УДК 534.113

© *А. М. Ахтямов, А. В. Муфтахов, А. А. Ахтямова*

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ И НАГРУЖЕННОСТИ ОДНОГО ИЗ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается задача идентификации условий закрепления балки по пяти собственным частотам ее колебаний. На основе условий Плюккера, возникающих при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову. Найдено явное решение задачи идентификации матрицы краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи. Приведены соответствующие примеры.

Ключевые слова: собственные значения, обратная задача, собственные частоты, балка, сосредоточенный инерционный элемент.

Введение

Рассмотрим стержень, закрепление которого на правом конце неизвестно и недоступно для визуального исследования. Если ударить по доступному для удара участку стержня, то это вызовет изгибные колебания стержня. Спрашивается: можно ли по собственным частотам этих колебаний определить, как стержень закреплен? Эта задача связана с некорректными задачами [1–7], с задачами отыскания собственных частот различных балок [9–12], а также соответствующими обратными задачами — задачами идентификации дефектов стержней и других распределенных систем по собственным частотам их колебаний [13–26].

В работах [20–26] было предложено идентифицировать краевые условия, в которых все коэффициенты краевых условий являются неизвестными (ранее в теории обратных задач идентифицировалась только часть коэффициентов, остальные коэффициенты краевых условий считались известными). Оказалась, что эта проблема восстановления краевых условий может быть сведена к задаче идентификации миноров максимального порядка матрицы краевых условий. Эта задача не является корректной по Адамару, так как любые числа не могут быть минорами матрицы (для того чтобы некоторые числа были минорами матрицы, требуется выполнение так называемых условий Плюккера).

Задача идентификации краевых условий для стержня уже рассматривалась в работах [20–22]. В отличие от работы [20] краевые условия идентифицируются не по всему бесконечному набору частот, а лишь по пяти собственным частотам. В отличие от [21, 22] в настоящей статье идентифицируются более общие краевые условия (в [21] идентифицировался только вид закрепления, а в [22] — только сосредоточенная масса на конце, а здесь идентифицируется и то и другое). К тому же новым является и сам подход к задаче идентификации краевых условий. В отличие от предыдущих работ он опирается на метод подбора решения корректных по Тихонову задач и предоставляет не только алгоритм, но и дает явное решение задачи.

§ 1. Постановка обратной задачи

Перед изложением основных результатов напомним постановку краевой задачи для свободных изгибных колебаний однородного стержня, на левом конце которого реализуется заделка.

Уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [10, с. 152]:

$$EI\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4}+\rho F\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

где $U(x,t)$ — прогиб текущей точки оси стержня, EI — изгибная жесткость стержня, ρ — плотность стержня, F — площадь поперечного сечения стержня.

Если левый конец заделан, то краевые условия на левом конце: $U=0$, $\frac{\partial U}{\partial x}=0$ (при $x=0$).

Основные типы граничных условий на правом конце (при $x=1$) записываются в следующем виде [10, с. 153]:

(1) заделка $U=0,\ \dfrac{\partial U}{\partial x}=0;$

(2) свободное опирание $U=0,\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0;$

(3) свободный конец $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3}=0,\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0;$

(4) плавающая заделка $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3}=0,\ \dfrac{\partial U}{\partial x}=0;$

(5)–(9) различные виды упругого закрепления:

$$(5)\ EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+c_1U=0,\ \frac{\partial U}{\partial x}=0;$$

$$(6)\ U=0,\ EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial U}{\partial x}=0;$$

$$(7)\ EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+c_1U=0,\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0;$$

$$(8)\ \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=0,\ EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_2\,\frac{\partial U}{\partial x}=0;$$

$$(9)\ EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+c_1U=0,\quad EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial U}{\partial x}=0;$$

(10) сосредоточенная масса на конце $EI\,\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3}=-m\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2},\quad EI\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0.$

Заметим, что сосредоточенный инерционный элемент на конце нами не рассматривается ввиду того, что в этом случае функции $f_{ij}(\lambda)$ из разложения характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ (см. ниже) оказываются линейно зависимыми, что существенно усложняет задачу и требует других подходов.

В общем виде рассматриваемые краевые условия (1)–(10) можно записать так:

$$\begin{aligned}&a_{11}\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+a_{14}U+a_{15}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,\\&a_{22}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+a_{23}\,\frac{\partial U}{\partial x}=0\end{aligned}\qquad (x=1).\tag{1.1}$$

При $t=0$ должны выполняться начальные условия

$$U(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

Обозначим $\rho F\omega^2/(EI)$ через λ^4. Тогда поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t)=y(x)\cos(\omega t)$ сводится (см., например, [9]) к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)}=\lambda^4 y,\quad U_1(y)=y(0)=0,\quad U_2(y)=y'(0)=0,\quad U_3(y)=0,\quad U_4(y)=0,\tag{1.2}$$

где

$$\begin{aligned}&U_3(y)=a_{11}\,y'''(1)+\left(a_{14}-a_{15}\,\lambda^4\right)\,y(1)=0,\\&U_4(y)=a_{22}\,y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0\end{aligned}\qquad (a_{11},a_{14},a_{15},a_{22},a_{23}\in\mathbb{R})\tag{1.3}$$

— линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x=1$ [10].

Поставим к этой спектральной задаче обратную задачу: по собственным частотам изгибных колебаний стержня найти неизвестные краевые условия $U_3(y)=0$, $U_4(y)=0$.

