изохорная теплоемкости газа. Число Прандтля для воздуха бралось равным 0,7, отношение теплоемкостей — 1,4.

Граничные условия задаются следующим образом. На входной границе значения параметров полагаются равными значениям набегающего потока:  $\rho_0 = 1$ ,  $U_0 = 1$ ,  $V_0 = W_0 = 0$ ,  $P_0 = 1$ . На выходной границе для всех параметров задаются «условия сноса» путем экстраполяции за границу с высоким порядком. На твердых стенках задаются условия прилипания для скорости, кроме того, твердые поверхности предполагаем адиабатическими, то есть  $\partial T / \partial n = 0$  ( $n$  — направление нормали к стенке).

В качестве начальных условий используются параметры набегающего потока с соответствующими граничными условиями.

## § 2. Вычислительный алгоритм

Для интегрирования уравнений (1)–(5) была применена следующая методика. Конвективные члены аппроксимировались с высоким порядком с помощью WENO-схем, диффузионные члены в системе уравнений (1)–(5) также аппроксимировались с высоким порядком методом центральных разностей. Итак, для расчета конвективных слагаемых и первых производных по пространству использовалась конечно-разностная WENO-схема пятого порядка [15]. Поток в точке записывался в виде суперпозиции потоков

$$f_{1+1/2} = \sum_{\nu=1}^3 \Omega^{(\nu)} f_{i+1/2}^{(\nu)},$$

$$\Omega^{(1)} = 1/10, \quad \Omega^{(2)} = 6/10, \quad \Omega^{(3)} = 3/10$$

с соответствующими выражениями для потоков

$$f_{i+1/2}^{(\nu)} = \begin{cases} f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{11}{6} f_i - \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{2}{6} f_{i-2}, \\ f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{2}{6} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i-1}, \\ f_{i+1/2}^{(3)} = -\frac{1}{6} f_{i+2} + \frac{5}{6} f_{i+1} + \frac{2}{6} f_i. \end{cases}$$

В WENO-схеме веса линейной комбинации выбираются так, чтобы они были малы для шаблонов, содержащих разрывы, и близки к оптимальным весам  $\Omega^{(\nu)}$  в областях, где решение гладкое [1]:

$$f_{1+1/2} = \sum_{\nu=1}^3 \omega^{(\nu)} f_{i+1/2}^{(\nu)},$$

$$\omega^{(\nu)} = \frac{\sigma^{(\nu)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}},$$

$$\sigma^{(\nu)} = \frac{\Omega^{(\nu)}}{(\epsilon + IS^{(\nu)})^p}. \quad (6)$$

Здесь  $IS^{(\nu)}$  — индикаторы гладкости, в работе [16] для них предложены выражения

$$IS^{(1)} = \frac{13}{12} (f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2,$$

$$IS^{(2)} = \frac{13}{12} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{i-1} - f_{i+1})^2,$$

$$IS^{(3)} = \frac{13}{12} (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2.$$

В формуле (6) для  $\sigma^{(\nu)}$   $p$  — показатель степени, принимался равным 2;  $\epsilon$  — малая величина, предотвращающая деление на 0, принималась равной  $10^{-6}$ .

С оптимальными весами WENO-схема эквивалентна несимметричной схеме пятого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3f_{i+2} + 30f_{i+1} + 20f_i - 60f_{i-1} + 15f_{i-2} - 2f_{i-3}}{60\Delta x}.$$

Все вышесказанное относится к случаю, когда  $\partial f/\partial u > 0$  (здесь  $u$  — искомый параметр закона сохранения). Но знак этой производной может меняться, поэтому в описанную конструкцию нахождения потока  $f_{i+1/2}$  вносятся некоторые дополнения. Необходимо сначала расщеплять поток на положительную и отрицательную части:

$$\begin{aligned} f(u) &= f^+(u) + f^-(u), \\ \frac{f^+}{\partial u} &\geq 0, \quad \frac{f^-}{\partial u} \leq 0. \end{aligned}$$

Процедура реконструкции применяется затем отдельно к  $f^+$  и  $f^-$  с симметричными относительно  $x_{i+1/2}$  шаблонами. Суммарный поток вычисляется как  $f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^+ + f_{i+1/2}^-$ .

