УДК 519.6

© *А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов*

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ КУРЬЕРА С ОСОБЕННОСТЬЮ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИЙ СТОИМОСТИ [1]

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов с ограничениями в виде условий предшествования и (внутренними) работами, выполняемыми в пределах мегаполисов. Особенностью является то, что стоимости внешних перемещений и внутренних работ явным образом зависят от списка заданий. Построен метод итераций с элементами декомпозиции совокупного решения, задаваемого в виде пары «маршрут–трасса».

Ключевые слова: маршрут, метод итераций, условия предшестовования.

Введение

Ниже используются следующие сокращения: АЭС — атомная электростанция, ЗК — задача коммивояжера, МДП — метод динамического программирования, МИ — метод итераций, п/м — подмножество, УП — упорядоченная пара.

Исследуемая далее задача маршрутизации на идейном уровне восходит к известной труднорешаемой задаче — ЗК [1–3], но содержит целый ряд существенных особенностей постановки, появление которых связано с интересами использования в прикладных задачах и, в частности, в некоторых задачах, возникающих в атомной энергетике (см. [4, 5]), где все более актуальной становится проблема снижения облучаемости персонала АЭС. Эти особенности приводят в рассматриваемой задаче к вопросам, интересным и в математическом отношении. В частности, это касается применения МДП в нестандартных ситуациях, построения специального МИ, который дополняет МДП в задачах большой размерности и целого ряда других моментов. В связи с использованием МДП для решения ЗК отметим оригинальные работы [6, 7] (в связи с решением ЗК отметим также широко используемый метод ветвей и границ [8]). В [9] дано развитие МДП и МИ, связанное с задачей последовательного обхода мегаполисов при условиях предшествования (см. [1], [9, часть 2]); в [10] приведена весьма общая конструкция на основе МИ для решения маршрутных задач, осложненных ограничениями и внутренними работами в пределах мегаполисов (разработка специализированного МИ была начата в [11], хотя ряд подготовительных конструкций был введен ранее в [12]; вариант МИ для случая задачи «на узкие места» построен в [13]). Упомянутые построения касались постановки, в рамках которой стоимости перемещений не зависели явно от списка невыполненных (на момент перемещения) заданий, что является традиционным при исследовании задач маршрутизации.

В то же время в некоторых приложениях возникает необходимость в учете такого рода зависимостей. Это касается, в частности, задачи о демонтаже оборудования энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации (см. [4, 5]), где исполнитель (исполнители) находится под воздействием радиации, порождаемой теми фрагментами оборудования, которые на данный момент еще не демонтированы (можно говорить о маршрутизации процесса «выключения» источников радиации). Вариант МДП для упомянутой постановки был предложен в [14]; в задаче, рассматриваемой в [14], предполагалось, однако, что пункт прибытия и пункт отправления для каждого мегаполиса (имеется в виду локализованная совокупность фрагментов оборудования) совпадают. Исследование варианта МИ без упомянутого предположения (и это существенно) составляет цель настоящей работы (соответствующие конструкции на основе МДП также были

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (12–01–00537) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12–П–1–1019, 12–П–1–1012).

построены несколько ранее). Предлагаемое исследование можно рассматривать как естественное развитие подхода [9, часть 4], [10], ориентированное на применение в прикладных задачах, подобных рассматриваемым в [4, 5]. Вместе с тем исследуемая далее задача содержит особенности, представляющие интерес и с точки зрения математического исследования.

Мы рассматриваем задачу последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования (предусматриваются ограничения, при которых для некоторых пар мегаполисов постулируется посещение одного из них только после другого), осложненную необходимостью выполнения работ в пределах мегаполисов и явной зависимостью стоимостей перемещений и упомянутых работ от списка заданий. В отношении работ в мегаполисах (они далее именуются внутренними) предполагается, что они могут начинаться в одном пункте (прибытия), а завершаться в другом. Для данной весьма общей постановки предлагается преобразование маршрутной задачи (экстремальная задача с зависимыми или связанными переменными преобразуется в задачу с независимыми переменными), после чего конструируется МИ, допускающий идейную аналогию с методом покоординатного спуска.

§ 1. Общие понятия и обозначения

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, пропозициональные связки и др.); $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению, $\emptyset$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Для всякого объекта z, как обычно, $\{z\} \stackrel{\triangle}{=} \{z;z\}$. Кроме того, для любых двух объектов p и q имеем [15, с. 67] в виде $(p,q) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\{p\};\{p;q\}\big\}$ УП с первым элементом p и вторым элементом q. Если z есть УП, то объекты $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ есть def первый и второй элементы z, для которых $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$; в случае $z \in A \times B$, где A и B — множества, имеем $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$. Для всяких трех объектов a, b и c, как обычно [16, с. 17], полагаем $(a,b,c) \stackrel{\triangle}{=} \big((a,b),c\big)$; кроме того, для любых трех множеств A, B и C полагаем [16, с. 17], что $A \times B \times C \stackrel{\triangle}{=} (A \times B) \times C$. Эти традиционные соглашения существенны в последующих определениях основной части работы.

Через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества S, а через $\mathrm{Fin}(S)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(S)$. Если A и B — непустые множества, $s : A \to B$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то через $(s|C)$ обозначаем сужение s на C [16, с. 18], то есть

$$(s|C) : C \longrightarrow B$$

и при этом $(s|C)(x) \stackrel{\triangle}{=} s(x) \ \ \forall x \in C$. Для функций нескольких переменных используем обычные правила экономии скобок. Так, если A, B, C — множества, $D \in \mathcal{P}(A \times B)$, $s : D \to C$, $a \in A$, $b \in B$ и $z \stackrel{\triangle}{=} (a,b) \in D$, то наряду с $s(z)$ используем также обозначение $s(a,b)$, полагая $s(a,b) \stackrel{\triangle}{=} s(z)$. Если A, B, C и D — множества,

$$h : A \times B \times C \longrightarrow D,$$

$a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$, то $h(a,b,c) \stackrel{\triangle}{=} h(z)$, где $z \stackrel{\triangle}{=} (a,b,c)$; если же $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$, то в соответствии с вышеупомянутым соглашением о представлении $A \times B \times C$ определен элемент $h(\mu,\nu) \in D$, так как $(\mu,\nu) \in A \times B \times C$.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $[0,\infty[\stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} |\, 0 \leqslant \xi\}$ (замкнутая полупрямая), $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$;

$$\overline{k,l} \stackrel{\triangle}{=} \big\{t \in \mathbb{N}_0 |\, (k \leqslant t)\&(t \leqslant l)\big\} \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall l \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

(в (1.1) допускается реализация $\emptyset$). Через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций, действующих из множества S в полупрямую $[0,\infty[$.

Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и (непустое) множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [17, с. 87] «отрезка» $\overline{1,|K|}$ на множество K. Если S — множество и $K \in \mathrm{Fin}(S)$, то $|K| \in \mathbb{N}$ и $(\mathrm{bi})[K] \neq \emptyset$. Пусть $|\emptyset| \stackrel{\triangle}{=} 0$. Перестановкой непустого множества A называется [17, с. 87] всякая биекция A на себя; если α — перестановка A, то определена перестановка α^{-1} множества A, обратная к α: $\alpha\big(\alpha^{-1}(a)\big) = \alpha^{-1}\big(\alpha(a)\big) = a \ \ \forall a \in A$.

§ 2. Постановка задачи

В дальнейшем фиксируем непустое множество X, точку $x^0 \in X$, называемую базой, число $N \in \mathbb{N}$, для которого $2 \leqslant N$, и кортеж множеств

$$(M_i)_{i \in \overline{1,N}} : \ \overline{1,N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемых мегаполисами. Постулируем далее, что

$$(x^0 \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1,N}) \,\&\, (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1,N} \quad \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{2.2}$$

В соответствии с (2.2) мегаполисы являются «островами», не содержащими базы. Рассматриваем перемещения вида

$$(x_0 = x^0) \to (x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}), \tag{2.3}$$

где α — перестановка $\overline{1,N}$, которая может быть стеснена условиями предшествования.

Через $\mathbb{P}$ обозначаем далее множество всех перестановок множества $\overline{1,N}$; пусть $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$. Тогда [9, часть 2]

$$\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \big\{\alpha \in \mathbb{P} |\, \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall z \in \mathbf{K}\big\} \tag{2.4}$$

есть множество всех перестановок $\overline{1,N}$, допустимых по предшествованию. Будем полагать, что в (2.3) могут использоваться только перестановки $\alpha \in \mathbb{A}$, именуемые далее маршрутами. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее

Условие 2.1. $\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall z \in \mathbf{K}_0$.

Тогда (при упомянутом условии) имеем [9, (2.2.53)], что $\mathbb{A} \neq \emptyset$, то есть $\mathbb{A} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$. Как следствие, $\mathbb{A} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{P})$. В связи с (2.1) полагаем, что

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big); \tag{2.5}$$

тогда $\mathbf{X} \in \mathrm{Fin}(X)$. Мы полагаем в дальнейшем, что

$$z^0 \stackrel{\triangle}{=} (x^0, x^0);$$

тогда $z^0 \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Через $\mathbf{Z}$ условимся обозначать множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Тогда

$$\mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \big\{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathbf{Z} |\, (z_0 = z^0) \& (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N})\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Z}) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.6}$$

Если $\alpha \in \mathbb{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha$, то пара $(\alpha, \mathbf{z})$ является допустимым решением. В дальнейшем будет введено одно несущественное преобразование, удобное в конструкциях МИ.

Функции стоимости. В дальнейшем $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Фиксируем $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]$, $f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]$ и кортеж

$$(c_i)_{i \in \overline{1,N}} : \ \overline{1,N} \longrightarrow \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]$$

(итак, $c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}\times\mathbf{X}\times\mathfrak{N}], \dots, c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}\times\mathbf{X}\times\mathfrak{N}]$). С учетом упомянутых соглашений о представлении $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\times\mathfrak{N}$ имеем при $k \in \overline{1,N}, z \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ значение $c_k(z,K) \in [0,\infty[$. Используем $\mathbf{c}$ для оценивания внешних перемещений, $c_1,\dots,c_N$ — для оценивания (внутренних) работ в пределах мегаполисов, а f — для оценивания терминального состояния (полагаем функции $\mathbf{c}, c_1,\dots,c_N, f$ «максимально продолженными» в методических целях, для дальнейшего существенны их сужения; так, например, при $j \in \overline{1,N}$ функция c_j «работает» на $M_j \times M_j \times \mathfrak{N}$). С использованием $\mathbf{c}, c_1,\dots,c_N, f$ определяем аддитивный критерий. Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$, то

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \triangleq \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}\Big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}(t)\big), \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{z}(t+1)\big), \{\alpha(j):\ j \in \overline{t+1,N}\}\Big)+\\ +\sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(\mathbf{z}(t), \{\alpha(j):\ j \in \overline{t,N}\}\big)+f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(N))\big)\end{aligned} \tag{2.7}$$

(в (2.7) учитывается, что $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\times\mathfrak{N} = (\mathbf{X}\times\mathbf{X})\times\mathfrak{N}$). Для последующего существенным является случай, когда в (2.7) $\alpha \in \mathbb{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha$. При этом

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z_1), \overline{1,N}\big)+\sum_{t=1}^{N-1}\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \{\alpha(j):\ j\in\overline{t+1,N}\}\big)+\\ +\sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(z_t, \{\alpha(j):\ j\in\overline{t,N}\}\big)+f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big)\quad \forall \alpha\in\mathbb{A}\quad \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha.\end{aligned} \tag{2.8}$$

В связи с (2.6), (2.8) введем в рассмотрение декартовы произведения «квадратов» занумерованных множеств $M_1,\dots,M_N$. Итак,

$$\mathfrak{M}_\alpha \triangleq \prod_{i=1}^{N}(M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)})\quad \forall \alpha \in \mathbb{A}. \tag{2.9}$$

Кроме того, полагаем, что $\mathbf{Y}$ есть def множество всех кортежей $(y_i)_{i\in\overline{1,N}}:\ \overline{1,N} \to \mathbf{X}\times\mathbf{X}$. Если $\mathbf{x} \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ и $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, то полагаем, что $\mathbf{x}\square\mathbf{y} \in \mathbf{Z}$:

$$\big((\mathbf{x}\square\mathbf{y})(0) \triangleq \mathbf{x}\big)\&\big((\mathbf{x}\square\mathbf{y})(t) \triangleq \mathbf{y}(t)\quad \forall t\in\overline{1,N}\big). \tag{2.10}$$