Что же означает найти краевые условия? На первый взгляд может показаться, что это означает, что нужно найти все коэффициенты $a_{11}, a_{14}, a_{15}, a_{22}, a_{23}$. Однако в нашем случае это не так. Дело в том, что в краевых условиях (1.3) неизвестны все коэффициенты и поэтому одно и то же краевое условие может иметь совершенно разные коэффициенты. Например, условия $y'''(1) = 0$ и $5\,y'''(1) = 0$ имеют совершенно разные коэффициенты a_{11}. В первом случае это 1, а во втором это 5. Однако эти коэффициенты соответствуют одному и тому же краевому условию. Поэтому нужно искать не сами коэффициенты, а матрицу $A = ||a_{ij}||$ с точностью до линейных преобразований строк.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$, через A:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & -a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{1.4}$$

Через M_{ij} обозначим миноры второго порядка этой матрицы, составленные из ее i-го и j-го столбцов:

$$\begin{array}{llll} M_{12} = a_{11}\,a_{22}, & M_{13} = a_{11}\,a_{23}, & M_{14} = 0, \quad M_{15} = 0, \\ M_{23} = 0, & M_{24} = -a_{14}\,a_{22}, & M_{25} = a_{15}\,a_{22}, \\ M_{34} = -a_{14}\,a_{23}, & M_{35} = a_{15}\,a_{23}, & M_{45} = 0. \end{array} \tag{1.5}$$

В терминах матрицы A отыскание форм $U_3(y)$, $U_4(y)$ равносильно нахождению матрицы A с точностью до линейных преобразований ее строк.

Поэтому поставленная выше обратная задача восстановления краевых условий может быть сформулирована следующим образом: коэффициенты a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ задачи (1.2) неизвестны; ранг матрицы (1.4) равен двум; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (1.2); требуется восстановить матрицу (1.4) с точностью до линейных преобразований строк.

Покажем, что эта задача может быть переформулирована в терминах характеристического определителя.

Функции

$$\begin{array}{ll} y_1(x,\,\lambda) = \big(\cos\lambda\,x + \mathrm{ch}\lambda\,x\big)/2, & y_2(x,\,\lambda) = \big(\sin\lambda\,x + \mathrm{sh}\lambda\,x\big)/(2\lambda), \\ y_3(x,\,\lambda) = \big(-\cos\lambda\,x + \mathrm{ch}\lambda\,x\big)/(2\lambda^2), & y_4(x,\,\lambda) = \big(-\sin\lambda\,x + \mathrm{sh}\lambda\,x\big)/(2\lambda^3) \end{array} \tag{1.6}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda) = \lambda^4\,y(x,\lambda), \tag{1.7}$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{array} \right. \qquad j,\, r = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \tag{1.8}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\,\lambda)$ $(j = 1,\,2,\,3,\,4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [10]).

Общее решение уравнения (1.7) представляется в следующем виде:

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1\,y_1(x,\lambda) + C_2\,y_2(x,\lambda) + C_3\,y_3(x,\lambda) + C_4\,y_4(x,\lambda).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия из (1.2):

$$\begin{array}{c} U_i(y) = U_i(C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + C_3\,y_3 + C_4\,y_4) = \\ = C_1\,U_i(y_1) + C_2\,U_i(y_2) + C_3\,U_i(y_3) + C_4\,U_i(y_4) = 0, \qquad i = 1,2,3,4. \end{array} \tag{1.9}$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (1.2) получают из условия существования ненулевого решения C_i из системы (1.9). Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

соответствующей системы. Этот определитель называют *характеристическим определителем спектральной задачи* (1.2). Его нули совпадают с собственными значениями задачи (1.2) [27]. Учитывая условия (1.8), из (1.10) получаем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Отсюда и из (1.3) имеем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\, y_3'''(1) + \left(a_{14} - a_{15}\,\lambda^4\right)\, y_3(1) & a_{11}\, y_4'''(1) + \left(a_{14} - a_{15}\,\lambda^4\right)\, y_4(1) \\ a_{22}\, y_3''(1) + a_{23}\, y_3'(1) & a_{22}\, y_4''(1) + a_{23}\, y_4'(1) \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

Применяя теорему Лапласа для вычисления определителей, получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \equiv{}& M_{12}\, f_{12}(\lambda) + M_{13}\, f_{13}(\lambda) + M_{24}\, f_{24}(\lambda) + \\ &+ M_{25}\, f_{25}(\lambda) + M_{34}\, f_{34}(\lambda) + M_{35}\, f_{35}(\lambda), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned} & f_{12}(\lambda) = -\frac{1}{2}\,(1 + \cos\lambda\, \mathrm{ch}\,\lambda)\,, \\ & f_{13}(\lambda) = -\frac{1}{2\,\lambda}\,(\sin\lambda\, \mathrm{ch}\,\lambda + \cos\lambda\, \mathrm{sh}\,\lambda)\,, \\ & f_{24}(\lambda) = \frac{1}{2\,\lambda^3}\,(\cos\lambda\, \mathrm{sh}\,\lambda - \sin\lambda\, \mathrm{ch}\,\lambda)\,, \qquad f_{25}(\lambda) = \lambda^4\, f_{24}(\lambda), \\ & f_{34}(\lambda) = \frac{1}{2\,\lambda^4}\,(\cos\lambda\, \mathrm{ch}\,\lambda - 1)\,, \qquad f_{35}(\lambda) = \lambda^4\, f_{34}(\lambda), \end{aligned} \tag{1.14}$$

где миноры определены равенствами (1.5).

Таким образом, задачу идентификации краевых условий по собственным частотам в терминах функции (1.13) можно сформулировать следующим образом: коэффициенты a_{ij} матрицы A неизвестны; ранг матрицы A равен двум; известны ненулевые корни λ_k характеристического определителя (1.13). Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.

§ 2. Корректность по А. Н. Тихонову поставленной задачи

Прежде чем найти матрицу A, нужно найти сначала ее миноры, а значит и числа

$$M_{12}, \quad M_{13}, \quad M_{24}, \quad M_{25}, \quad M_{34}, \quad M_{35}, \tag{2.1}$$

входящие в разложение (1.13). Покажем, что задача отыскания шести неизвестных (2.1) является корректной по А. Н. Тихонову.