Расщепленные потоки строятся обычно как

$$\begin{aligned} f^\pm(u) &= \frac{1}{2}(f(u) \pm \Lambda u), \\ \Lambda &= \max|f'(u)|, \end{aligned}$$

где максимум при определении  $\Lambda$  может вычисляться либо по соседним с  $i$  точкой, либо по всем точкам сетки, либо быть константным значением.

Далее, уменьшая индекс на единицу и выполняя аналогичный комплекс вычислительных действий, находим  $f_{i-1/2} = f_{i-1/2}^+ + f_{i-1/2}^-$ . Таким образом, первая производная  $\partial f/\partial x$  аппроксимируется выражением  $(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})/\Delta x$  с высоким порядком точности.

Вязкие потоки, содержащие смешанные производные, вычисляются по схеме WENO. Диффузионные слагаемые из уравнений (1)–(5), включающие вторую производную по пространству, записываются в неконсервативной форме  $\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$  и аппроксимируются центральными разностями с высоким порядком точности на симметричном шаблоне. На девятиточечном шаблоне вторая производная  $\partial^2 u/\partial x^2$  аппроксимируется с восьмым порядком выражением

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\sum_{m=1}^4 \beta_m (u_{i+m} + u_{i-m} - 2u_i)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^8 \frac{\partial^{10} u_i}{\partial x^{10}}\right).$$

Разложив  $u_{i-4}, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{i+4}$  в ряд Тейлора в окрестности  $i$ -й точки, объединив коэффициенты при производных одного порядка, получим систему линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов  $\beta_m$ :

$$\begin{cases} \beta_1 + 4\beta_2 + 9\beta_3 + 16\beta_4 = 1, \\ \beta_1 + 16\beta_2 + 81\beta_3 + 256\beta_4 = 0, \\ \beta_1 + 64\beta_2 + 729\beta_3 + 4096\beta_4 = 0, \\ \beta_1 + 256\beta_2 + 6561\beta_3 + 65536\beta_4 = 0. \end{cases}$$

Решив ее, находим коэффициенты  $\beta_1 = 1,6$ ,  $\beta_2 = -0,2$ ,  $\beta_3 = 0,02539682$ ,  $\beta_4 = -0,00178571$ . Тогда разностное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= [1,6(u_{i+1} + u_{i-1}) - 0,2(u_{i+2} + u_{i-2}) + 0,02539682(u_{i+3} + u_{i-3}) - \\ &\quad - 0,001785712(u_{i+4} + u_{i-4}) - 2 \cdot 1,4236111 \cdot u_i] / \Delta x^2 \end{aligned}$$

будет аппроксимировать вторую производную с восьмым порядком точности.

Представленный метод нахождения производных по пространству позволяет интегрировать уравнения (1)–(5) на девятиточечном шаблоне с высоким пятым порядком точности, хотя часть производных считается с более высоким порядком (вычислительный шаблон это позволяет, качество расчетов от этого по крайней мере не ухудшается). Проводя аналогичные рассуждения, теоретически порядок точности можно повысить до любого требуемого, хотя для этого необходимо соответствующее расширение вычислительного шаблона.

Для аппроксимации потоков на границе в рассмотрение вводятся «мнимые узлы». Значения параметров экстраполируются в эти точки со вторым порядком точности.

По времени уравнения (1)–(5) интегрировались со вторым порядком точности. TVD-схема Рунге–Кутты второго порядка, используемая в работе, выглядит следующим образом [17]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}^1 + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{L}$  — конечно-разностная аппроксимация.

### § 3. Результаты тестовых расчетов

В двумерной постановке решалась тестовая задача обтекания аэродинамического профиля высокоскоростным потоком вязкого газа (воздуха). Счет велся на персональном компьютере. В этом случае система уравнений упрощается до двумерного случая, уравнение (4) вообще исключается из рассмотрения. Расчеты выполнены при числе Рейнольдса  $10^5$ . Один из наиболее важных вопросов, возникающих при использовании схем сквозного счета, — сходимость численного решения. В двумерной постановке допустимая ресурсами компьютера сетка может иметь меньший шаг по сравнению с трехмерной. При выполнении двумерных расчетов обтекания профиля сходимость обеспечивалась с точностью 0,1% на сетке мощностью в 1 миллион узлов.