С учетом (2.10) получаем, что $\mathcal{Z}_\alpha = \{z^0\square\mathbf{y}:\ \mathbf{y}\in\mathfrak{M}_\alpha\}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{A}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{(\alpha)}[\mathbf{y}] \triangleq \mathfrak{C}_\alpha[z^0\square\mathbf{y}] = \mathbf{c}\Big(x^0, \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{y}(1)\big), \overline{1,N}\Big)+\\ +\sum_{t=1}^{N-1}\mathbf{c}\Big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{y}(t)\big), \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{y}(t+1)\big), \{\alpha(j):\ j\in\overline{t+1,N}\}\Big)+\\ +\sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\Big(\mathbf{y}(t), \{\alpha(j):\ j\in\overline{t,N}\}\Big)+f\Big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{y}(N)\big)\Big)\in[0,\infty[\quad\forall\alpha\in\mathbb{A}\quad\forall\mathbf{y}\in\mathfrak{M}_\alpha.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Заметим, что $\mathfrak{M}_\alpha \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Y})\ \ \forall\alpha\in\mathbb{A}$. Из (2.11) вытекает, что

$$V \triangleq \min_{\alpha\in\mathbb{A}}\ \min_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}_\alpha}\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \min_{\alpha\in\mathbb{A}}\ \min_{\mathbf{y}\in\mathfrak{M}_\alpha}\mathfrak{C}^{(\alpha)}[\mathbf{y}] \in [0,\infty[. \tag{2.12}$$

С учетом (2.12) рассматриваем в качестве основной задачу

$$\mathfrak{C}^{(\alpha)}[(y_i)_{i\in\overline{1,N}}] \longrightarrow \min,\quad \alpha\in\mathbb{A},\quad (y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha. \tag{2.13}$$

Тогда V — значение задачи (2.13); УП $\big(\alpha^0, (y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}\big)$, для которой $\alpha^0\in\mathbb{A}, (y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_{\alpha^0}$ и $\mathfrak{C}^{(\alpha^0)}[(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}] = V$, является (оптимальным) решением (2.13). В связи с (2.13) введем (непустое) множество

$$\mathbf{S} \triangleq \big\{(\alpha,\mathbf{y})\in\mathbb{A}\times\mathbf{Y} \,|\, \mathbf{y}\in\mathfrak{M}_\alpha\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{A}\times\mathbf{Y}) \tag{2.14}$$

всех допустимых решений задачи (2.13). Пусть, кроме того,

$$W:\ \mathbf{S} \longrightarrow [0,\infty[\tag{2.15}$$

определяется тем условием, что $W(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{C}^{(\mathrm{pr}_1(s))}[\mathrm{pr}_2(s)]\ \ \forall s \in \mathbf{S}$. Тогда

$$W\big(\alpha,(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) = \mathfrak{C}^{(\alpha)}[(y_i)_{i\in\overline{1,N}}] \in [0,\infty[\ \ \forall \alpha \in \mathbb{A}\ \ \forall (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha.$$

Задача (2.13) преобразуется (см. (2.14)) к виду

$$W(s) \longrightarrow \min, \quad s \in \mathbf{S}. \tag{2.16}$$

Как следствие, имеем из (2.12), (2.14) равенство

$$V = \min_{s\in\mathbf{S}} W(s). \tag{2.17}$$

В свою очередь, из (2.14) и определения W (2.15) вытекает, что экстремальное множество задачи (2.16) непусто и имеет следующий вид:

$$\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \big\{s_0 \in \mathbf{S} \,|\, W(s_0) = V\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}). \tag{2.18}$$

В (2.16)–(2.18) имеем исчерпывающую характеризацию основной задачи маршрутизации. В этой связи напомним, что (см. (2.11), (2.14))

$$\begin{gathered} W\big(\alpha,(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,N}\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_t), \mathrm{pr}_1(y_{t+1}), \{\alpha(j):\ j \in \overline{t+1,N}\}\big) + \\ + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(y_t, \{\alpha(j):\ j\in\overline{t,N}\}\big) + f\big(\mathrm{pr}_2(y_N)\big)\ \ \forall \alpha\in\mathbb{A}\ \ \forall (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Задача (2.16) сводится к минимизации значений (2.19); в дальнейшем эта задача будет эквивалентным образом преобразована к экстремальной задаче с независимыми переменными.

§ 3. Преобразование основной задачи

Рассматриваемая задача маршрутизации является экстремальной задачей со связанными (зависимыми) переменными; таковыми являются маршрут и трасса. Последняя должна быть согласована с маршрутом. Представляет интерес преобразование данной задачи к оптимизационной задаче с независимыми переменными, что облегчает, в частности, последующее построение МИ. В настоящем разделе конструируется такое преобразование. Пусть

$$\mathfrak{M} \stackrel{\triangle}{=} \prod_{i=1}^{N} (M_i \times M_i) = \big\{(y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbf{Y} \,|\, y_j \in M_j \times M_j\ \ \forall j \in \overline{1,N}\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Y}). \tag{3.1}$$

Элементы $\mathfrak{M}$ (3.1) могут рассматриваться в качестве систем «городов» (точнее, систем УП, элементы которых являются «городами» в составе мегаполисов). Тогда $\mathfrak{M}\times\mathbb{A} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Y}\times\mathbb{P})$. Введем $w \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{M}\times\mathbb{A}]$ по следующему правилу: если $h \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$, то

$$\begin{gathered} w(h) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_{\alpha(1)}), \overline{1,N}\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_{\alpha(t)}), \mathrm{pr}_1(y_{\alpha(t+1)}), \{\alpha(j):\ j\in\overline{t+1,N}\}\big) + \\ + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(y_{\alpha(t)}, \{\alpha(j):\ j \in \overline{t,N}\}\big) + f\big(\mathrm{pr}_2(y_{\alpha(N)})\big), \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $(y_i)_{i\in\overline{1,N}} = \mathrm{pr}_1(h)$ и $\alpha = \mathrm{pr}_2(h)$. Посредством (3.2) определена функция на декартовом произведении; тогда

$$w(h) \longrightarrow \min, \quad h \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}, \tag{3.3}$$

есть экстремальная задача с независимыми переменными. Имеем

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} \min_{h\in\mathfrak{M}\times\mathbb{A}} w(h) = \min_{(z_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}} \ \min_{\alpha\in\mathbb{A}} w\big((z_i)_{i\in\overline{1,N}},\alpha\big)\in [0,\infty[, \tag{3.4}$$

получая значение (экстремум) задачи (3.3); кроме того,

$$\mathbb{D} \stackrel{\triangle}{=} \{h_0 \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}|\, w(h_0) = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}\times\mathbb{A}) \tag{3.5}$$

есть (непустое) множество (оптимальных) решений задачи (3.3). В (3.3)–(3.5) определена новая задача, связь которой с исходной задачей маршрутизации будет установлена ниже. В связи с (3.3), (3.4) полезно выделить также следующие «частичные» задачи: при $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ рассматриваем задачу

$$w\big((z_i)_{i\in\overline{1,N}},\alpha\big)\longrightarrow \min, \quad \alpha\in\mathbb{A}. \tag{3.6}$$

Каждая такая задача (курьера) характеризуется значением и непустым множеством (оптимальных) решений: если $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$, то

$$(\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbb{A}} w\big((z_i)_{i\in\overline{1,N}},\alpha\big)\in [0,\infty[, \tag{3.7}$$

$$(\mathrm{sol})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\alpha_0\in\mathbb{A}|w\big((z_i)_{i\in\overline{1,N}},\alpha_0\big)= (\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}]\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}). \tag{3.8}$$

В (3.7) мы имеем стоимость системы «городов». Обращаясь к проблеме реконструкции, вводим задачу

$$(\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] \longrightarrow \min, (z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M},$$

в терминах которой реализуется следующее представление значения (3.4):

$$\mathbb{V} = \min_{(z_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}} \big[(\mathrm{val})(z_i)_{i\in\overline{1,N}}\big]. \tag{3.9}$$

Возвращаясь к основной задаче, уместно и там выделить «частичную» экстремальную задачу, связанную с оптимизацией трассы при выбранном маршруте. Итак, при $\alpha\in\mathbb{A}$ рассматриваем задачу

$$W\big(\alpha,(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big)\longrightarrow \min,\ (y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha; \tag{3.10}$$

с задачей (3.10) связываем значение (экстремум) и непустое множество (оптимальных) решений:

$$\mathcal{V}[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha} W\big(\alpha,(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big)\in [0,\infty[, \tag{3.11}$$

$$(\mathrm{SOL})[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \big\{(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha|\, W\big(\alpha,(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}\big)= \mathcal{V}[\alpha]\big\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_\alpha). \tag{3.12}$$

Тогда, в частности, имеем очевидное равенство

$$V = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \mathcal{V}[\alpha]. \tag{3.13}$$

Преобразование трассы в систему городов. Легко видеть, что

$$\mathbf{z}\circ\alpha^{-1} = \Big(\mathbf{z}\big(\alpha^{-1}(k)\big)\Big)_{k\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{A}\ \ \forall\mathbf{z}\in\mathfrak{M}_\alpha; \tag{3.14}$$

свойство, подобное (3.14), рассматривалось в [9, раздел 4.2], [10]. С учетом (3.14) определяем отображение

$$\mathbf{t}:\ \mathbf{S}\longrightarrow\mathfrak{M} \tag{3.15}$$

посредством следующего правила: если $s\in\mathbf{S}$, то $\mathbf{t}(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{z}\circ\alpha^{-1}$, где $\alpha = \mathrm{pr}_1(s)$ и $\mathbf{z} = \mathrm{pr}_2(s)$. Тогда

$$\mathbf{t}\big(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{1,N}}\big)= (z_{\alpha^{-1}(k)})_{k\in\overline{1,N}} \quad \forall\alpha\in\mathbb{A}\ \ \forall(z_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha. \tag{3.16}$$

В свою очередь, на основе (3.15), (3.16) определяется отображение

$$\mathbf{T}: \ \mathbf{S} \longrightarrow \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \tag{3.17}$$

посредством следующего правила (подобного [9, раздел 4.2], [10]):

$$\mathbf{T}(s) \stackrel{\triangle}{=} \big(\mathbf{t}(s), \mathrm{pr}_1(s)\big) \ \ \forall s \in \mathbf{S}. \tag{3.18}$$

Из (3.18) следует, конечно, что справедлива система равенств

$$\mathbf{T}\big(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) = \Big(\mathbf{t}\big(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{1,N}}\big), \alpha\Big) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{A} \ \ \forall (z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha. \tag{3.19}$$

Заметим, что определена композиция $w \circ \mathbf{T}$ отображений $\mathbf{T}$ и w; при этом

$$w \circ \mathbf{T} = \Big(w\big(\mathbf{T}(s)\big)\Big)_{s\in\mathbf{S}} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{S}].$$

Предложение 3.1. *Справедливо равенство* $W = w \circ \mathbf{T}$.

Доказательство повторяет в идейном отношении обоснование свойства 2^o) в [10, c. 276]. Заметим, что

$$(z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha \ \ \forall (z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{A}.$$

Как следствие, имеем при $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$, что $\big(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}\big) \in \mathbf{S}$, а потому определен кортеж $\mathbf{t}\big(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}\big) \in \mathfrak{M}$. Вполне очевидно

Предложение 3.2. *Если* $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ *и* $\alpha \in \mathbb{A}$, *то*

$$\mathbf{t}\big(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}\big) = (z_i)_{i\in\overline{1,N}}.$$

Следствие 3.1. *Если* $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ *и* $\alpha \in \mathbb{A}$, *то*

$$\mathbf{T}\big(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}\big) = \big((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha\big).$$

Следствие 3.2. *Отображение* $\mathbf{T}$ *есть сюръекция* $\mathbf{S}$ *на* $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$.

Доказательства следствий очевидны.