Пусть λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, являются собственными значениями краевой задачи (1.2), (1.3). Тогда λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, — корни уравнения (1.13) [27]. Подставив эти значения в уравнение (1.13), получим систему пяти уравнений для отыскания шести неизвестных (2.1) матрицы A:

$$\begin{aligned} & M_{12}\, f_{12}^k + M_{13}\, f_{13}^k + M_{24}\, f_{24}^k + M_{25}\, f_{25}^k + \\ & + M_{34}\, f_{34}^k + M_{35}\, f_{35}^k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 5, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где через f_{ij}^k обозначены значения функций $f_{ij}(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$.

Однако система (2.2) (то есть соответствующая задача поиска шести неизвестных (2.1)) имеет бесчисленное множество решений. Поэтому требуется как-то факторизовать множество решений, то есть ввести множество корректности M.

Заметим, что уравнения (2.2) являются уравнениями гиперплоскостей в 6-мерном пространстве $\mathbb{R}^6$. Если матрица

$$F = \begin{Vmatrix} f_{12}^1 & f_{13}^1 & f_{24}^1 & f_{25}^1 & f_{34}^1 & f_{35}^1 \\ f_{12}^2 & f_{13}^2 & f_{24}^2 & f_{25}^2 & f_{34}^2 & f_{35}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{12}^5 & f_{13}^5 & f_{24}^5 & f_{25}^5 & f_{34}^5 & f_{35}^5 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

системы уравнений (2.2) имеет ранг 5, то система уравнений (2.2) определяет прямую в 6-мерном пространстве, проходящую через начало координат. Известно, что направляющий вектор данной прямой можно найти по формуле

$$\mathbf{a} = (F_{12}, -F_{13}, F_{24}, -F_{25}, F_{34}, -F_{35}),$$

где F_{ij} — минор матрицы F, получаемый вычеркиванием столбца с элементами f_{ij}^k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$. Поэтому эту прямую можно определить следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{aligned} &M_{12} = F_{12}\, t, \qquad &&M_{13} = -F_{13}\, t, \qquad &&M_{24} = F_{24}\, t, \\ &M_{25} = -F_{25}\, t, \qquad &&M_{34} = F_{34}\, t, \qquad &&M_{35} = -F_{35}\, t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для подхода А. Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, то есть $\Lambda = R\,M$.

Определение 1. Задача $R\,v = z$ называется *корректной по А. Н. Тихонову* (условно корректной), если выполнены следующие условия [2–4]:

(1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

(2) решение единственно на множестве M;

(3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \widetilde{z} \in \Lambda = R\,M$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_Z < \delta$, выполнено неравенство $\|v - \widetilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (2.2) и переводящее набор шести значений (2.1) в пять значений λ_k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$.

Чтобы выделить множество корректности, введем норму

$$\|\cdot\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{25}|, |M_{34}|, |M_{35}|). \tag{2.5}$$

Определение 2. Будем называть *множеством корректности* M такой набор миноров $v = (|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{25}|, |M_{34}|, |M_{35}|)$, для которого выполнены три условия:

(1) условие принадлежности v единичной сфере:

$$\|v\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{25}|, |M_{34}|, |M_{35}|) = 1; \tag{2.6}$$

(2) один из миноров (2.1) равен 1 (а не -1).

Условие (1) обеспечивает математическое существование двух решений (две точки пересечения прямой (2.4) и сферы (2.6)). Условие (2) дает выбор одного из этих двух математических решений (одной из двух точек пересечения).

Из определения вытекает, что M является компактом.

Пусть V — это пространство $\mathbb{R}^6$ элементов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_6)$ с нормой

$$\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_6|);$$

Z — это пространство $\mathbb{R}^5$ элементов $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$ с нормой $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_5|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, то есть $\Lambda = R\,M$.

Тогда задача $R\,v = z$ будет *корректной по А. Н. Тихонову*, так как все три условия определения корректности по по А. Н. Тихонову выполнены. Действительно, априори известно, что решение задачи идентификации набора шести значений (2.1) по собственным частотам существует (так как именно с помощью уравнения (2.2) описываются собственные частоты реальной идентифицируемой механической системы). Далее, компактность множества M и единственность решения на нем показаны выше. Таким образом, первые два условия определения выполнены. Третье условие вытекает из аналитичности $f_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

Известно, что матрицы A должны быть связаны между собой так называемыми условиями Плюккера [28].

§ 3. Условия Плюккера

Условия Плюккера возникают при отыскании рангового подпространства по своему направляющему бивектору (см. [28]). Их можно также интерпретировать в терминах проективной геометрии как условия, возникающие при отыскании проективной прямой по координатам Плюккера (см. [29, 30]), а также в терминах грассмановой алгебры — как плюккеровы условия простоты грассманового агрегата [31]. Однако нам представляется более правильным не прибегать к дополнительной терминологии. В настоящей статье предлагается другой подход к условиям Плюккера как к условиям, возникающим при восстановлении (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы по ее минорам максимального порядка. При этом новым является запись искомой матрицы непосредственно с помощью миноров, а не через систему уравнений, как это делается обычно. Такой подход делает условие Плюккера более наглядным и позволяет предъявить явное решение задачи отыскания краевых условий.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rank} A = 2$. *Чтобы матрицу*

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} \widetilde{a}_{11} & 0 & 0 & \widetilde{a}_{14} & -\widetilde{a}_{15} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

можно было получить из матрицы (1.4) *с помощью линейного преобразования строк, необходимо и достаточно, чтобы наборы миноров второго порядка этих матриц совпадали с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов.*

Доказательство теоремы 1. (Необходимость.) Итак, пусть матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк, то есть существует невырожденная матрица S размера 2×2 такая, что $\widetilde{A} = S \cdot A$, где $\det S = k \neq 0$. Тогда для всех подматриц $\widetilde{A}_{i_1 i_2}$ и $A_{i_1 i_2}$ размера 2×2 матриц $\widetilde{A}$ и A верно: $\widetilde{A}_{i_1 i_2} = S \cdot A_{i_1 i_2}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 6$. А значит, $\widetilde{M}_{i_1 i_2} = \det \widetilde{A}_{i_1 i_2} = \det (S \cdot A_{i_1 i_2}) = \det S \cdot \det A_{i_1 i_2} = k \cdot M_{i_1 i_2}$, что и требовалось доказать.