Вместе с тем вычислительная схема должна быть устойчивой. Единого необходимого и достаточного условия устойчивости решения нестационарных уравнений гидромеханики не существует. Методом проб было определено, что при шаге по времени 0,0003 (безразмерное время) вычислительный алгоритм обеспечивает получение неложноосциллирующего решения. При такой величине шага  $\Delta t$ , учитывая, что расчет по времени ведется со вторым порядком, нет необходимости обсуждать вопрос о сходимости вычислительного процесса путем квантования по времени, сходимость обеспечивается автоматически. При решении уравнений гидромеханики для высоких чисел Рейнольдса величина шага интегрирования по времени определяется исключительно обеспечением условия устойчивости вычислительного процесса.

В зависимости от числа Маха получены различные картины обтекания профиля во времени. При числе Маха, равном 0,5, имеем дозвуковое обтекание с «широкой» дорожкой за профилем и распространяющимися «вперед» возмущениями (рис. 1).

Увеличение числа Маха до 1 приводит к появлению достаточно выраженных локальных разрывов параметров. Дорожка за обтекаемым телом при этом сдвигается «вверх» и становится намного менее выраженной (рис. 2).

Наконец, при числе Маха, равном 1,5, имеем сверхзвуковое обтекание аэродинамического профиля. Течение стабилизируется за промежуток безразмерного времени  $t \approx 15$ . На рисунке 3 четко визуализируется ударная волна на передней кромке, возмущения распространяются только вниз по потоку (за ударной волной). Дорожка, ранее имевшая место за обтекаемым телом, вырождается.

Кроме того, в трехмерной постановке решалась модельная задача об истечении вязкого газа из сужающегося конического сопла. Расчеты выполнялись в прямоугольной декартовой системе координат на суперкомпьютере «Уран» (ИММ УрО РАН). Моделировалось как течение внутри самого сопла, так и истекающая в открытую область струя. Длина сопла составляла 4 единицы, длина открытой области — 20 единиц, ширина и высота — 10 единиц. Расчетная сетка