Предложение 3.3. *Отображение* $\mathbf{T}$ *есть биекция* $\mathbf{S}$ *на* $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом следствия 3.2 проверки требует лишь свойство инъективности. Выберем произвольно $u \in \mathbf{S}$ и $v \in \mathbf{S}$, для которых $\mathbf{T}(u) = \mathbf{T}(v)$. Тогда $\alpha \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(u) \in \mathbb{A}$, $(g_i)_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(u) \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\beta \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(v) \in \mathbb{A}$ и $(h_i)_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(v) \in \mathfrak{M}_\beta$. С учетом (3.18) имеем по выбору (u, v), что

$$\big(\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v)\big) \ \& \ (\alpha = \beta). \tag{3.20}$$

Второе равенство в (3.20) означает, что $\alpha^{-1} = \beta^{-1}$. Поэтому с учетом первого равенства имеем, что

$$g_{\alpha^{-1}(t)} = h_{\alpha^{-1}(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N}. \tag{3.21}$$

Пусть $t \in \overline{1,N}$. Тогда $\alpha(t) \in \overline{1,N}$ и $\alpha^{-1}\big(\alpha(t)\big) = t$. Из (3.21) следует, что

$$g_t = g_{\alpha^{-1}(\alpha(t))} = h_{\alpha^{-1}(\alpha(t))} = h_t.$$

Поскольку выбор t был произвольным, установлено равенство $(g_i)_{i\in\overline{1,N}} = (h_i)_{i\in\overline{1,N}}$. С учетом (3.20) получаем, что

$$u = \big(\alpha, (g_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) = \big(\beta, (h_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) = v. \qquad \square$$

Из предложения 3.3 следует, что определена биекция

$$\mathbf{T}^{-1} : \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbf{S},$$

обратная к $\mathbf{T}$; $\mathbf{T}^{-1}\big(\mathbf{T}(s)\big) = s$ при $s \in \mathbf{S}$, $\mathbf{T}\big(\mathbf{T}^{-1}(h)\big) = h$ при $h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$.

Предложение 3.4. *Если* $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ *и* $\alpha \in \mathbb{A}$, *то* $\mathbf{T}^{-1}\big((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha\big) = \big(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}\big)$.

Доказательство вытекает из следствия 3.1. С учетом предложения 3.3 имеем, что

$$\big(\mathfrak{M}\times\mathbb{A} = \{\mathbf{T}(s):\ s\in\mathbf{S}\}\big)\ \&\ \big(\mathbf{S} = \{\mathbf{T}^{-1}(h):\ h\in\mathfrak{M}\times\mathbb{A}\}\big). \tag{3.22}$$

Из (3.22) и предложения 3.1 легко следует равенство

$$V = \mathbb{V}, \tag{3.23}$$

а также свойство отождествимости экстремальных множеств

$$\big(\mathbb{D} = \{\mathbf{T}(s):\ s\in\mathbf{D}\}\big)\ \&\ \big(\mathbf{D} = \{\mathbf{T}^{-1}(h):\ h\in\mathbb{D}\}\big). \tag{3.24}$$

Из (3.23), (3.24) имеем факт эквивалентности задач (2.16) и (3.3).

Предложение 3.5. *Если* $\alpha\in\mathbb{A}$, *то справедливо равенство*

$$\mathcal{V}(\alpha) = \min_{\mathbf{z}\in\mathfrak{M}} w(\mathbf{z}, \alpha). \tag{3.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через ν обозначим число в правой части (3.25). С учетом (3.12) выберем $\mathbf{x}^0 \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$, получая равенство $W(\alpha, \mathbf{x}^0) = \mathcal{V}[\alpha]$, где $s^0 \triangleq (\alpha, \mathbf{x}^0) \in \mathbf{S}$, а потому $\mathbf{T}(s^0) = \big(\mathbf{t}(s^0), \alpha\big) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$. Поэтому

$$\nu \leqslant w\big(\mathbf{T}(s^0)\big) = W(s^0)$$

(см. предложение 3.1) и $\nu \leqslant \mathcal{V}[\alpha]$. Осталось установить противоположное неравенство. Используя определение ν, подберём $\mathbf{z}^* \in \mathfrak{M}$ так, что $w(\mathbf{z}^*, \alpha) = \nu$. Тогда $(\mathbf{z}^*, \alpha) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$ и, согласно предложению 3.4, $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}^*, \alpha) = (\alpha, \mathbf{z}^*\circ\alpha) \in \mathbf{S}$, где $\mathbf{z}^*\circ\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$. С учетом (3.11) получаем неравенство $\mathcal{V}[\alpha] \leqslant W(\alpha, \mathbf{z}^*\circ\alpha)$, где

$$W(\alpha, \mathbf{z}^*\circ\alpha) = (w\circ\mathbf{T})\big(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}^*, \alpha)\big) = w(\mathbf{z}^*, \alpha) = \nu.$$

Получили требуемое неравенство $\mathcal{V}[\alpha] \leqslant \nu$. □

§ 4. Метод итераций

Настоящий и последующий разделы посвящены построению МИ, допускающего идейную аналогию с методом покоординатного спуска; при этом существенно используются представления, установленные в предыдущем разделе. Однако сначала будет введена одна оценочная минорантная задача. Пусть

$$M_0 \triangleq \{x^0\}; \tag{4.1}$$

рассматриваем теперь кортеж $(M_i)_{i\in\overline{0,N}}:\ \overline{0,N} \to \mathrm{Fin}(\mathbf{X})$. Введем также минорантные функции стоимости, полагая, что

$$\Pi(i,j,K) \triangleq \min_{z\in M_i\times M_j} \mathbf{c}(z, K)\quad \forall i\in\overline{0,N}\quad \forall j\in\overline{0,N}\quad \forall K\in\mathfrak{N}. \tag{4.2}$$

Кроме того, полагаем в данном построении, что

$$\pi[t;K] \triangleq \min_{z\in M_t\times M_t} c_t(z, K)\quad \forall t\in\overline{1,N}\quad \forall K\in\mathfrak{N}. \tag{4.3}$$

Полагаем также, что $\pi[0;K] \triangleq 0\quad \forall K\in\mathfrak{N}$. Итак, значения $\pi[t;K]\in[0,\infty[$ определены при $t\in\overline{0,N}$ и $K\in\mathfrak{N}$. Наконец, полагаем, что

$$\mathbf{f}_j \triangleq \min_{x\in M_j} f(x)\quad \forall j\in\overline{0,N}. \tag{4.4}$$

В терминах (4.3)–(4.4) определяем следующую (минорантную) задачу:

$$\Pi(0,\alpha(1),\overline{1,N}) + \sum_{t=1}^{N-1}\Pi\big(\alpha(t),\alpha(t+1),\{\alpha(k):\ k\in\overline{t+1,N}\}\big)+ \\ +\sum_{t=1}^{N}\pi[\alpha(t);\{\alpha(k):\ k\in\overline{t,N}\}] + \mathbf{f}_{\alpha(N)} \longrightarrow \min,\quad \alpha\in\mathbb{A}. \tag{4.5}$$

Задаче (4.5) отвечает значение (экстремум)

$$\mathbf{v} \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big[\Pi\big(0,\alpha(1),\overline{1,N}\big)+\sum_{t=1}^{N-1}\Pi\big(\alpha(t),\alpha(t+1),\{\alpha(k):\ k\in\overline{t+1,N}\}\big)+ \\ +\sum_{t=1}^{N}\pi[\alpha(t);\{\alpha(k):\ k\in\overline{t,N}\}] + \mathbf{f}_{\alpha(N)}\Big]\in[0,\infty[, \tag{4.6}$$

а также (непустое) множество оптимальных решений

$$\mathbf{sol} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\alpha_0\in\mathbb{A}\,|\,\Pi\big(0,\alpha_0(1),\overline{1,N}\big)+\sum_{t=1}^{N-1}\Pi\big(\alpha_0(t),\alpha_0(t+1),\{\alpha_0(k):\ k\in\overline{t+1,N}\}\big)+ \\ +\sum_{t=1}^{N}\pi[\alpha_0(t);\{\alpha_0(k):\ k\in\overline{t,N}\}] + \mathbf{f}_{\alpha_0(N)} = \mathbf{v}\Big\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{A}). \tag{4.7}$$

Предложение 4.1. *Справедливо неравенство* $\mathbf{v}\leqslant V$.

Доказательство следует из определений. Рассмотрим сейчас на структурном уровне итерационную процедуру, использующую оценку, доставляемую предложением 4.1.

Итак, решаем задачу (4.5), определяя при этом нижнюю оценку $\mathbf{v}$ (см. предложение 4.1) и какое-либо решение

$$\omega_0\in\mathbf{sol}. \tag{4.8}$$

Имеем из (4.7), что $\omega_0\in\mathbb{A}$; тем самым определен вариант задачи (3.10), для которого $\alpha=\omega_0$. Этой задаче отвечают значение $\mathcal{V}[\omega_0]\in[0,\infty[$ и (непустое) экстремальное множество $(\mathrm{SOL})[\omega_0]\in\mathcal{P}'(\mathfrak{M}_{\omega_0})$. Решаем задачу

$$W\big(\omega_0,(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big)\longrightarrow\min,\quad (y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_{\omega_0}, \tag{4.9}$$

определяя $\mathcal{V}[\omega_0]$ и какое-либо решение

$$(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\in(\mathrm{SOL})[\omega_0]; \tag{4.10}$$

получаем (см. (3.12), (4.9), (4.10)), что $(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_{\omega_o}$ и при этом

$$W\big(\omega_0,(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\big)=\mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.11}$$

Имеем «вилку» $\mathbf{v}\leqslant V\leqslant\mathcal{V}[\omega_0]$, а также решение

$$\lambda_0\stackrel{\triangle}{=}\big(\omega_0,(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\big)\in\mathbf{S}, \tag{4.12}$$

для которого справедливо равенство

$$W(\lambda_0)=\mathcal{V}[\omega_o]. \tag{4.13}$$

Конструируем систему «городов», полагая

$$(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{t}(\lambda_0)\in\mathfrak{M}. \tag{4.14}$$

Тогда $\mathbf{T}(\lambda_0) = \big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_0\big) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$. С учетом предложения 3.1 получаем цепочку равенств (см. (4.13))

$$w\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_0\big) = (w\circ\mathbf{T})(\lambda_0) = W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.15}$$

С учетом (4.14) рассмотрим задачу (3.6) при $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} = (z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}$, то есть задачу

$$w\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha\big) \longrightarrow \min, \alpha\in\mathbb{A}. \tag{4.16}$$

Решаем задачу (4.16), определяя $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]$ и какой-либо маршрут

$$\omega_1 \in (\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{4.17}$$

При этом, конечно, $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant w\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_0\big)$, а потому (см. (4.15))

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.18}$$

Кроме того, из (3.8) и (4.17) следует, что $\omega_1\in\mathbb{A}$ реализует равенство

$$w\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}].$$

Согласно (4.18), получаем, как следствие, что

$$w\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) \leqslant \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.19}$$

С учетом (4.14) и (4.17) имеем включение $\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$ и

$$\rho_0 \overset{\triangle}{=} \mathbf{T}^{-1}\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) \in \mathbf{S}. \tag{4.20}$$

Из (4.20) и предложения 3.4 вытекает равенство $\rho_0 = \big(\omega_1, (z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\big)$ и, с учетом предложения 3.1 и (4.19),

$$W(\rho_0) = (w\circ\mathbf{T})\Big(\mathbf{T}^{-1}\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big)\Big) = w\big((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) \leqslant \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.21}$$

Рассмотрим теперь задачу (3.10) при $\alpha = \omega_1$:

$$W\big(\omega_1, (y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) \longrightarrow \min, (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_1}. \tag{4.22}$$

Решаем задачу (4.22), определяя $\mathcal{V}[\omega_1] \in [0,\infty[$ и какое-либо решение

$$(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\omega_1]. \tag{4.23}$$

С учетом (3.12) и (4.23) имеем, конечно, что $(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_1}$ и при этом

$$\mathcal{V}[\omega_1] = W\big(\omega_1, (y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}\big). \tag{4.24}$$

Вместе с тем из (4.20) легко следует, что $(z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_1}$, а потому (см. (3.11))

$$\mathcal{V}[\omega_1] \leqslant W\big(\omega_1, (z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}\big) = W(\rho_0).$$

С учетом (4.21) получаем неравенство $\mathcal{V}[\omega_1] \leqslant \mathcal{V}[\omega_0]$, а тогда (см. (3.13) и предложение 4.1) имеем цепочку неравенств

$$\mathbf{v} \leqslant V \leqslant \mathcal{V}[\omega_1] \leqslant \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.25}$$

Из (4.25) извлекается новая «вилка» $\mathbf{v} \leqslant V \leqslant \mathcal{V}[\omega_1]$. При этом, согласно (4.24), УП

$$\lambda_1 \triangleq \big(\omega_1, (y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}\big) \in \mathbf{S} \tag{4.26}$$

реализует новую оценку сверху, поскольку, согласно (4.24),

$$W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.27}$$

Заметим, что (3.15) реализует систему «городов»

$$(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \triangleq \mathbf{t}(\lambda_1) \in \mathfrak{M}. \tag{4.28}$$