(Достаточность.) Пусть $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ — набор строк матрицы A, а $(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2)$ — набор строк матрицы $\widetilde{A}$. Нетрудно видеть, что для того, чтобы матрицу $\widetilde{A}$ можно было получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{Span}(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2)$. Найдем условие, при котором вектор-строка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ лежит в $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Для этого рассмотрим следующую матрицу размера 3×6:

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & -a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \right\|. \tag{3.1}$$

Ранг этой матрицы равен 2. Без ограничения общности будем считать, что $M_{12} \neq 0$. Тогда все окаймляющие M_{12} миноры 3-го порядка равны нулю:

$$-M_{13}\, x_2 + M_{12}\, x_3 = 0, \quad M_{24}\, x_1 + M_{12}\, x_4 = 0, \quad M_{25}\, x_1 + M_{12}\, x_5 = 0. \tag{3.2}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения:

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, -M_{24}/M_{12}, -M_{25}/M_{12}) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = (0, M_{12}, M_{13}, M_{14}, 0, 0)\,,$$

по которым можно построить матрицу A:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -M_{24}/M_{12} & -M_{25}/M_{12} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Проделаем то же самое с матрицей $\widetilde{A}$. Так как наборы миноров максимального порядка этих матриц совпадают с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов, то соответствующие системы линейных однородных уравнений эквивалентны, а значит, $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{Span}\,(\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2)$.

Отсюда следует, что матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк, что и требовалось доказать. $\square$

Заметим, что, решая систему (3.2), можно восстановить матрицу A по ее минорам второго порядка с точностью до линейного преобразования строк.

Ниже показано, что для того, чтобы набор чисел

$$M_{12}, \quad M_{13}, \quad M_{24}, \quad M_{25}, \quad M_{34}, \quad M_{35} \tag{3.3}$$

являлся набором соответствующих миноров матрицы (1.4) ранга 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$M_{12}\, M_{34} - M_{24}\, M_{13} = 0, \tag{3.4}$$

$$M_{12}\, M_{35} - M_{25}\, M_{13} = 0, \tag{3.5}$$

$$M_{25}\, M_{34} - M_{24}\, M_{35} = 0. \tag{3.6}$$

Условия (3.4), (3.5), (3.6) называют условиями Плюккера. В списке миноров (3.3) матрицы (1.4) миноры M_{14}, M_{15}, M_{23}, M_{45} не упомянуты, так как равны нулю, то есть заранее заданы.

Теорема 2 (условия Плюккера). (1) *Пусть $M_{12} \neq 0$ или $M_{13} \neq 0$. Для того чтобы набор чисел* (3.3) *являлся набором миноров матрицы* (1.4) *ранга* 2, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.4), (3.5).

(2) *Пусть $M_{24} \neq 0$ или $M_{34} \neq 0$. Для того чтобы набор чисел* (3.3) *являлся набором миноров матрицы* (1.4) *ранга* 2 *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.4), (3.6).

(3) *Пусть $M_{25} \neq 0$ или $M_{35} \neq 0$. Для того чтобы набор чисел* (3.3) *являлся набором миноров матрицы* (1.4) *ранга* 2, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.5), (3.6).

Доказательство теоремы 2. (1) Пусть $M_{12} \neq 0$. При доказательстве теоремы 1 было показано, что если $M_{12} \neq 0$, то

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} M_{12} & 0 & 0 & -M_{24} & -M_{25} \\ 0 & 1 & M_{13}/M_{12} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{3.7}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{34} и M_{35}. Их можно вычислить:

$$M_{34} = \left| \begin{array}{cc} 0 & -M_{24} \\ \frac{M_{13}}{M_{12}} & 0 \end{array} \right| = \frac{M_{24}\, M_{13}}{M_{12}}; \quad M_{35} = \left| \begin{array}{cc} 0 & -M_{25} \\ \frac{M_{13}}{M_{12}} & 0 \end{array} \right| = \frac{M_{25}\, M_{13}}{M_{12}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{34} \neq M_{24}M_{13} \quad \text{или} \quad M_{12}\,M_{35} \neq M_{25}\,M_{13},$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{12} \neq 0$ и числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (3.4), (3.5). Верно и обратное, если $M_{12} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (3.4), (3.5), то числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2.

Пусть $M_{13} \neq 0$. Тогда

$$A = \begin{Vmatrix} M_{13} & 0 & 0 & -M_{34} & -M_{35} \\ 0 & M_{12}/M_{13} & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.8}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{24} и M_{25}. Их можно вычислить:

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 0 & -M_{34} \\ \frac{M_{12}}{M_{13}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{34}\,M_{12}}{M_{13}}; \quad M_{25} = \begin{vmatrix} 0 & -M_{35} \\ \frac{M_{12}}{M_{13}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{35}\,M_{12}}{M_{13}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{34} \neq M_{24}\,M_{13} \quad \text{или} \quad M_{12}\,M_{35} \neq M_{25}\,M_{13},$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{13} \neq 0$ и числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (3.4), (3.5). Верно и обратное, если $M_{13} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (3.4), (3.5), то числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2.

(2) Пусть $M_{24} \neq 0$. Тогда

$$A = \begin{Vmatrix} M_{12} & 0 & 0 & -M_{24} & -M_{25} \\ 0 & 1 & M_{34}/M_{24} & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.9}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{13} и M_{35}. Их можно вычислить:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} M_{12} & 0 \\ 0 & \frac{M_{34}}{M_{24}} \end{vmatrix} = \frac{M_{34}\,M_{12}}{M_{24}}; \quad M_{35} = \begin{vmatrix} 0 & -M_{25} \\ \frac{M_{34}}{M_{24}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{34}\,M_{25}}{M_{24}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{34} \neq M_{24}\,M_{13} \quad \text{или} \quad M_{12}\,M_{35} \neq M_{25}\,M_{13},$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{24} \neq 0$ и числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (3.4), (3.6). Верно и обратное, если $M_{24} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (3.4), (3.6), то числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2.