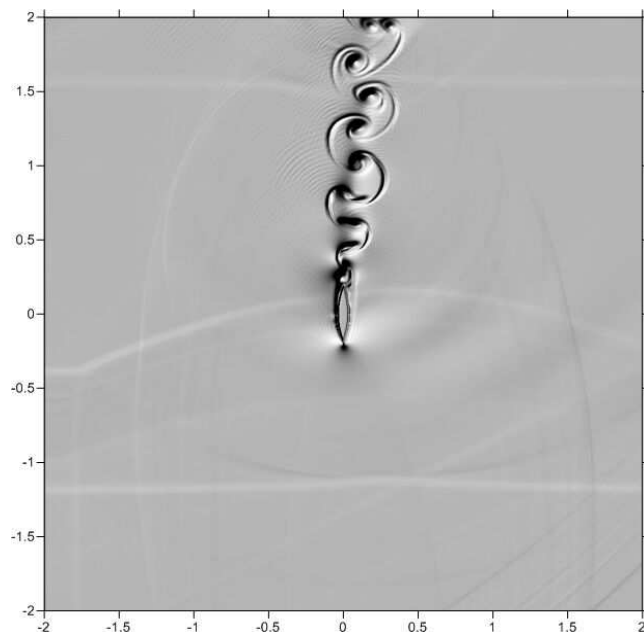


Рис. 1. Теневая картина распределения плотности при  $M = 0,5$

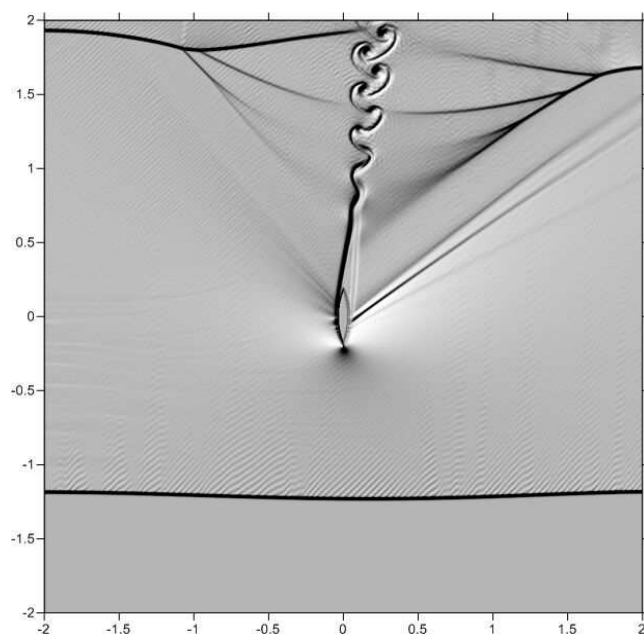


Рис. 2. Теневая картина распределения плотности при  $M = 1,0$

состояла из 128640800 ( $800 \times 401 \times 401$ ) узлов, сходимость при этом обеспечивалась с точностью 1%. Разность расхода во всех сечениях сопла от среднего значения также не превосходила 1%, причем максимальные отклонения наблюдаются в окрестности входа, так как в этой зоне устанавливается и сильно эволюционирует профиль скорости. На входе в сопло задавались постоянными температура и расход. Характерное число Маха равнялось 0,85, Рейнольдса —  $10^5$ .

На рисунке 4 видно, что дозвуковая струя на выходе из сужающейся части сопла становится сверхзвуковой, вновь тормозясь затем до дозвуковых скоростей. Отчетливо визуализируются ряд скачков уплотнения в окрестности выхода сопла и турбулентный вихревой дозвуковой поток без ударных волн далее по течению. На рисунке 5 показаны распределения плотности

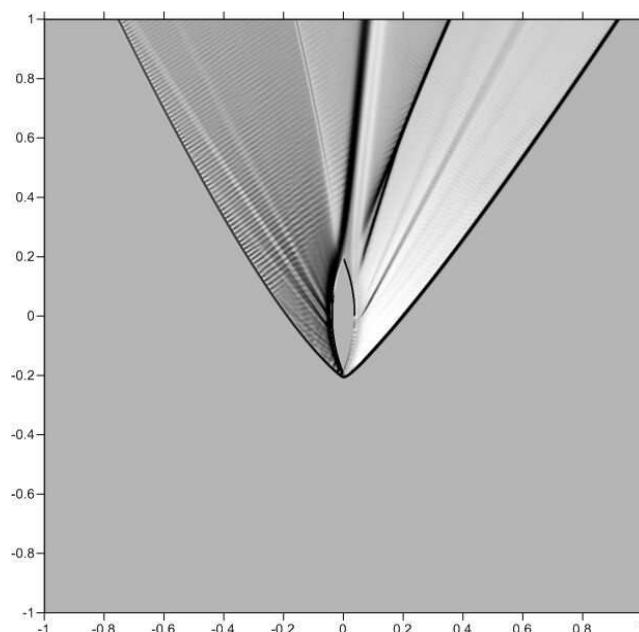


Рис. 3. Теневая картина распределения плотности при  $M = 1,5$

и локального числа Маха. В окрестности выхода из сопла графики распределения параметров имеют крутые градиенты (область сверхзвукового течения). Начиная с  $x \approx 12$ , число Маха становится меньше единицы, имеет место дозвуковой поток.

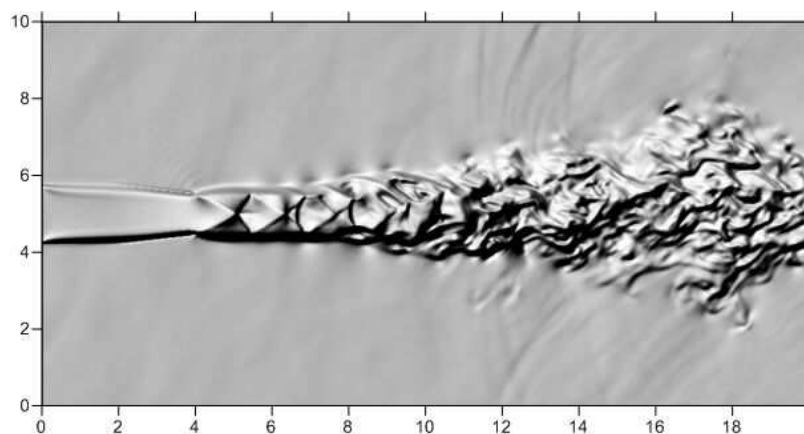


Рис. 4. Теневая картина распределения скорости при истечении вязкого газа из сопла

Итак, в работе представлена методика решения полных уравнений Навье–Стокса и уравнения энергии. Интегрирование по пространству проводится с помощью метода WENO (для первых производных), основанного на сеточной реконструкции решения, и с помощью центральных разностей (для вторых производных) высокого порядка аппроксимации.