Тогда $\mathbf{T}(\lambda_1) = \big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ и определено (см. предложение 3.1) значение

$$w\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) = w\big(\mathbf{T}(\lambda_1)\big) = W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.29}$$

Располагая системой (4.28), рассмотрим соответствующий вариант задачи (3.6): решаем задачу

$$w\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha\big) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}. \tag{4.30}$$

Для этой задачи определены значение $(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \in [0,\infty[$ и (непустое) множество $(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \in \mathcal{P}'(\mathbb{A})$. С учетом (3.7) и (4.29) имеем оценку

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant w\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1\big) = \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.31}$$

На этапе решения задачи (4.30) определяем маршрут $\omega_2 \in (\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]$. Тогда, согласно (3.8), $\omega_2 \in \mathbb{A}$ и при этом

$$w\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2\big) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{4.32}$$

Из (4.31) и (4.32) вытекает следующее очевидное неравенство:

$$w\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2\big) \leqslant \mathcal{V}[\omega_1], \tag{4.33}$$

где $\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2\big) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ и, как следствие, определена УП

$$\rho_1 \triangleq \mathbf{T}^{-1}\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2\big) \in \mathbf{S}. \tag{4.34}$$

Поэтому, согласно предложению 3.4, имеем равенство

$$\rho_1 = \big(\omega_2, (z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}\big)$$

и, с учетом (4.34), $(z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_2}$. Кроме того, из предложения 3.1 следует, что

$$W(\rho_1) = \big(w \circ \mathbf{T}\big)(\rho_1) = w\big((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2\big).$$

Используя (4.33), получаем очевидную оценку

$$W(\rho_1) \leqslant \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.35}$$

Рассмотрим теперь задачу (3.10) при $\alpha = \omega_2$:

$$W\big(\omega_2, (y_i)_{i\in\overline{1,N}}\big) \longrightarrow \min, \ (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_2}. \tag{4.36}$$

Решаем задачу (4.36), определяя $\mathcal{V}[\omega_2] \in [0, \infty[$ и какое-либо ее решение

$$(y_i^{(2)})_{i \in \overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\omega_2]. \tag{4.37}$$

При этом (см. (3.1), (4.34)) имеем очевидную оценку экстремума

$$\mathcal{V}[\omega_2] \leqslant W\big(\omega_2, (z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i \in \overline{1,N}}\big),$$

то есть оценку $\mathcal{V}[\omega_2] \leqslant W(\rho_1)$, а тогда из (4.35) вытекает, что

$$\mathcal{V}[\omega_2] \leqslant \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.38}$$

С учетом (3.13), (4.25) и (4.38) получаем цепочку неравенств

$$\mathbf{v} \leqslant V \leqslant \mathcal{V}[\omega_2] \leqslant \mathcal{V}[\omega_1] \leqslant \mathcal{V}[\omega_0], \tag{4.39}$$

определяющую новую «вилку» $\mathbf{v} \leqslant V \leqslant \mathcal{V}[\omega_2]$. В то же время, согласно (3.12) и (4.37), для $(y_i^{(2)})_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_2}$ имеем, что УП

$$\lambda_2 \overset{\triangle}{=} \big(\omega_2, (y_i^{(2)})_{i \in \overline{1,N}}\big) \in \mathbf{S} \tag{4.40}$$

обладает следующим свойством реализации экстремума $\mathcal{V}[\omega_2]$:

$$W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\omega_2]. \tag{4.41}$$

Из (4.13), (4.27) и (4.41) следует, что решения λ_0, λ_1 и λ_2 реализуют последовательное уточнение (см. (4.39)) верхней оценки глобального экстремума; в этой связи см. (4.12), (4.26) и (4.40). Каждое из упомянутых решений является УП «маршрут–трасса».

§ 5. Регулярный шаг процедуры

Рассмотрим цепочку преобразований $\lambda_0 \to \lambda_1 \to \lambda_2$ с точки зрения общего правила, определяющего итерационный процесс в $\mathbf{S}$. Заметим, прежде всего, что, согласно (2.14), при $s \in \mathbf{S}$ имеем свойство $\mathrm{pr}_2(s) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{pr}_1(s)}$ и, кроме того, определено (см. (3.11)) значение $\mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(s)]$ (имеем также $W(s) \in [0, \infty[$). Пусть

$$\mathbf{S}^0 \overset{\triangle}{=} \big\{s \in \mathbf{S} |\, W(s) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(s)]\big\}. \tag{5.1}$$

В связи с (5.1) отметим, что, согласно (4.13), (4.27) и (4.41), $\lambda_0 \in \mathbf{S}^0, \lambda_1 \in \mathbf{S}^0$ и $\lambda_2 \in \mathbf{S}^0$. Отметим также, что при $s \in \mathbf{S}$, согласно (3.15), определена система «городов» $\mathbf{t}(s) \in \mathfrak{M}$, для которой по правилу (3.8) конструируется (непустое) множество $(\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)] \in \mathcal{P}'(\mathbb{A})$; если к тому же $\alpha \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)]$, то в соответствии с (3.11), (3.12) имеем $\mathcal{V}[\alpha] \in [0, \infty[$ и $(\mathrm{SOL})[\alpha] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_\alpha)$, причем $(\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbf{S} \;\; \forall \mathbf{y} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$.

Предложение 5.1. *Если* $s \in \mathbf{S}^0$, $\alpha \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)]$ *и* $\mathbf{y} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$, *то* $\tilde{s} \overset{\triangle}{=} (\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbf{S}^0$ *и, кроме того,* $W(\tilde{s}) \leqslant W(s)$.

Доказательство подобно обоснованию предложения 5.1 работы [10]. Пусть

$$\widetilde{\mathbf{S}}^0_\lambda \overset{\triangle}{=} \bigcup_{\alpha \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]} \big\{(\alpha, \mathbf{y}) :\; \mathbf{y} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]\big\} \;\; \forall \lambda \in \mathbf{S}. \tag{5.2}$$

Разумеется, в (5.2) определены непустые п/м $\mathbf{S}$. Из предложения 5.1 и (5.2) следует, в частности, что

$$\widetilde{\mathbf{S}}^0_\lambda \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}^0) \;\; \forall s \in \mathbf{S}^0. \tag{5.3}$$

Возвращаясь к построениям предыдущего раздела и учитывая (5.3), мы получаем, что определены множества $\widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_0} \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}^0)$, $\widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_1} \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}^0)$, $\widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_2} \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}^0)$, причем $\lambda_1 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_0}$ и $\lambda_2 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_1}$. Учитывая непустоту множеств (5.3), данное построение можно продолжать, конструируя последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ в $\mathbf{S}^0$, для которой

$$\lambda_k \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Из (5.2) и предложения 5.1 видно, что при этом

$$W(\lambda_k) \leqslant W(\lambda_{k-1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Вычислительный эксперимент показал, что процедура (5.4) быстро стабилизируется. В этой связи отметим

Предложение 5.2. *Если $\lambda \in \mathbf{S}^0$ и при этом $\lambda \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_\lambda$, то для УП $\Lambda \triangleq \mathbf{T}(\lambda) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ реализуется следующее свойство внутренней экстремальности:*

$$\mathrm{pr}_2(\Lambda) \in (\mathrm{sol})[\mathrm{pr}_1(\Lambda)].$$

Доказательство подобно в идейном отношении обоснованию предложения 5.2 работы [10]. Вполне очевидно

Следствие 5.1. *Если УП $\lambda \in \mathbf{S}^0$ такова, что $\lambda \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_\lambda$, то $\Lambda \triangleq \mathbf{T}(\lambda) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ реализует цепочку равенств*

$$w(\Lambda) = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} w\big(\mathrm{pr}_1(\Lambda), \alpha\big) = \min_{z\in\mathfrak{M}} w\big(z, \mathrm{pr}_2(\Lambda)\big).$$

Из следствия 5.1 видно, что точки стабилизации итерационной процедуры (обнаруженные при проведении обширного вычислительного эксперимента) всегда обладают некоторым свойством локальной покомпонентной оптимальности в задаче (3.3).

§ 6. Динамическое программирование в задаче оптимизации трассы

В настоящем разделе рассматривается решение задачи (3.10) при фиксированном (в пределах настоящего раздела) маршруте

$$\alpha \in \mathbb{A}. \tag{6.1}$$

Ставим своей целью определение значения $\mathcal{V}[\alpha]$ (3.11) и какого-либо решения из множества (3.12). Построения настоящего раздела допускают идейную аналогию с [10, раздел 6]. Поэтому некоторые рассуждения будут опущены по соображениям объема. Задача (3.10) может рассматриваться как задача последовательного управления с дискретным временем. Введем ее естественное расширение. Если $m \in \overline{0, N-1}$ и $x \in \mathbf{X}$, то через $\mathbb{Z}^{(\alpha)}_m[x]$ обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i\in\overline{0,N-m}} : \ \overline{0, N-m} \longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}, \tag{6.2}$$

для каждого из которых $z_0 = (x, x)$ и, кроме того,

$$z_j \in M_{\alpha(m+j)} \times M_{\alpha(m+j)} \quad \forall j \in \overline{1, N-m}; \tag{6.3}$$

разумеется, $\mathbb{Z}^{(\alpha)}_m[x]$ — непустое конечное множество. Условимся также о следующем соглашении для критериальных зависимостей, оценивающих кортежи (6.2), (6.3): при $m \in \overline{0, N-1}$ и $x \in \mathbf{X}$ полагаем, что отображение $F^{(\alpha)}_m[x] : \ \mathbb{Z}^{(\alpha)}_m[x] \longrightarrow [0, \infty[$ определяется правилом

$$\begin{gathered} F^{(\alpha)}_m[x]\big((z_t)_{t\in\overline{0,N-m}}\big) \triangleq \sum_{t=0}^{N-(m+1)} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \{\alpha(j) : j \in \overline{m+t+1, N}\}\big) + \\ + \sum_{t=1}^{N-m} c_{\alpha(m+t)}\big(z_t, \{\alpha(j) : \ j \in \overline{m+t, N}\}\big) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_{N-m})\big) \quad \forall (z_t)_{t\in\overline{0,N-m}} \in \mathbb{Z}^{(\alpha)}_m[x]. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Расширение задачи (3.10) связывается со следующей серией задач:

$$F_m^{(\alpha)}[x]\big((z_t)_{t\in\overline{0,N-m}}\big)\longrightarrow \min,\ (z_t)_{t\in\overline{0,N-m}}\in \mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x], \tag{6.5}$$

где $m\in\overline{0,N-1}$ и $x\in\mathbf{X}$. Каждая из задач (6.5) характеризуется значением (экстремумом) и непустым множеством оптимальных решений: при $m\in\overline{0,N-1}$ и $x\in\mathbf{X}$ имеем

$$\mathfrak{V}_m(x|\alpha)\stackrel{\triangle}{=}\min_{(z_t)_{t\in\overline{0,N-m}}\in\mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]} F_m^{(\alpha)}[x]\big((z_t)_{t\in\overline{0,N-m}}\big)\in[0,\infty[, \tag{6.6}$$

$$(\alpha-\mathrm{Sol})[m;x]\stackrel{\triangle}{=}\big\{(z_t^0)_{t\in\overline{0,N-m}}\in\mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]|\ F_m^{(\alpha)}[x]\big((z_t^0)_{t\in\overline{0,N-m}}\big)=\mathfrak{V}_m(x|\alpha)\big\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]). \tag{6.7}$$

Полагаем также, что $\mathfrak{V}_N(x|\alpha)\stackrel{\triangle}{=}f(x)\ \ \forall x\in\mathbf{X}$.