Пусть $M_{25} \neq 0$. Тогда

$$A = \begin{Vmatrix} M_{12} & 0 & 0 & -M_{24} & -M_{25} \\ 0 & 1 & M_{35}/M_{25} & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.10}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{13} и M_{34}. Их можно вычислить:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} M_{12} & 0 \\ 0 & \frac{M_{35}}{M_{25}} \end{vmatrix} = \frac{M_{35}\,M_{12}}{M_{25}}; \quad M_{34} = \begin{vmatrix} 0 & -M_{24} \\ \frac{M_{35}}{M_{25}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{35}\,M_{24}}{M_{25}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{35} \neq M_{25}\,M_{13} \quad \text{или} \quad M_{25}\,M_{34} \neq M_{24}\,M_{35},$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{25} \neq 0$ и числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (3.5), (3.6). Верно и обратное, если $M_{25} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (3.5), (3.6), то числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2.

(3) Пусть $M_{34} \neq 0$. Тогда

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} M_{13} & 0 & 0 & -M_{34} & -M_{35} \\ 0 & M_{24}/M_{34} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{3.11}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{12} и M_{25}. Их можно вычислить:

$$M_{12} = \left| \begin{array}{cc} M_{13} & 0 \\ 0 & \frac{M_{24}}{M_{34}} \end{array} \right| = \frac{M_{24}\,M_{13}}{M_{34}}; \quad M_{25} = \left| \begin{array}{cc} 0 & -M_{35} \\ \frac{M_{24}}{M_{34}} & 0 \end{array} \right| = \frac{M_{35}\,M_{24}}{M_{34}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{34} \neq M_{24}\,M_{13} \quad \text{или} \quad M_{25}\,M_{34} \neq M_{24}\,M_{35},$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{34} \neq 0$ и числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (3.4), (3.6). Верно и обратное, если $M_{34} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (3.4), (3.6), то числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2.

Пусть $M_{35} \neq 0$. Тогда

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} M_{13} & 0 & 0 & -M_{34} & -M_{35} \\ 0 & M_{25}/M_{35} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{3.12}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы A не используются миноры M_{12} и M_{24}. Их можно вычислить:

$$M_{12} = \left| \begin{array}{cc} M_{13} & 0 \\ 0 & \frac{M_{25}}{M_{35}} \end{array} \right| = \frac{M_{25}\,M_{13}}{M_{35}}; \quad M_{24} = \left| \begin{array}{cc} 0 & -M_{34} \\ \frac{M_{25}}{M_{35}} & 0 \end{array} \right| = \frac{M_{34}\,M_{25}}{M_{35}}.$$

Как видим, если

$$M_{12}\,M_{35} \neq M_{25}\,M_{13} \quad \text{или} \quad M_{25}\,M_{34} \neq M_{24}\,M_{35},$$

то восстановить матрицу по данным «минорам» невозможно, так как таковой не существует.

Таким образом, если $M_{35} \neq 0$ и числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2, то выполняются условия Плюккера (3.5), (3.6). Верно и обратное, если $M_{35} \neq 0$ и выполняются условия Плюккера (3.5), (3.6), то числа (3.3) являются набором миноров матрицы (1.4) ранга 2. Теорема доказана. $\square$

Условия Плюккера (3.4), (3.5), (3.6) зависимы. Например, если $M_{12} \neq 0$, то из выполнения условий (3.4), (3.5) следует выполнение условия (3.6). Действительно, из (3.4) следует $M_{34} = \dfrac{M_{24}\,M_{13}}{M_{12}}$, а из (3.5) следует $M_{35} = \dfrac{M_{25}\,M_{13}}{M_{12}}$. Подставив в левую часть равенства (3.6), получим

$$M_{25}\,M_{34} - M_{24}\,M_{35} = M_{25}\,\frac{M_{24}\,M_{13}}{M_{12}} - M_{24}\,\frac{M_{25}\,M_{13}}{M_{12}} =$$

$$= \frac{M_{25}\,M_{24}\,M_{13} - M_{24}\,M_{25}\,M_{13}}{M_{12}} = 0.$$

Аналогично и в остальных случаях теоремы можно получить третье недостающее условие Плюккера.

Поэтому теорему 2 можно сформулировать короче в виде следующего следствия.

Следствие 1. *Для того чтобы набор чисел* (3.3) *являлся набором соответствующих миноров матрицы* (1.4) *ранга* 2, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.4), (3.5), (3.6).

§ 4. Метод идентификации матрицы A

1) Пусть λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, являются точными собственными значениями краевой задачи (1.2), (1.3). Если априори известно, что искомая матрица A существует, все F_{ij} найдены точно и $F_{12} \neq 0$, то $M_{12} \neq 0$, условия Плюккера (3.4), (3.5), (3.6) выполнены, а сама матрица A имеет вид (3.7). Если дополнительно известно, что F_{12} является наибольшим по модулю минором третьего порядка матрицы F, то из (2.4) получаем, что M_{12} является наибольшим по модулю минором матрицы A, а сама матрица A с точностью до линейных преобразований строк может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{Vmatrix} F_{12} & 0 & 0 & -F_{24} & F_{25} \\ 0 & 1 & -F_{13}/F_{12} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -F_{24}/F_{12} & F_{25}/F_{12} \\ 0 & 1 & -F_{13}/F_{12} & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.1}$$

Запись матрицы A в виде (4.1) удобна тем, что набор миноров матрицы (4.1) лежит в множестве корректности M (минор $M_{12} = 1$, остальные миноры не больше единицы).