Результаты решения модельной задачи истечения струи воздуха из сопла и результаты расчетов обтекания аэродинамического профиля вязким газом показали хорошую работоспособность предложенной методики решения уравнений. Численно полученные результаты воспроизводят физические эффекты, свойственные как закритическим сверхзвуковым течениям (ударные волны, скачки уплотнения), так и дозвуковым потокам (вихревые дорожки, турбулентные пульсации).



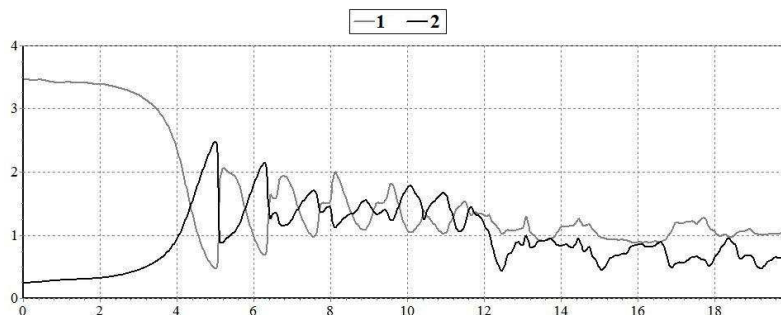


Рис. 5. Графики распределения плотности (1) и числа Маха (2) на оси симметрии при истечении вязкого газа из сопла

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Хотяновский Д.В. Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 7. С. 39–55.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Ворожцов Е.В. Применение разложений Лагранжа–Бюрмана для численного интегрирования уравнений невязкого газа // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 348–361.
4. Карсканов С.А., Липанов А.М. О критических числах Рейнольдса в плоских каналах с резким расширением на входе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 7. С. 1258–1268.
5. Липанов А.М. Теоретическая механика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
6. Gaitonde D.V., Visbal M.R. Pade-type high-order boundary filters for the Navier–Stokes equations // AIAA J. 2000. Vol. 38. № 11. P. 2103–2112.
7. Rizzetta D.P., Visbal M.R., Gaitonde D.P. Large-eddy simulations of supersonic compression ramp flow by high-order method // AIAA J. 2001. Vol. 39. № 12. P. 2283–2292.
8. Engquist B., Loetstedt P., Sjoergreen B. Nonlinear filters for efficient shock computation // Mathematical computations. 1989. Vol. 52. P. 232–248.
9. Yee H.C. Explicit and implicit multidimensional compact high-resolution shock-capturing methods: formulation // J. Comp. Phys. 1997. Vol. 131. Issue 1. P. 216–232.
10. Zalesak S.T. A Physical interpretation of the Richtmyer two-step Lax–Wendroff scheme, and its generalization to higher spatial order // Advances in computer methods for partial differential equations. Publ. IMACS. 1984. P. 491–496.
11. Zalesak S.T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // Journal of computation physics. 1979. № 31. P. 335–362.
12. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 660 с.
13. Пинчуков В.И. О построении монотонных схем типа предиктор–корректор произвольного порядка аппроксимации // Математическое моделирование. 1991. Т. 3. № 9. С. 95–103.
14. Пинчуков В.И. Нелинейные сеточные фильтры и монотонизация симметричных схем повышенной точности // Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 3. С. 75–86.
15. Shu C.-W. High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD // ICASE Report № 2001-11. 2001. 16 p.
16. Shu C.-W. High order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics, in High-order methods for computational physics // Computational science and engineering: Lecture notes. Vol. 9. Springer, 1999. P. 439–582.
17. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge–Kutta schemes // Mathematics of computation. 1998. Vol. 67. № 221. P. 73–85.

Поступила в редакцию 14.05.2013

Липанов Алексей Матвеевич, академик, директор, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: lipanov@udman.ru

Карсканов Сергей Андреевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: ser@udman.ru

Ижболдин Евгений Юрьевич, аспирант, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: twinevgeni@gmail.com

*A. M. Lipanov, S. A. Karskanov, E. Yu. Izhboldin*

**Solution of unsteady aerodynamics problems on the basis of the numerical algorithms of high-order approximation**

*Keywords:* Navier–Stokes equations, direct numerical simulation, high-order scheme, supersonic flow, Mach number.