Предложение 6.1. *Если $m\in\overline{0,N-1}$ и $x\in\mathbf{X}$, то*

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_m(x|\alpha)=\min_{z\in M_{\alpha(m+1)}\times M_{\alpha(m+1)}}&\big[\mathbf{c}\big(x,\mathrm{pr}_1(z),\{\alpha(j):\ j\in\overline{m+1,N}\}\big)+\\ &+c_{\alpha(m+1)}(z,\{\alpha(j):\ j\in\overline{m+1,N}\})+\mathfrak{V}_{m+1}\big(\mathrm{pr}_2(z)|\alpha\big)\big].\end{aligned} \tag{6.8}$$

Доказательство в существенной части подобно обоснованию предложения 6.1 работы [10]. Поэтому ограничимся совсем кратким обсуждением схемы, полагая, что ω — выражение в правой части (6.8), и опуская рассмотрение весьма очевидного случая $m=N-1$. Итак, полагаем, что $m\in\overline{0,N-2}$, получая $m+1\in\overline{0,N-1}$. С учетом (6.7) выбираем $\mathbf{z}^0\in(\alpha-\mathrm{Sol})[m;x]$, получая равенство

$$F_m^{(\alpha)}[x](\mathbf{z}^0)=\mathfrak{V}_m(x|\alpha); \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\omega\leqslant\mathbf{c}\big(x,\mathrm{pr}_1\big(\mathbf{z}^0(1)\big),\{\alpha(j):j\in\overline{m+1,N}\}\big)+c_{\alpha(m+1)}\big(\mathbf{z}^0(1),\{\alpha(j):j\in\overline{m+1,N}\}\big)+\\ +\mathfrak{V}_{m+1}\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}^0(1)\big)|\alpha\big).\end{aligned} \tag{6.10}$$

Определяем кортеж $\tilde z^0:\overline{0,N-(m+1)}\longrightarrow\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ по правилу $\tilde z^0(k)\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{z}^0(k+1)\quad\forall k\in\overline{0,N-(m+1)}$. Затем изменяем его начальное значение, полагая, что $\hat z^0$ действует из множества $\overline{0,N-(m+1)}$ в $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ по правилу

$$\big(\hat z^0(0)=\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}^0(1)\big),\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}^0(1)\big)\big)\big)\ \&\ \big(\hat z^0(t)\stackrel{\triangle}{=}\tilde z^0(t)\ \ \forall t\in\overline{1,N-(m+1)}\big).$$

Тогда $\hat z^0\in\mathbb{Z}_{m+1}^{(\alpha)}[\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}^0(1)\big)]$, а потому (см. (6.6)) $\mathfrak{V}_{m+1}\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}^0(1)\big)|\alpha\big)\leqslant F_{m+1}^{(\alpha)}[\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}^0(1)\big)](\hat z^0)$. С учетом (6.9), (6.10) имеем теперь после простых преобразований неравенство

$$\omega\leqslant\mathfrak{V}_m(x|\alpha). \tag{6.11}$$

Выберем теперь $u\in M_{\alpha(m+1)}\times M_{\alpha(m+1)}$ так, что

$$\begin{aligned}\omega=\mathbf{c}\big(x,\mathrm{pr}_1(u),\{\alpha(j):j\in\overline{m+1,N}\}\big)+\\ +c_{\alpha(m+1)}\big(u,\{\alpha(j):j\in\overline{m+1,N}\}\big)+\mathfrak{V}_{m+1}\big(\mathrm{pr}_2(u)|\alpha\big).\end{aligned} \tag{6.12}$$

С учетом (6.7) выберем произвольно $w\in(\alpha-\mathrm{Sol})[m+1;\mathrm{pr}_2(u)]$. Тогда $w\in\mathbb{Z}_{m+1}^{(\alpha)}[\mathrm{pr}_2(u)]$ и при этом

$$\mathfrak{V}_{m+1}\big(\mathrm{pr}_2(u)|\alpha\big)=F_{m+1}^{(\alpha)}[\mathrm{pr}_2(u)](w). \tag{6.13}$$

Полагаем, что $\tilde w$ действует из $\overline{0,N-(m+1)}$ в $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ по правилу $\big(\tilde w(0)\stackrel{\triangle}{=}u\big)\ \&\ \big(\tilde w(k)\stackrel{\triangle}{=}w(k)\ \ \forall k\in\overline{1,N-(m+1)}\big)$. Затем определяем $\hat w\in\mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]$ посредством условий

$$\big(\hat w(0)\stackrel{\triangle}{=}(x,x)\big)\ \&\ \big(\hat w(t)\stackrel{\triangle}{=}\tilde w(t-1)\ \ \forall t\in\overline{1,N-m}\big). \tag{6.14}$$

Из (6.6) имеем оценку $\mathfrak{V}_m(x|\alpha) \leqslant F_m^{(\alpha)}[x](\hat{w})$, которая (с учетом (6.13), (6.14)) легко преобразуется к неравенству

$$\mathfrak{V}_m(x|\alpha) \leqslant \mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(u), \{\alpha(j) : j \in \overline{m+1, N}\}\big) + \\ + c_{\alpha(m+1)}\big(u, \{\alpha(j) : j \in \overline{m+1, N}\}\big) + \mathfrak{V}_{m+1}\big(\mathrm{pr}_2(u)|\alpha\big).$$

С учетом (6.12) получаем, что $\mathfrak{V}_m(x|\alpha) \leqslant \omega$, что в сочетании с (6.11) доставляет (6.8). $\square$

В дальнейшем удобно использовать отображения

$$\mathfrak{V}_m^{(\alpha)} \triangleq \big(\mathfrak{V}_m(x|\alpha)\big)_{x \in M_{\alpha(m)}} \in \mathcal{R}_+[M_{\alpha(m)}] \quad \forall m \in \overline{1, N}. \tag{6.15}$$

Отметим, что из (6.15), в частности, следует равенство

$$\mathfrak{V}_N^{(\alpha)} = (f|M_{\alpha(N)}). \tag{6.16}$$

Легко видеть, кроме того, что $\mathbb{Z}_0^{(\alpha)}[x^0] = \mathcal{Z}_\alpha$, а потому (см. (3.10)) имеем равенство

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathfrak{V}_0(x^0|\alpha). \tag{6.17}$$

Равенство (6.17) позволяет трактовать систему задач (6.5) как расширение (3.10). Из (6.17) и предложения 6.1 имеем равенство

$$\mathcal{V}[\alpha] = \min_{z \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}} \big[\mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, N}\big) + c_{\alpha(1)}(z, \overline{1, N}) + \mathfrak{V}_1^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\big]. \tag{6.18}$$

Из (6.15) и предложения 6.1 имеем, в свою очередь, что

$$\mathfrak{V}_m^{(\alpha)}(x) = \min_{z \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}} \big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z), \{\alpha(j) : j \in \overline{m+1, N}\}\big) + \\ + c_{\alpha(m+1)}\big(z, \{\alpha(j) : j \in \overline{m+1, N}\}\big) + \mathfrak{V}_{m+1}^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\big] \quad \forall m \in \overline{1, N-1} \;\; \forall x \in M_{\alpha(m)}. \tag{6.19}$$

В (6.19) определены преобразования $\mathfrak{V}_{s+1}^{(\alpha)} \to \mathfrak{V}_s^{(\alpha)}$, $s \in \overline{1, N-1}$. Поскольку функция $\mathfrak{V}_N^{(\alpha)}$ нам известна (см. (6.16)), мы, используя (6.18), получаем реализуемую рекуррентную процедуру

$$\mathfrak{V}_N^{(\alpha)} \longrightarrow \mathfrak{V}_{N-1}^{(\alpha)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathfrak{V}_1^{(\alpha)} \longrightarrow \mathcal{V}[a] \tag{6.20}$$

(в (6.20) подразумевается, что $N > 2$), обеспечивающую построение всех функций (6.15) и определение экстремума $\mathcal{V}[\alpha]$.

Построение оптимальной трассы. Полагаем сейчас, что все функции (6.15) нам известны, а также известно значение $\mathcal{V}[\alpha]$. С учетом (6.18) выбираем $y_1^0 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}$ так, что при этом

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1^0), \overline{1, N}\big) + c_{\alpha(1)}(y_1^0, \overline{1, N}) + \mathfrak{V}_1^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0)\big). \tag{6.21}$$

При этом $\mathrm{pr}_2(y_1^0) \in M_{\alpha(1)}$, определено значение $\mathfrak{V}_1^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0)\big)$, для которого реализуется соответствующий вариант (6.8), (6.19); с учетом этого выбираем $y_2^0 \in M_{\alpha(2)} \times M_{\alpha(2)}$ со свойством

$$\mathfrak{V}_1^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0)\big) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0), \mathrm{pr}_1(y_2^0), \{\alpha(j) : j \in \overline{2, N}\}\big) + \\ + c_{\alpha(2)}\big(y_2^0, \{\alpha(j) : j \in \overline{2, N}\}\big) + \mathfrak{V}_2^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_2^0)\big). \tag{6.22}$$

Из (6.21) и (6.22) имеем, в частности, следующее равенство:

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1^0), \overline{1, N}\big) + \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0), \mathrm{pr}_1(y_2^0), \{\alpha(j) : j \in \overline{2, N}\}\big) + \\ + \sum_{t=1}^{2} c_{\alpha(t)}\big(y_t^0, \{\alpha(j) : j \in \overline{t, N}\}\big) + \mathfrak{V}_2^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_2^0)\big) \tag{6.23}$$

(учтено свойство сюръективности α). Пусть теперь $r \in \overline{2,N}$ и уже построен кортеж

$$(y_i^0)_{i\in\overline{1,r}}: \ \overline{1,r} \longrightarrow \mathbf{X}\times\mathbf{X}, \tag{6.24}$$

для которого выполнены следующие условия:

(1') $y_j^0 \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,r}$;

(2') справедливы равенства

$$\Big(\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1^0), \overline{1,N}\big) + c_{\alpha(1)}(y_1^0, \overline{1,N}) + \mathfrak{V}_1^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0)\big)\Big) \ \& \ \Big(\mathfrak{V}_{j-1}^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_{j-1}^0)\big) =$$
$$= \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_{j-1}^0), \mathrm{pr}_1(y_j^0), \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) + c_{\alpha(j)}\big(y_j^0, \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) + \mathfrak{V}_j^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_j^0)\big) \quad \forall j \in \overline{2,r}\Big);$$

(3') $\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1^0), \overline{1,N}\big) + \sum\limits_{j=2}^{r} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_{j-1}^0), \mathrm{pr}_1(y_j^0), \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) +$
$+ \sum\limits_{j=1}^{r} c_{\alpha(j)}\big(y_j^0, \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) + \mathfrak{V}_r^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_r^0)\big)$.

Замечание 6.1. Если $r = 2$, то условия (1')–(3') очевидным образом выполнены по способу построения y_1^0 и y_2^0. □

Возвращаясь к общему случаю кортежа (6.24), отметим, что возможен один из следующих случаев: $r = N, r \in \overline{2, N-1}$. Эти случаи рассмотрим отдельно.

(a) Пусть $r = N$. Тогда $(y_i^0)_{i\in\overline{1,r}} = (y_i^0)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbf{Y}$ и с учетом (1') $(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha$ (см. (2.9)). Из (3') имеем в рассматриваемом случае равенство

$$\mathcal{V}[\alpha] = W\big(\alpha, (y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}\big),$$

означающее, согласно (3.12), что $(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$. Итак, в случае (a) мы уже располагаем α–оптимальной трассой.

(б) Пусть $r \in \overline{2, N-1}$. Тогда $r+1 \in \overline{3,N}$ и определена (см. (6.15)) функция $\mathfrak{V}_{r+1}^{(\alpha)} \in \mathcal{R}_+[M_{\alpha(r+1)}]$. Из (6.19) имеем, поскольку $\mathrm{pr}_2(y_r^0) \in M_{\alpha(r)}$, следующее равенство:

$$\mathfrak{V}_r^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_r^0)\big) = \min_{z \in M_{\alpha(r+1)} \times M_{\alpha(r+1)}} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_r^0), \mathrm{pr}_1(z), \{\alpha(j) : j \in \overline{r+1,N}\}\big) +$$
$$+ c_{\alpha(r+1)}\big(z, \{\alpha(j) : j \in \overline{r+1,N}\}\big) + \mathfrak{V}_{r+1}^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big].$$

С учетом этого выбираем $y_{r+1}^0 \in M_{\alpha(r+1)} \times M_{\alpha(r+1)}$ так, что при этом

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_r^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_r^0)\big) &= \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_r^0), \mathrm{pr}_1(y_{r+1}^0), \{\alpha(j) : j \in \overline{r+1,N}\}\big) + \\ &+ c_{\alpha(r+1)}\big(y_{r+1}^0, \{\alpha(k) : k \in \overline{r+1,N}\}\big) + \mathfrak{V}_{r+1}^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_{r+1}^0)\big).\end{aligned} \tag{6.25}$$

Теперь имеем кортеж $(y_i^0)_{i\in\overline{1,r+1}}: \ \overline{1,r+1} \longrightarrow \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ со свойством

(1") $y_j^0 \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,r+1}$.