Все условия корректности по А. Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, $\widetilde{z} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3, \widetilde{\lambda}_4, \widetilde{\lambda}_5) \in \Lambda = R\,M$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_{\mathbb{R}^5} < \delta$, выполнено неравенство

$$\|(M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{25}, M_{34}, M_{35}) - (\widetilde{M}_{12}, \widetilde{M}_{13}, \widetilde{M}_{24}, \widetilde{M}_{25}, \widetilde{M}_{34}, \widetilde{M}_{35})\|_{\mathbb{R}^6} < \varepsilon.$$

Последнее вытекает из аналитичности функций $f_{ij}(\lambda)$ и $F_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

Если числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, а значит, и F_{ij} даны приближенно, то условия (3.4), (3.5), (3.6) могут не выполняться, и поэтому формально по минорам F_{ij} матрицу A построить невозможно. Однако в записи (4.1) для матрицы A не используются миноры F_{34} и F_{35}, поэтому их значения нам фактически не нужны. Если F_{12} является наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F, то матрицу (4.1) можно считать приближенным решением задачи идентификации матрицы A. Причем, как следует из вышеизложенного, набор миноров матрицы (4.1) лежит в множестве корректности M, и поэтому чем ближе числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, к точным, тем ближе к точным значениям и элементы матрицы A.

Аналогично выписываются явные приближенные решения матрицы A в случаях, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является не F_{12}, а другой минор матрицы A.

Так, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{13}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & F_{34}/F_{13} & -F_{35}/F_{13} \\ 0 & -F_{12}/F_{13} & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.2}$$

Если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{24}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \begin{Vmatrix} F_{12}/F_{24} & 0 & 0 & -1 & F_{25}/F_{24} \\ 0 & 1 & F_{34}/F_{24} & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.3}$$

Если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{25}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} -F_{12}/F_{24} & 0 & 0 & 1 & -F_{25}/F_{24} \\ 0 & 1 & F_{35}/F_{25} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{4.4}$$

Если же наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{34}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} -F_{13}/F_{34} & 0 & 0 & -1 & F_{35}/F_{34} \\ 0 & F_{24}/F_{34} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{4.5}$$

Если же наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{35}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} F_{13}/F_{35} & 0 & 0 & F_{34}/F_{35} & -1 \\ 0 & F_{25}/F_{35} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{4.6}$$

Таким образом, верна следующая

Теорема 3. *Если λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, являются собственными значениями краевой задачи* (1.2), (1.3), $\operatorname{rank} F = 5$, *то задача отыскания матрицы A по собственным значениям λ_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, является корректной по А. Н. Тихонову, где множеством корректности решения этой задачи является компакт M, определенный выше. Решение задачи представляет собой одну из матриц* (4.1)–(4.6) *в зависимости от того, какой из миноров F_{ij} матрицы F является наибольшим по модулю.*

Ниже приведены еще четыре примера решения задач идентификации закреплений распределенных механических систем.

§ 5. Решение некоторых задач идентификации

Пример 1. Рассмотрим численный пример восстановления краевых условий спектральной задачи (1.2). Пусть $\lambda_1 = 4,730041$, $\lambda_2 = 7,853205$, $\lambda_3 = 10,99561$, $\lambda_4 = 14,13717$, $\lambda_5 = 17,27876$. Подставив эти значения в (1.14) и вычислив $f_{ij}^k = f_{ij}(\lambda_k)$, получим матрицу (2.3) и ее миноры:

$$F = \left\| \begin{array}{cccccc} -1,000 & 5,882 & 0,272 & 136,3 & 0,15 \cdot 10^{-7} & 0,74 \cdot 10^{-5} \\ -1,000 & -82,00 & -1,328 & -5049 & -0,6 \cdot 10^{-7} & -0,2 \cdot 10^{-3} \\ -1,032 & 1355,3 & 11,211 & 163873 & 0,22 \cdot 10^{-5} & 0,322 \cdot 10^{-1} \\ 0,555 & -24393 & -122,05 & -4875270 & -0,39 \cdot 10^{-4} & -1,555 \\ -3,7340 & 461846 & 1546,9 & 137886859 & 0,31 \cdot 10^{-4} & 2,7340 \end{array} \right\|,$$

$$F_{12} = -2335,8, \quad F_{13} = -318,12, \quad F_{24} = -10197, \quad F_{25} = 0,95164,$$

$$F_{34} = -0,89010 \cdot 10^{11}, \quad F_{35} = -0,10210 \cdot 10^{7}.$$

Так как наибольшим по модулю минором является F_{34}, то в качестве явного решения для матрицы A выбираем (4.5):

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} -F_{13}/F_{34} & 0 & 0 & -1 & F_{35}/F_{34} \\ 0 & F_{24}/F_{34} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \approx \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Это означает, что искомые краевые условия имеют вид $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$, то есть на правом конце стержня реализуется заделка.

Пример 2. Пусть $\lambda_1 = 4,730041$, $\lambda_2 = 7,853205$, $\lambda_3 = 10,99561$, $\lambda_4 = 14,13717$, $\lambda_5 = 17,27876$. Подставив эти значения в (1.14) и вычислив $f_{ij}^k = f_{ij}(\lambda_k)$, получим матрицу (2.3) и ее миноры:

$$F = \begin{Vmatrix} 7,647 & 3,348 & -0,0926 & -15,29 & -0,0523 & -8,647 \\ -202,9 & -50,13 & 0,1790 & 405,7 & 0,089 & 201,9 \\ 4750,5 & 847,6 & -0,9128 & -9501,1 & -0,4565 & -4751,5 \\ -110484 & -15396 & 7,125 & 220967 & 3,562 & 110482 \\ 2562448 & 292961 & -70,35 & -5124897 & -35,18 & -2562449 \end{Vmatrix},$$

$$F_{12} = 0,4 \cdot 10^8; \quad F_{13} = 4454, \quad F_{24} = -0,6 \cdot 10^6, \quad F_{25} = -0,2 \cdot 10^8,$$

$$F_{34} = 0,3 \cdot 10^7, \quad F_{35} = 4260.$$

Так как наибольшим по модулю минором является F_{12}, то в качестве явного решения для матрицы A выбираем (4.1):

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -F_{24}/F_{12} & F_{25}/F_{12} \\ 0 & 1 & -F_{13}/F_{12} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Это означает, что искомые краевые условия имеют вид

$$y''(1) = 0, \qquad y'''(1) - 0,5\,\lambda^4\,y(1) = 0,$$

то есть на правом конце стержня сосредоточена масса.