Mathematical Subject Classifications: 76N15

A computational high-order algorithm for solving aerodynamics problems is presented. A direct numerical simulation method is based on the application of modern WENO-schemes at the approximation according to the space of convective summands and first derivatives of the system of full Navier–Stokes equations. Second derivatives and diffusive terms of the equations are resolved with a high-order central-difference scheme. The results of simulation with the use of the above method are demonstrated in considering the solution of two problems. It is shown that computational algorithms efficiently reproduce physical behavior of subsonic flows (vortex trail) and supersonic flows (discontinuity of parameters, air-blasts, compression shocks).

REFERENCES

1. Kudryavtsev A.N., Poplavskaya T.V., Khotyanovskii D.V. Application of high-order accuracy schemes to numerical simulation of unsteady supersonic flows, *Mat. Model.*, 2007, vol. 19, no. 7, pp. 39–55.
2. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenii* (Mathematical problems of numerical solution for hyperbolic systems of equations), Moscow: Fizmatlit, 2001.
3. Vorozhtsov E.V. Application of Lagrange–Burman expansions for numerical integration of inviscid gas equations, *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie*, 2011, vol. 12, pp. 348–361.
4. Karskanov S.A., Lipanov A.M. On critical Reynolds numbers in plane channels with a sudden expansion at the entry, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 7, pp. 1195–1204.
5. Lipanov A.M. *Teoreticheskaya mekhanika n'yutonovskikh sred* (Theoretical mechanics of newtonian quality), Moscow: Nauka, 2011, 551 p.
6. Gaitonde D.V., Visbal M.R. Pade-type high-order boundary filters for the Navier–Stokes equations, *AIAA J.*, 2000, vol. 38, no. 11, pp. 2103–2112.
7. Rizzetta D.P., Visbal M.R., Gaitonde D.P. Large-eddy simulations of supersonic compression ramp flow by high-order method, *AIAA J.*, 2001, vol. 39, no. 12, pp. 2283–2292.
8. Engquist B., Loetstedt P., Sjoergreen B. Nonlinear filters for efficient shock computation, *Mathematical Computations*, 1989, vol. 52, pp. 232–248.
9. Yee H.C. Explicit and implicit multidimensional compact high-resolution shock-capturing methods: formulation, *J. Comp. Phys.*, 1997, vol. 131, issue 1, pp. 216–232.
10. Zalesak S.T. A physical interpretation of the Richtmyer two-step Lax–Wendroff scheme, and its generalization to higher spatial order, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, Publ. IMACS, 1984, pp. 491–496.
11. Zalesak S.T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids, *Journal of Computational Physics*, 1979, no. 31, pp. 335–362.

12. Oran E.S., Boris J.P. *Numerical simulation of reactive flow*, New York: Elsevier. Translated under the title *Chislennoe modelirovanie reagiruyushchikh potokov*, Moscow: Mir, 1990, 660 p.
13. Pinchukov V.I. On construction of monotone predictor-corrector schemes of an arbitrary order of approximation, *Mat. Model.*, 1991, vol. 3, no. 9, pp. 95–103.
14. Pinchukov V.I. Nonlinear difference filters and high accuracy symmetrical schemes monotization, *Mat. Model.*, 1995, vol. 7, no. 3, pp. 75–86.
15. Shu C.-W. High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD, *ICASE Report no. 2001-11*, 2001, 16 p.
16. Shu C.-W. High order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics, in High-Order Methods for Computational Physics, *Computational Science and Engineering*, (Lecture Notes), vol. 9, Springer, 1999, pp. 439–582.
17. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge–Kutta schemes, *Mathematics of Computation*, 1998, vol. 67, no. 221, pp. 73–85.

Received 14.05.2013

Lippanov Aleksei Matveevich, Academician, Director, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

E-mail: lipanov@udman.ru

Karskanov Sergei Andreevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

E-mail: ser@udman.ru

Izhboldin Evgenii Yur'evich, Post-graduate student, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

E-mail: twinevgeni@gmail.com