Далее, из (2') и (6.25) следует свойство

(2"). Справедлива система равенств

$$\Big(\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1^0), \overline{1,N}\big) + c_{\alpha(1)}(y_1^0, \overline{1,N}) + \mathfrak{V}_1^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_1^0)\big)\Big) \ \&$$
$$\& \ \Big(\mathfrak{V}_{j-1}^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_{j-1}^0)\big) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_{j-1}^0), \mathrm{pr}_1(y_j^0), \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) +$$
$$+ c_{\alpha(j)}\big(y_j^0, \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) + \mathfrak{V}_j^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_j^0)\big) \quad \forall j \in \overline{2,r+1}\Big).$$

Наконец, из (3') и (6.25) вытекает также, что

(3") $\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1^0), \overline{1,N}\big) + \sum\limits_{j=2}^{r+1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(y_{j-1}^0), \mathrm{pr}_1(y_j^0), \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) +$
$+ \sum\limits_{j=1}^{r+1} c_{\alpha(j)}\big(y_j^0, \{\alpha(k) : k \in \overline{j,N}\}\big) + \mathfrak{V}_{r+1}^{(\alpha)}\big(\mathrm{pr}_2(y_{r+1}^0)\big)$.

Таким образом, в случае (б) мы смогли продолжить кортеж (6.24) еще на один шаг с сохранением всех его основных свойств: система (1')–(3') преобразована в (1")–(3").

После выполнения N регулярных шагов типа (б), включая выбор y_1^0 по правилу (6.21), мы неизбежно придем к ситуации случая (а), то есть к оптимальной относительно маршрута α трассе.

§ 7. Задача курьера, осложненная зависимостью функций стоимости от списка заданий

При реализации МИ возникает необходимость в решении задачи курьера [1] в условиях, когда стоимости перемещений зависят от списка заданий, которые на данный момент не выполнены. Это касается задачи (3.6), а также минорантной задачи (4.5). При рассмотрении задачи (3.6) следует учитывать представление (3.2). Сравнивая два вышеупомянутых варианта задачи курьера, отметим, что они могут рассматриваться каждый как весьма частный случай задачи [14]. Рассмотрим соответствующую конкретизацию. В этой связи полезно следующее соглашение: если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через $0 \diamondsuit \alpha$ обозначаем отображение, действующее в множестве $\overline{0, N}$ и такое, что

$$\big((0 \diamondsuit \alpha)(0) \stackrel{\triangle}{=} 0\big) \,\&\, \big((0 \diamondsuit \alpha)(k) \stackrel{\triangle}{=} \alpha(k) \quad \forall k \in \overline{1, N}\big). \tag{7.1}$$

Рассмотрим теперь одну вспомогательную задачу. Введем в рассмотрение три произвольные функции:

$$\big(\Gamma \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N} \times \overline{0, N} \times \mathfrak{N}]\big) \,\&\, \big(\Theta \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N} \times \mathfrak{N}]\big) \,\&\, \big(F \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N}]\big). \tag{7.2}$$

В этих терминах получаем следующую задачу:

$$\begin{gathered}\sum_{t=0}^{N-1} \Gamma\big((0 \diamondsuit \alpha)(t), (0 \diamondsuit \alpha)(t+1), \{\alpha(k) : k \in \overline{t+1, N}\}\big) + \\ + \sum_{t=1}^{N} \Theta\big(\alpha(t), \{\alpha(k) : k \in \overline{t, N}\}\big) + F\big((0 \diamondsuit \alpha)(N)\big) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Из (7.1) следует, что (7.3) сводится на самом деле к задаче

$$\begin{gathered}\Gamma\big(0, \alpha(1), \overline{1, N}\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \Gamma\big(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(k) : k \in \overline{t+1, N}\}\big) + \\ + \sum_{t=1}^{N} \Theta\big(\alpha(t), \{\alpha(k) : k \in \overline{t, N}\}\big) + F\big(\alpha(N)\big) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}.\end{gathered} \tag{7.4}$$

Замечание 7.1. Задача (7.3), (7.4) есть частный случай задачи, рассматриваемой в [14]. В самом деле, пусть в пределах данного замечания используются параметры $X, x^0, M_1, \ldots, M_N, \mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$ работы [14] в приводимой ниже конкретизации: $X = \overline{0, N}$, $x^0 = 0$, $M_i = \{i\} \ \ \forall i \in \overline{1, N}$; тогда, согласно [14, (1.2)],

$$\mathbf{c}: \ \overline{0, N} \times \overline{0, N} \times \mathfrak{N} \longrightarrow [0, \infty[, \ \ \mathbf{f}: \ \overline{0, N} \longrightarrow [0, \infty[\tag{7.5}$$

(напомним, что в наших построениях $\mathfrak{N} = \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ соответствует $\mathfrak{R}$ в [14]). Мы определяем с учетом (7.5) функцию $\mathbf{c}$ работы [14] следующим образом: при $i \in \overline{0, N}, j \in \overline{0, N}$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{c}(i, j, K) \stackrel{\triangle}{=} \Gamma(i, j, K) + \Theta(j, K). \tag{7.6}$$

Полагаем также, что $\mathbf{f}(k) \stackrel{\triangle}{=} F(k) \quad \forall k \in \overline{0, N}$. Заметим, что параметры N и $\mathbf{K}$ в [14] соответствуют соглашениям настоящей работы. Заметим также, что для принятой конкретизации множество $\mathfrak{X}$ работы [14] совпадает с множеством всех отображений, действующих в $\overline{0, N}$. При $\alpha \in \mathbb{P}$ отображение $\mathfrak{C}_\alpha$ [14, (1.3)] имеет вид

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\alpha\big((k_i)_{i \in \overline{0, N}}\big) = \Gamma(0, k_1, \overline{1, N}) + \Theta(k_1, \overline{1, N}) + \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma\big(k_i, k_{i+1}, \{\alpha(j) : j \in \overline{i+1, N}\}\big) + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \Theta\big(k_{i+1}, \{\alpha(l) : l \in \overline{i+1, N}\}\big) + F(k_N),\end{gathered} \tag{7.7}$$

где $(k_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}$. Разумеется, в (7.7) нам достаточно использовать кортежи $(k_i)_{i\in\overline{0,N}}$, являющиеся трассами в смысле [14], что отвечает случаю $(k_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha$, где $\mathfrak{X}_\alpha$ — соответствующая конкретная версия множества [14, (1.5)]. Однако в нашем случае ($x^0 = 0$, $M_i = \{i\}$ при $i \in \overline{1,N}$) из [14, (1.5)] следует, что

$$\mathfrak{X}_\alpha = \{0 \lozenge \alpha\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{7.8}$$

Итак, при $\alpha \in \mathbb{A}$ в (7.7) достаточно использовать случай $(k_i)_{i\in\overline{0,N}} = 0 \lozenge \alpha$, что приводит к тому, что рассматриваемая в [14, раздел 1] основная экстремальная задача сводится к (7.4). Итак, (7.4) есть вариант задачи [14, раздел 1]. Поэтому для решения задачи (7.3), (7.4) можно использовать (оптимальный) алгоритм работы [14]. $\square$

Теперь мы отметим, что к задаче (7.3), (7.4) сводится каждый из вариантов задачи курьера, используемый при построении МИ. Так, при $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ задача (3.6) извлекается (см. (2.10)) из (7.3), (7.4) при следующей конкретизации функций стоимости.

Полагаем при $\mathbf{z} \overset{\triangle}{=} (z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$, что $\Gamma(k,l,K) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2((z^0 \,\square\, \mathbf{z})(k)), \mathrm{pr}_1((z^0 \,\square\, \mathbf{z})(l)), K\big)$ при $k \in \overline{0,N}$, $l \in \overline{0,N}$ и $K \in \mathfrak{N}$. Далее, используем при $K \in \mathfrak{N}$ соглашение $\Theta(i,K) = c_i\big(\mathbf{z}(i), K\big)$ в случае $i \in \overline{1,N}$ и $\Theta(0,K) = 0$. Наконец, полагаем, что $F(s) = f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^0 \,\square\, \mathbf{z})(s)\big)$ $\forall s \in \overline{0,N}$.

Замечание 7.2. Соглашения, связанные с конкретизацией параметров задачи (7.3), (7.4) в интересах задачи (3.6), несколько избыточны; это связано с тем, что сама задача (7.3), (7.4) рассматривалась как вариант очень общей постановки [14]. $\square$

В условиях вышеупомянутых соглашений, касающихся представления задачи (3.6), получаем с учетом того, что $\mathrm{pr}_2(z^0) = x^0$, следующее равенство:

$$\begin{gathered}
\Gamma\big(0, \alpha(1), \overline{1,N}\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \Gamma\big(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(k) : k \in \overline{t+1,N}\}\big) + \\
+ \sum_{t=1}^{N} \Theta\big(\alpha(t), \{\alpha(k) : k \in \overline{t,N}\}\big) + F\big(\alpha(N)\big) = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{z}(\alpha(1))\big), \overline{1,N}\big) + \\
+ \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}\Big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}\big(\alpha(t)\big)\big), \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{z}\big(\alpha(t+1)\big)\big), \{\alpha(k) : k \in \overline{t+1,N}\}\Big) + \\
+ \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(\mathbf{z}\big(\alpha(t)\big), \{\alpha(k) : k \in \overline{t,N}\}\big) + f\Big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}\big(\alpha(N)\big)\big)\Big) = w(\mathbf{z}, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}.
\end{gathered}$$

Следовательно (см. (7.4)), задача (7.3), (7.4) превращается в задачу (3.6).

Рассмотрим теперь представление задачи (4.5) в терминах (7.3), (7.4). Для этого мы полагаем, что

$$\Gamma(i,j,K) = \Pi(i,j,K) \quad \forall i \in \overline{0,N} \quad \forall j \in \overline{0,N} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{7.9}$$

Кроме того, используя определения раздела 4, полагаем, что

$$\Theta(j,K) = \pi[j;K] \quad \forall j \in \overline{0,N} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{7.10}$$

Наконец, полагаем, что $F(j) = \mathbf{f}_j$ $\forall j \in \overline{0,N}$. При данной конкретизации мы получаем (см. (7.9), (7.10)) для критерия задачи (7.4) следующее представление:

$$\begin{gathered}
\Gamma\big(0, \alpha(1), \overline{1,N}\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \Gamma\big(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(k) : k \in \overline{t+1,N}\}\big) + \sum_{t=1}^{N} \Theta\big(\alpha(t), \{\alpha(k) : k \in \overline{t,N}\}\big) + \\
+ F\big(\alpha(N)\big) = \Pi\big(0, \alpha(1), \overline{1,N}\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \Pi\big(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(k) : k \in \overline{t+1,N}\}\big) + \\
+ \sum_{t=1}^{N} \pi[\alpha(t); \{\alpha(k) : k \in \overline{t,N}\}] + \mathbf{f}_{\alpha(N)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}.
\end{gathered}$$

Но в этом случае задача (7.3), (7.4) превращается в задачу (4.5), то есть в минорантную задачу раздела 4.

Итак, во всех возникающих при реализации МИ вариантах задачи курьера мы имеем соответствующие конкретизации задачи (7.3), (7.4), а последняя может быть, в свою очередь, сведена к основной задаче работы [14]. Стало быть, для решения всех вышеупомянутых вариантов задачи курьера пригодна вычислительная процедура работы [14], в основе которой находится экономичный вариант МДП, применяемый, однако, в более простом случае одноэлементных мегаполисов (последнее является существенным упрощающим обстоятельством в сравнении с общей постановкой [14]).

§ 8. Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе полагаем, что $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Итак, рассматривается маршрутная задача на плоскости. Излагаемая ниже модель ориентирована на использование в задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации; в этой связи см. [18]. Мегаполисы $M_1, \ldots, M_N$ являются, следовательно, конечными плоскими множествами, которые, в свою очередь, вложены в границы непересекающихся попарно выпуклых компактов $Y_1, \ldots, Y_N$, каждый из которых содержит выделенную точку a_j, $j \in \overline{1, N}$, рассматриваемую в качестве «излучателя». Исполнитель выбирает у каждого мегаполиса точку входа (пункт прибытия), из которой перемещается к «излучателю», демонтирует его, то есть «выключает», после чего перемещается к точке выхода (пункт отправления). Множества $Y_1, \ldots, Y_N$ определяют особые ближние зоны, в которых проводятся работы по демонтированию «излучателей». Соответственно точки $M_1, \ldots, M_N$ можно рассматривать как «входы-выходы», а точнее пункты начала и окончания работ по демонтированию. Предполагается, что в процессе этих, внутренних по смыслу, работ исполнитель получает более интенсивное радиационное воздействие, для описания которого используется всякий раз специальная модель ближней зоны (это касается, конечно, воздействия со стороны демонтируемого источника). В процессе перемещений между мегаполисами исполнитель испытывает воздействия каждого из недемонтированных на момент перемещения источников; эти воздействия суммируются. В то же время каждый отдельно взятый (недемонтированный) источник воздействует на исполнителя с интенсивностью, обратно пропорциональной квадрату расстояния от источника до исполнителя. Разумеется, такие элементарные воздействия образуют зависимость, которую требуется интегрировать вдоль соответствующего фрагмента траектории исполнителя.