Пример 3. Пусть $\lambda_1 = 2,231680$, $\lambda_2 = 4,885029$, $\lambda_3 = 7,969541$, $\lambda_4 = 11,07960$, $\lambda_5 = 14,20354$. Подставив эти значения в (1.14) и вычислив $f_{ij}^k = f_{ij}(\lambda_k)$, получим матрицу (2.3) и ее миноры:

$$F = \begin{Vmatrix} 0,94597 & -0,20016 & -0,29445 & -7,3037 & -0,078452 & -1,9460 \\ -6,1818 & 5,5072 & 0,32825 & 186,93 & 0,0090994 & 5,1818 \\ 82,850 & -79,642 & -1,5833 & -6386,9 & -0,020786 & -83,850 \\ -1360,8 & 1335,0 & 12,875 & 194025 & 0,090239, & 1359,8 \\ 24441,23 & -24168 & -136,86 & -5569898 & -0,60056, & -24442 \end{Vmatrix},$$

$$F_{12} = -0,168 \cdot 10^9, \quad F_{13} = 0,168 \cdot 10^9, \quad F_{24} = -0,337 \cdot 10^9, \quad F_{25} = 61,8,$$

$$F_{34} = -0,329 \cdot 10^9, \quad F_{35} = 0,181 \cdot 10^6.$$

Так как наибольшим по модулю минором является F_{34}, то в качестве явного решения для матрицы A выбираем (4.5):

$$A = \begin{Vmatrix} -F_{13}/F_{34} & 0 & 0 & -1 & F_{35}/F_{34} \\ 0 & F_{24}/F_{34} & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 0,51 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1,02 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Это означает, что искомые краевые условия имеют вид

$$1,02\,y''(1) + y'(1) = 0, \qquad 0,51\,y'''(1) - y(1) = 0,$$

то есть на правом конце стержня реализуется упругое закрепление.

§ 6. Заключение

В работе исследована задача идентификации вида и параметров закрепления балки по пяти собственным частотам ее свободных колебаний. Показана ее корректность по Тихонову. Предъявлено явное решение в терминах матрицы (2.3). Решение представляет собой одну из матриц (4.1)–(4.6) в зависимости от того, какой из миноров F_{ij} матрицы (2.3) является наибольшим по модулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ, РФФИ, АН Республики Башкортостан, Министерства образования и науки Республики Казахстан (проекты НШ 6406.2012.1, 11–01–00293-а, 11–01–97002-р_поволжье_а, 2989 / ГФЗ МОН РК, Договор № 527 от 15 апреля 2013 г).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 200 с.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
5. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
6. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Х., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
7. Лаврентьев М.М. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Издательство Института математики, 1999.
8. Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1940.
9. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.
10. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
11. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.
12. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородных стержней // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 588–602.
13. Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
14. Gladwell G.M.L., Movahhedy M. Reconstruction of mass-spring system from spectral data. I: Theory // Inverse problems in engineering. 1995. Vol. 1. Issue 2. P. 179–189.
15. Movahhedy M., Ismail F., Gladwell G.M.L. Reconstruction of mass-spring system from spectral data. II: Experiment // Inverse problems in engineering. 1995. Vol. 1. Issue 4. P. 315–327.
16. Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse problems in engineering. 2002. Vol. 10. Issue 3. P. 183–201.
17. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
18. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика закрепления и повреждений балки на упругих опорах // Контроль. Диагностика. М.: Издательский дом «Спектр», 2010. № 9. С. 57–63.
19. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Тр. ин-та механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 2007. Вып. 5. С. 201–211.
20. Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
21. Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С. Определение вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. 2008. Т. 54. № 2. С. 181–188.
22. Ахтямов А.М., Урманчеев С.Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4. С. 19–24.
23. Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1011–1015.

24. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.
25. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма–Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями. М.: Изд-во МГУ, 2009. 184 с.
26. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
27. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
28. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.
29. Мамфорд Д.Б. Алгебраическая геометрия. 1. Комплексные многообразия. М.: Мир, 1979.
30. Hodge W.V.D., Pedoe D. Methods of Algebraic Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. viii+440 p.
31. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. М.: Гостехиздат, 1956. 443 с.

Поступила в редакцию 19.02.2013

Ахтямов Азамат Мухтарович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред, факультет математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, 450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32;
ведущий научный сотрудник, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук, 450054, Россия, г. Уфа, проспект Октября, 71.
E-mail: akhtyamovam@mail.ru

Муфтахов Артур Вильевич, доктор философии, лектор, Инженерный академический колледж им. Сами Шамуна, 77245, Израиль, г. Ашдод, ул. Жаботинского, 84.
E-mail:muftahov@yahoo.com

Ахтямова Айгуль Азаматовна, студентка, Башкирский государственный университет, 450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.
E-mail: phunakoshi@mail.ru

A. M. Akhtyamov, A. V. Muftakhov, A. A. Akhtyamova

On the determination of loading and fixing for one end of a rod according to its natural frequencies of oscillation

Keywords: eigenvalues, inverse problem, natural frequencies, beam, concentrated inertial element.