В данной модели допускается также прохождение некоторых ближних зон «по пути», без исполнения каких-либо работ. В этом случае эффект таких ближних зон игнорируется, что в достаточной для целей «первого приближения» степени мотивируется различием в скоростях: предполагается, что скорость внешних перемещений существенно выше скорости перемещений при выполнении внутренних работ.

При проведении вычислительного эксперимента будем придерживаться следующей модели. Пусть после выполнения заключительного задания не требуется возвращение в начальный пункт x^0, полагаем $f(x) \equiv 0$. Кроме того, пусть с каждым источником излучения a_i связана некоторая константа γ_i (здесь $i \in \overline{1, N}$), характеризующая интенсивность излучения данного источника непосредственно в точке его размещения. Как уже было сказано выше, перемещения исполнителя условно делятся на два типа.

(1) Внешние перемещения — передвижение между точками «входов-выходов» в мегаполисы, а также перемещение из начального пункта x^0 в точку входа в первый (по порядку посещения) мегаполис.

(2) Внутренние перемещения — передвижение внутри мегаполиса. В нашей модели данный тип перемещений разбивается еще на два подтипа:

(2.1) перемещение из точки входа в мегаполис M_i, где $i \in \overline{1, N}$, к источнику излучения a_i для его демонтажа;

(2.2) перемещение от демонтированного источника a_i, $i \in \overline{1, N}$, к точке выхода из мегаполиса.

Итак, система перемещений (2.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} &x^0 \to \big(x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \Rightarrow a_{\alpha(1)} \hookrightarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}\big) \to \ldots \\ &\ldots \to \big(x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \Rightarrow a_{\alpha(N)} \hookrightarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}\big), \end{aligned} \tag{8.1}$$

здесь для случая (1) использован знак «$\rightarrow$», для случая (2.1) — «$\Rightarrow$», а для перемещения вида (2.2) — символ «$\hookrightarrow$».

При количественной оценке дозы облучения будем придерживаться естественной модели, в которой величина дозы радиации, получаемой исполнителем в каждый момент времени, является суммой доз облучения, получаемых им от всех недемонтированных на данный момент источников излучения. Всякий раз нас будет интересовать доза вредного воздействия, которую получил исполнитель при перемещении из точки $x \in X$ в точку $y \in X$, при этом перемещение это является одним из трех типов движений, приведенных выше (см. (8.1)).

Случай (1): $x = x^0$ или $x \in M_i$ и является точкой выхода мегаполиса M_i, а точка $y \in M_j$ является точкой входа мегаполиса M_j, где $i \in \overline{1,N},\ j \in \overline{1,N},\ i \neq j$.

Случай (2.1): $x \in M_i$ — точка входа в мегаполис M_i, а $y = a_i$, то есть y является источником излучения, ассоциированным с M_i, здесь $i \in \overline{1,N}$.

Случай (2.2) $x = a_i$, а $y \in M_i$ и является точкой выхода из мегаполиса $M_i,\ i \in \overline{1,N}$.

При осуществлении движений вида (1) будем запрещать такие перемещения, которые пролегают через один из не демонтированных на данный момент источников излучения.

Примем модель, при которой доза облучения, получаемая исполнителем в каждый момент времени от j-го недемонтированного источника излучения a_j, ассоциированного с множеством «входов–выходов» M_j $(j \in \overline{1,N})$, при движении из точки $x \in X$ в точку $y \in X$ количественно выражается величиной:

для случаев (1) и (2.2)

$$\gamma_j \int_0^{T_{x\to y}} \frac{dt}{r^2_{s(t)}} = \frac{\gamma_j}{v_{x\to y}} \int_0^{\rho(x,y)} \frac{dl}{\rho^2(x, \widetilde{s}(l))},$$

где $T_{x\to y}$ — время перемещения от точки x до точки y; $r_{s(t)}$ — длина радиус-вектора, направленного из источника излучения a_j в точку $s(t)$ на траектории движения исполнителя в момент времени t; переменная интегрирования l в правой части суть евклидово расстояние от точки x до точки $\widetilde{s}(l)$ на траектории движения исполнителя в момент времени t (здесь $l = l(t)$); $v_{x\to y}$ — скорость перемещения исполнителя между точками x и y; а $\rho(x,y)$ — евклидово расстояние между точками x и y; здесь и ниже мы придерживаемся кинематической модели равномерного прямолинейного движения.

Для случая (2.1) (здесь y есть a_j, а x — это точка $x_{j,1} \in M_{\alpha(j)}$)

$$3\gamma_j \int_0^{T_{x\to y}} \frac{dt}{r^2_{s(t)} + 1} = 3\frac{\gamma_j}{v_{x\to y}} \int_0^{\rho(x,y)} \frac{dl}{\rho^2(\widetilde{s}(l), y) + 1},$$

здесь смысл обозначений тот же, что и в рассмотренном выше случае.

Рассматриваемый в настоящей статье алгоритм был реализован в виде программы на языке программирования C++ (использована его реализация Embarcadero RAD Studio XE3), работающей в 64-разрядной операционной семейства Windows (Windows Vista или Windows 7). Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления маршрута и трассы; программа позволяет сохранять данный рисунок в файле графического формата bmp. Вычислительный эксперимент проводился на портативном компьютере с процессором Intel Core2Duo T7700 с тактовой частотой 2.4 гГц и объемом ОЗУ 3 гГб с установленной операционной системой Windows 7 x64 Professional.

В рассматриваемом модельном примере будем полагать, что начальная точка есть начало координат, то есть $x^0 = (0,0)$, $N = 22$, а мегаполисы (множества «входов-выходов») $M_1, \ldots, M_{22}$ суть равномерные сетки из 12 точек, расположенных на окружностях, при этом излучающие элементы расположены на горизонтальных линиях, проходящих через центры окружностей на расстоянии $1/2$ радиуса в сторону убывания координаты по оси абсцисс. Также будем полагать, что скорости внешних перемещений (см. случай (1), рассмотренный выше) в 4 раза больше, чем скорости перемещений при выполнении внутренних работ (перемещение к источнику — случай (2.1) и покидание места демонтирования источника — случай (2.2)). При этом программа сначала рассчитывает матрицы затрат на перемещения вида (1) и матрицы затрат на перемещения внутри мегаполисов (внутренние работы, случаи (2.1) и (2.2)), затем решает задачу оптимизации перемещения по мегаполисам.

По соображениям объема не будем приводить перечисление элементов мегаполисов и полный список индексов маршрута и узлов трассы.

Сначала приведем результаты работы точного алгоритма (на основе МДП):
величина совокупных затрат: $V = 195.92$;
общее время вычисления: 1 ч 11 мин 59 с;
время вычисления матриц затрат на работы внутри мегаполисов: 22 мин 24 с;
время вычисления матриц затрат на перемещения между мегаполисами: 42 мин 3 с;
график маршрута и трассы приведен на рисунке 1.

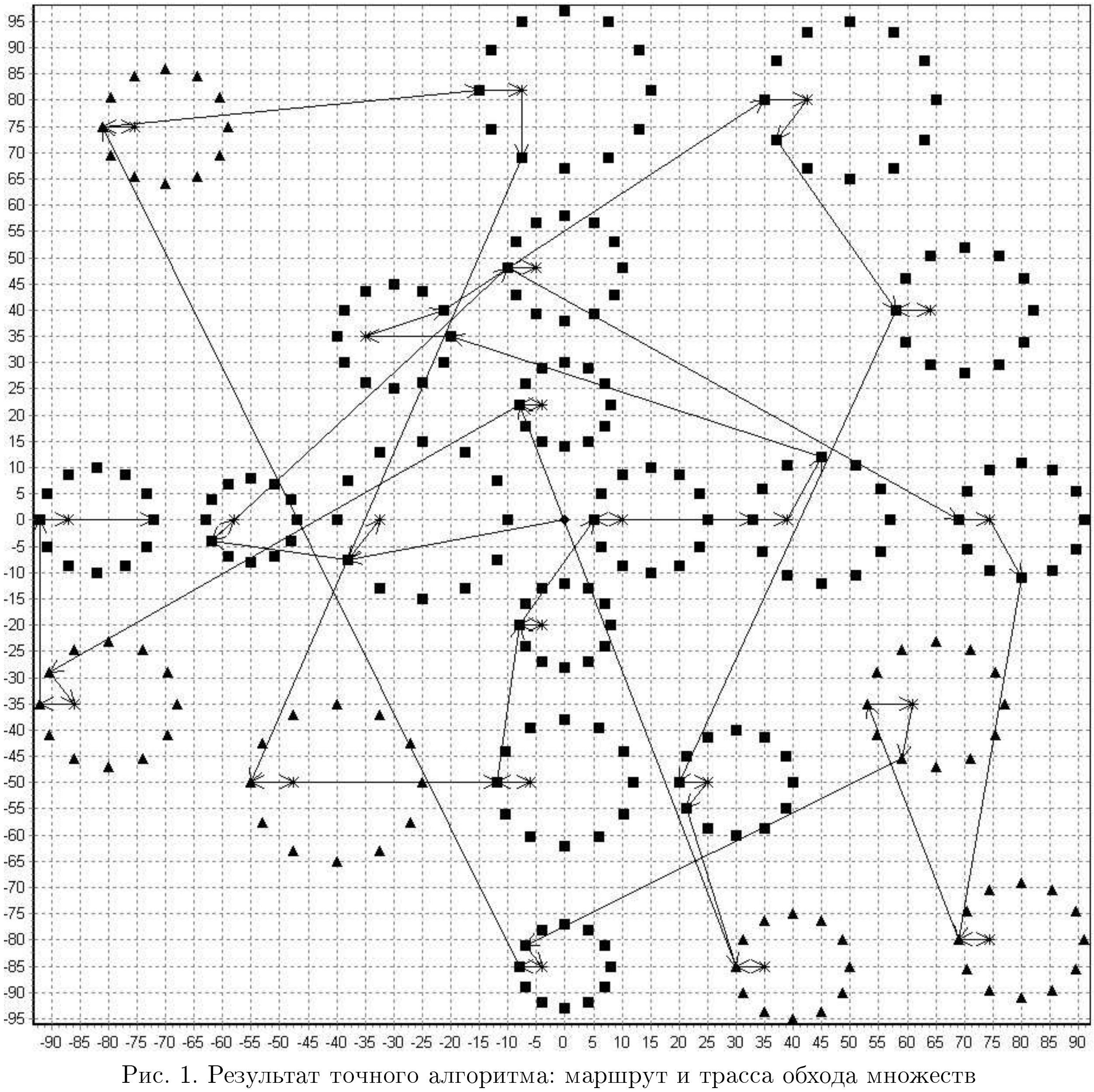

Рис. 1. Результат точного алгоритма: маршрут и трасса обхода множеств

Далее рассмотрим результаты применения итерационного алгоритма решения задачи, рассматриваемого в данной статье.

Первая итерация (получение минорантной оценки результата):
величина затрат в ЗК (4.5): $\mathbf{v} = 190.31$;
величина затрат в задаче поиска трассы (4.9): $\mathcal{V}[\omega_0] = 196.48$;

общее время вычисления: 58 мин 41 с;
время вычисления матриц затрат на работы внутри мегаполисов: 18 мин 3 с;
время вычисления матриц затрат на перемещения между мегаполисами: 39 мин 20 с;
график маршрута и трассы приведен на рисунке 2.