Mathematical Subject Classifications: 35Q74, 74J25, 34B09

The identification problem of fixing conditions for a beam according to five natural frequencies of its vibrations is considered. On the basis of Plucker's conditions arising at the restoration of a matrix according to its minors of the maximal order, the set of well-posedness of the problem is constructed and the correctness according to A. N. Tikhonov is proved. We have found an explicit solution to the problem of the identification matrix of the boundary conditions, the above solution is written out in terms of the characteristic determinant for the corresponding spectral problem. The corresponding examples are provided.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for solving ill-posed problems), Moscow: Nauka, 1974, 224 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* (The theory of linear ill-posed problems and its applications), Moscow: Nauka, 1978, 200 p.
3. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* (Ill-posed problems of mathematical physics and analysis), Moscow: Nauka, 1980, 288 p.
4. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Numerical methods for solving ill-posed problems), Moscow: Nauka, 1990, 232 p.

5. Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G. *Nelineinye nekorrektnye zadachi* (Nonlinear ill-posed problems), Moscow: Nauka, 1995.

6. Lavrent'ev M.M., Reznitskaya K.Kh., Yakhno V.G. *Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* (One-dimensional inverse problems of mathematical physics), Novosibirsk: Nauka, 1982.

7. Lavrent'ev M.M. *Teoriya operatorov i nekorrektnye zadachi* (The theory of operators and ill-posed problems), Novosibirsk: Izd. Inst. Mat., 1999.

8. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). *The Theory of Sound, vol. I.* Translated under the title *Teoriya zvuka, tom 1*, Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1940.

9. Kollatz L. *Zadachi na sobstvennye znacheniya (s tehnicheskimi prilozhenijami)* (Eigenvalue problems (with technical applications)), Moscow: Nauka, 1968. 503 p.

10. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. Kolebaniya lineinykh sistem* (Vibrations in technics: the handbook. Oscillation of linear systems, vol. 1), Moscow: Mashinostroenie, 1978, 352 p.

11. Gontkevich V.S. *Sobstvennye kolebaniya plastinok i obolochek* (Characteristic oscillations of plates and shells), Kiev: Naukova dumka, 1964, 288 p.

12. Akulenko L.D., Nesterov S.V. The frequency-parametric analysis of characteristic oscillations of non-uniform rods, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 588–602.

13. Gladwell G.M.L. *Obratnye zadachi teorii kolebanii* (Inverse problems of the theory of oscillations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamic, Instutute of Computer Science, 2008, 608 p.

14. Gladwell G.M.L., Movahhedy M. Reconstruction of mass-spring system from spectral data. I: Theory, *Inverse Problems in Engineering*, 1995, vol. 1, issue 2, pp. 179–189.

15. Movahhedy M., Ismail F., Gladwell G.M.L. Reconstruction of mass-spring system from spectral data. II: Experiment, *Inverse Problems in Engineering*, 1995, vol. 1, issue 4, pp. 315–327.
DOI: 10.1080/174159795088027588

16. Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements, *Inverse Problems in Engineering*, 2002, vol. 10, issue 3, pp. 183–201.
DOI: 10.1080/10682760290010378

17. Vatul'yan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* (Inverse problems in the mechanic of deformable solid body), Moscow: Fizmatlit, 2007, 224 p.

18. Il'gamov M.A., Khakimov A.G. Diagnostics of fastening and damages of a beam on elastic pillars, *Kontrol'. Diagnostika*, Moscow: Izd. Dom "Spektr", 2010, no. 9, pp. 57–63.

19. Il'gamov M.A. Diagnostics of damages of a vertical bar, *Tr. Inst. Mekh. Ufim. Nauch. Tsentra Ross. Akad. Nauk*, Ufa: Gilem, 2007, vol. 5, pp. 201–211.

20. Akhatov I.Sh., Akhtyamov A.M. Determination of the form of attachment of a rod using the natural frequencies of its flexural oscillations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 283–290.

21. Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V., Yamilova L.S. Identification of the type and parameters of fastening from the natural frequencies of the fastened rod, *Acoustical Physics*, 2008, vol. 54, no. 2, pp. 146–152.

22. Akhtyamov A.M., Urmancheev S.F. Determination of the parameters of a rigid body clamped at an end of a beam from the natural frequencies of vibrations, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 1–5.

23. Akhtyamov A.M. On the uniqueness of the solution of an inverse spectral problem, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1061–1066.

24. Akhtyamov A.M., Safina G.F. Vibration-proof conduit fastening, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 114–121.

25. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. *Obratnaya zadacha Shturma–Liuvillya s neraspadayushchimisya kraevymi usloviyami* (Inverse Sturm–Liouville problem with nonseparated boundary conditions), Moscow: Moscow State University, 2009, 184 p.

26. Ahtyamov A.M. *Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniya* (Theory of identification of boundary conditions and its applications), Moscow: Fizmatlit, 2009, 272 p.

27. Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Nauka, 1969, 526 p.

28. Postnikov M.M. *Lineinaya algebra i differentsial'naya geometriya* (Linear algebra and differential geometry), Moscow: Nauka, 1979, 312 p.

29. Mamford D.B. *Algebraicheskaya geometriya. 1. Kompleksnye mnogoobraziya* (Algebraic geometry. 1. Complex varieties), Moscow: Mir, 1979.

30. Hodge W.V.D., Pedoe D. *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994, viii+440 p.

31. Finikov S. P. *Teoriya par kongruentsii* (Theory of pairs of congruence), Moscow: Gostekhizdat, 1956, 443 p.

Received 19.02.2013

Akhtyamov Azamat Mukhtarovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technology, Bashkir State University, ul. Zaki Validi, 32, Ufa, 450076, Russia;
Leading Researcher, Institute of Mechanics, Ufa Centre of the Russian Academy of Sciences, pr. Oktyabrya, 71, Ufa, 450054, Russia. E-mail: akhtyamovam@mail.ru

Muftakhov Artur Vil'evich, Ph. D., Lector, Shamoon College of Engineering, Jabotinski St., 84, Ashdod, 77245, Israel. E-mail: muftahov@yahoo.com

Akhtyamova Aigul' Azamatovna, student, Department of Mathematics and Information Technology, Bashkir State University, ul. Zaki Validi, 32, Ufa, 450054, Russia.
E-mail: phunakoshi@mail.ru