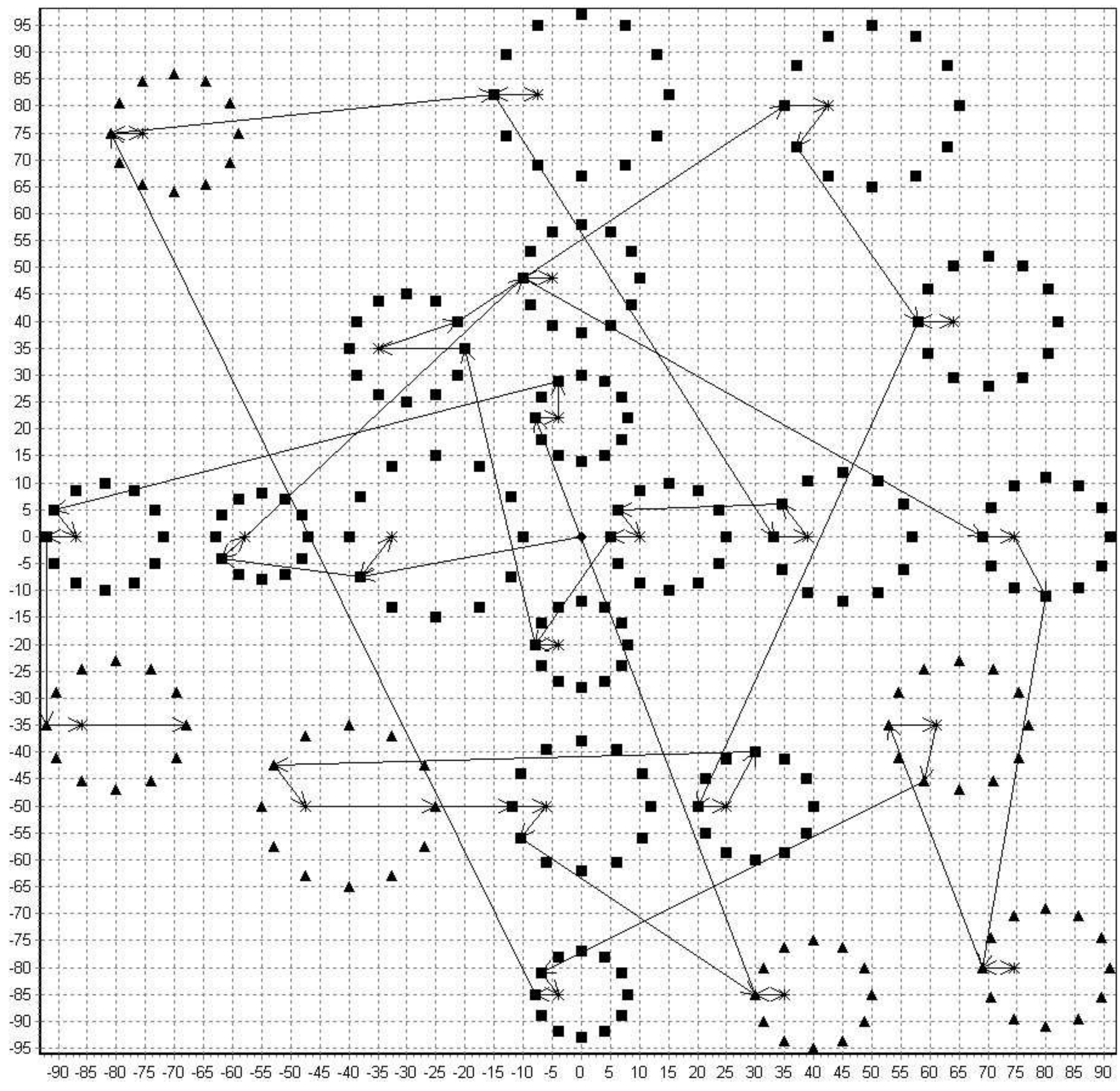

Рис. 2. Первая итерация: маршрут и трасса обхода множеств

Вторая итерация:
величина затрат в ЗК (4.16): $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] = 196,42$;
величина затрат в задаче поиска трассы (4.22): $\mathcal{V}[\omega_1] = 196,41$;
общее время вычисления: 23 с.

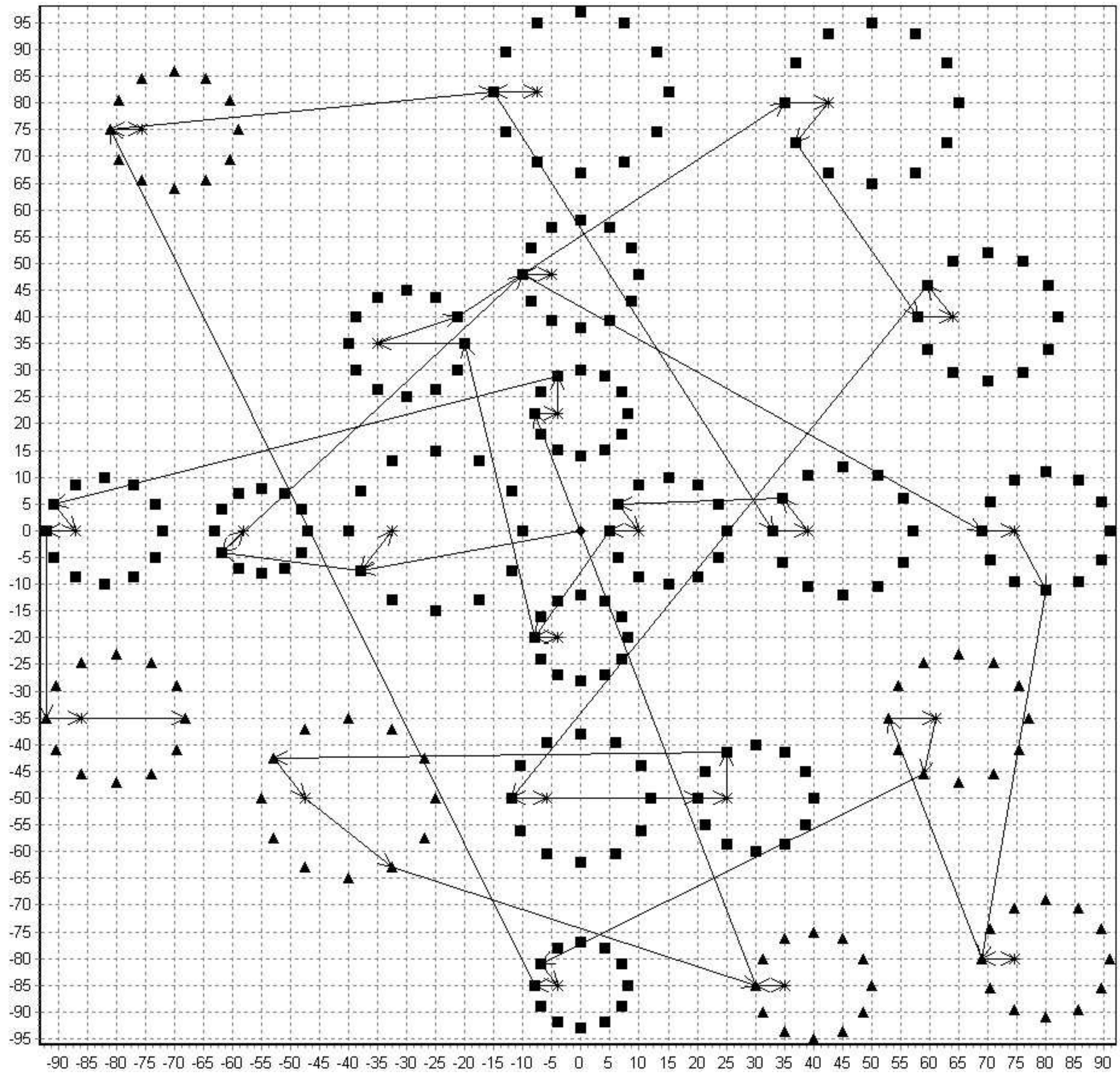

Рис. 3. Вторая итерация: маршрут и трасса обхода множеств

Третья итерация стала завершающей: изменение маршрута и трассы прекратилось, а $(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] = \mathcal{V}[\omega_2] = 196,41$. Время счета составило 23 с.

Таким образом, видно, что проигрыш по результату итерационной процедуры по сравнению с глобальным экстремумом V составил всего 0.25 %. При этом время счета (трех итераций: первая и вторая результативные и третья контрольная) составило 2 мин 4 с (нас интересует именно время работы алгоритма, времена счета матриц затрат мы отбрасываем, относя их к временным затратам на подготовку исходных данных). При этом время работы точного алгоритма (опять-таки указываем время без учета подготовки исходных данных, то есть матриц затрат) составило 7 мин 22 с. Итак, мы имеем выигрыш во времени для итерационной процедуры примерно в 3.5 раза при совсем небольшом проигрыше в результате.

При этом, как можно видеть из (4.39), мы могли вообще не знать глобального экстремума, но на каждой итерации имели верхнюю оценку проигрыша по отношению к нему:

(1) на первой итерации эта величина составила $|\mathcal{V}[\omega_0] - \mathbf{v}| = 6.17$, или 3.14 %;

(2) на второй и последующих итерациях данная оценка составила $|\mathcal{V}[\omega_1] - \mathbf{v}| = 6.1$, или 3.106 %.

Следовательно, при удовлетворительной оценке проигрыша на n-й итерации ($n \geqslant 1$) мы можем уже не делать $n+1$-ю итерацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Щеклеин С.Е., Ченцов А.Г. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.
5. Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Щеклеин С.Е., Куклин М.Ю., Ченцов А.Г., Кадников А.А. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41–48.
6. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 90–107.
9. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: РХД, 2008. 238 с.
10. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 268–287.
11. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием «незамкнутой» задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2002. № 11. С. 151–166.
12. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Редукция задач маршрутной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2000. № 10. С. 136–150.
13. Ченцов А.А. Метод итераций в задаче последовательного обхода множеств (обобщенная задача коммивояжера на узкие места) // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 209–230.
14. Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 68–77.
15. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
16. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
17. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990. 960 с.
18. Ташлыков О.Л. Организация и технология ядерной энергетики / Под ред. С.Е. Щеклеина. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2005. 149 с.

Поступила в редакцию 10.04.2013

Ченцов Алексей Александрович, к.ф.-м.н., главный программист, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov

The iterations method in generalized courier problem with singularity in the definition of cost functions

Keywords: route, iteration method, preceding conditions.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

The problem of sequential megalopolis circuit with constraints in the form of preceding conditions and (interior) works realized in the megalopolises is considered. The singularity is a dependence of costs of exterior permutations and interior works on the task list. The iteration method with elements of decompositions of the joint solution defined as a pair «route–trace» is constructed.

REFERENCES

1. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling salesman problem. Problems of theory, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 9, pp. 3–34.

2. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling salesman problem. Exact algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 10, pp. 3–29.

3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 11, pp. 3–26.

4. Tashlykov O.L., Sesekin A.N., Shcheklein S.E., Chentsov A.G. The implementation of optimal algorithms of decommissioning of nuclear power station by means of methods of mathematical modeling, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Yadern. Energ.*, 2009, no. 2, pp. 115–120.

5. Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Shcheklein S.E., Kuklin M.Yu., Chentsov A.G., Kadnikov A.A. Using of dynamic programming method for the optimization of trajectory of workers movement in radiationally dangerous zones for the purpose of minimization of radioactive irradiation, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Yadern. Energ.*, 2006, no. 2, pp. 41–48.

6. Bellman R. Application of dynamic programming method for the traveling salesman problem, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228.

7. Kheld M., Karp R.M. Application of dynamic programming method for the sorting problems, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218.

8. Little J., Murty K., Sweeney D., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Ekonom. Mat. Met.*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 90–107.

9. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008, 238 p.

10. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. The method of iterations in the problem of routing with internal losses, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 268–287.

11. Chentsov A.A., Chentsov A.G. To the question about solution of problem of sequential circuit of sets by means of «unclosed» traveling salesman problem, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2002, no. 11, pp. 151–166.

12. Chentsov A.A., Chentsov A.G. Reduction of route optimization problems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2000, no. 10, pp. 136–150.

13. Chentsov A.A. The method of iterations in the problem of sequential circuite of sets (generalized bottleneck traveling salesman problem), *Algoritmy i programmnye sredstva parallel'nykh vychislenii: sb. nauchn. tr.* (Algorithms and software for parallel computations: Transactions), Ekaterinburg: Ural Branch of RAS, 2002, issue 6, pp. 209–230.

14. Sesekin A.N., Chentsov A.A., Chentsov A.G. Generalized courier problem with cost function that depends on the job list, *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2010, no. 2, pp. 68–77.

15. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 3

16. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.

17. Kormen T., Leizerson Ch., Rivest R. *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1990, 960 p.

18. Tashlykov O.L. *Organizatsiya i tekhnologiya yadernoi energetiki* (Organization and technology of nuclear energetics), Ekaterinburg: USTU–UPI, 2005, 149 p.

Received 10.04.2013

Chentsov Aleksei Aleksandrovich, Main Programmer, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru