МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 3

УДК 517.952, 517.977

© *Д. А. Серков*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ КОМПАКТНЫХ В L_{p} ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХУ [1]

Рассматривается задача оптимизации гарантированного результата для управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и функционала качества, непрерывно зависящего от траектории системы. Значения управления и помехи ограничены в каждый момент компактными множествами. Предполагается также, что помеха стеснена некоторым неизвестным функциональным ограничением из заданного семейства ограничений.

Показано, что в данной задаче оптимальный гарантированный результат совпадает со значением нижней (максиминной) игры. Для получения эффективно реализуемых алгоритмов управления указываются дополнительные условия на правую часть рассматриваемой управляемой системы и подходящие способы построения оптимальной стратегии.

Ключевые слова: гарантированное управление, стратегии с полной памятью, нижняя игра.

Введение

Работа примыкает к исследованиям по теории гарантирующего позиционного управления, проводимым школой Н. Н. Красовского (см. [1–3] и библ. в этих работах), и посвящена задаче управления с «нейтральной» помехой, то есть с помехой не связанной в своих проявлениях с действиями управляющей стороны и состоянием управляемой системы. В постановке задачи это свойство помехи выражается теми или иными дополнительными функциональными ограничениями.

Управляемая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Управляющие воздействия и помехи в каждый момент времени лежат в известных компактных множествах. Реализации помехи, кроме того, стеснены некоторым неизвестным функциональным ограничением из заданного семейства функциональных ограничений. Реализации управления формируются позиционными стратегиями с полной памятью. Показатель качества, определенный на движениях управляемой системы, предполагается непрерывным на соответствующем пространстве непрерывных функций.

В работе А. В. Кряжимского [4] для одного класса систем, в предположении, что помехи содержатся в некотором заранее не определенном множестве, компактном в L_{p}, было установлено равенство оптимальных гарантированных результатов, достигаемых в классах позиционных стратегий с полной памятью и квазистратегий — неупреждающих программных откликов на реализации помех (см. [3, с. 24]). Для обозначения этого свойства позиционных стратегий с полной памятью в [4] был введен термин «неулучшаемость». В работе [9] было продолжено изучение задачи в постановке [4] и получены новые условия неулучшаемости.

Приводимые в данной работе результаты усиливают утверждения из [9], существенно расширяя класс управляемых систем, в которых имеет место неулучшаемость стратегий с полной памятью. Вместе с тем предлагаемая конструкция оптимальной стратегии в общем случае трудна для численной реализации. Для получения эффективных алгоритмов управления указываются дополнительные условия на правую часть рассматриваемой управляемой системы и другие способы построения оптимальной стратегии.

[1] Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12–П–1–1002), а также при поддержке гранта РФФИ (проект 12–01–00290).

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему, заданную обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T := [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

и начальным условием $x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n$, где «:=» означает «равно по определению». Реализации управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$ предполагаются измеримыми по Лебегу функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям

$$u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q, \quad \tau \in T.$$

Множества G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ предполагаются компактными в соответствующих евклидовых пространствах. Через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначим множества всех таких реализаций управления и помехи соответственно. В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что она

— определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;

— локально липшицева по второй переменной:

$$\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leqslant L_f(S)\|x_1 - x_2\|, \quad (\tau, x_1), (\tau, x_2) \in S, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q},$$

где S — любое ограниченное подмножество из $\mathbb{R}^{n+1}$;

— удовлетворяет условию подлинейного роста:

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant K(1 + \|x\|), \quad (\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}, \quad K \geqslant 0.$$

При этих условиях решение в смысле Каратеодори задачи Коши (1.1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ для любых реализаций управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ [7, гл. 2]. Для всех $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (1.1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$.

Выделим компактное в $\mathbb{R}^{n+1}$ подмножество G состояний системы (1.1), содержащее все движения, начинающиеся из G_0:

$$G := \mathbf{cl}_{T\times\mathbb{R}^n} \Big\{ (\tau, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid x = x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V} \Big\},$$

здесь и далее $\mathbf{cl}_X\, Z$ обозначает замыкание множества $Z \subseteq X$ в топологии пространства X.

Для произвольных $(t_*, z_*) \in G$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим

$$X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot)) := \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)} \big\{ x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \mid u(\cdot) \in \mathcal{U} \big\},$$

$$X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) := X(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)), \quad X(G_0) := \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)} \bigcup_{\substack{z_0 \in G_0 \\ v(\cdot) \in \mathcal{V}}} X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)),$$

где $C([t_*, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных функций из $[t_*, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой равномерной сходимости.

Множество $\Delta := (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_{i-1} < \tau_i$, $\tau_{n_\Delta} = \vartheta$, назовем разбиением интервала T. Множество всех таких разбиений обзначим Δ_T. Для любых $\Delta \in \Delta_T$ и $t \in T$ определим

$$i_t := \max_{\substack{i\in 0..n_\Delta \\ \tau_i \leqslant t}} i, \quad \mathrm{d}(\Delta) := \min_{i\in 1..(n_\Delta - 1)} (\tau_i - \tau_{i-1}), \quad \mathrm{D}(\Delta) := \max_{i\in 1..n_\Delta} (\tau_i - \tau_{i-1});$$

таким образом, для всех $t \in T$ выполняется включение $t \in [\tau_{i_t}, \tau_{i_t+1})$. Всякое разбиение $\Delta := (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ можно «проредить» до некоторого разбиения $\Delta' \in \Delta_T$ так, что полученное разбиение будет удовлетворять условиям $\Delta' \subseteq \Delta$, $\mathrm{D}(\Delta') / \mathrm{d}(\Delta') \leqslant 3$ и $\mathrm{D}(\Delta') \leqslant 3\,\mathrm{D}(\Delta)$. Процедура перехода от Δ к Δ' с указанными свойствами может быть определена, например, следующим образом:

$$\Delta' := \big\{ \tau'_{n_{\Delta'}} := \vartheta, \tau'_i := \mathrm{argmin}\{\tau \in \Delta \mid \tau \geqslant i 2\,\mathrm{D}(\Delta)\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant i \leqslant (\vartheta - t_0)/(2\,\mathrm{D}(\Delta)) \big\}.$$

Следуя [4], назовем *обратной связью с полной памятью* на разбиении $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ и обозначим $\mathbf{U}^\Delta := (\mathbf{U}_i^\Delta)_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ всякое конечное семейство операторов вида $\mathbf{U}_i^\Delta : C([t_0,\tau_i],\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{U}|_{[\tau_i,\tau_{i+1})}$, $i \in 0..(n_\Delta - 1)$; символами $\mathcal{U}|_{[\tau_i,\tau_{i+1})}$ обозначено множество сужений элементов из $\mathcal{U}$ на интервал $[\tau_i,\tau_{i+1})$. Назовем *стратегией с полной памятью* и обозначим $\mathbb{U}$ семейство $(\mathbf{U}^\Delta)_{\Delta\in\Delta_T}$ обратных связей с полной памятью, заданных на всех разбиениях $\Delta \in \Delta_T$. Множество всех стратегий (управления) с полной памятью обозначим $\mathbf{S}$.

Определим *пошаговое движение* $x(\cdot) := x(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)) \in X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot))$ и *реализацию управления* $u(\cdot) := u(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)) \in \mathcal{U}$, порожденные из начального состояния $z_0 \in G_0$ обратной связью $\mathbf{U}^\Delta = (\mathbf{U}_i^\Delta(\cdot))_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ при помехе $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ следующими условиями:

$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), \quad u(t) = \mathbf{U}_{i_t}^\Delta(x(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i_t}]}), \qquad t \in [t_0, \vartheta).$$

Пусть имеются $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{V}$. Определим пучок движений $X(z_0,\mathbb{U},\mathbf{V})$ как множество всех элементов $x(\cdot) \in C(T;\mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности

$$(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k})_{k\in\mathbb{N}}, \quad (z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k}) \in G_0 \times \mathbf{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U},\ k \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{k\to\infty} z_{0k} = z_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{D}\,(\Delta_k) = 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \|x(\cdot) - x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}^{\Delta_k}, v_k(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Будем рассматривать три вида функциональных ограничений на помеху. Первый — отсутствие каких-либо ограничений. Второй вид ограничений подразумевает принадлежность помехи некоторому L_{p}-компактному подмножеству $\mathcal{V}$ ($\mathrm{p} > 1$). Последний вид допускает только программные помехи, то есть каждый элемент из $\mathcal{V}$ может рассматриваться как ограничение на помеху.

Для каждого $z_0 \in G_0$ и каждой стратегии управления $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$, следуя указанным видам ограничений на помеху, определим пучки движений системы из начального состояния z_0, порожденые стратегией $\mathbb{U}$ при *произвольных помехах*, L_{p}*-компактных ограничениях на помеху* и при *программных помехах*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(z_0,\mathbb{U}) &:= X(z_0,\mathbb{U},\mathcal{V}),\\
\mathcal{X}_{\mathrm{c}}(z_0,\mathbb{U}) &:= \bigcup_{\mathbf{V}\in \mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}}(\mathcal{V})} X(z_0,\mathbb{U},\mathbf{V}),\\
\mathcal{X}_{\mathrm{p}}(z_0,\mathbb{U}) &:= \bigcup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\});
\end{aligned}$$

здесь $\mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}}(\mathcal{V})$ обозначает семейство всех $L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)$-компактных подмножеств $\mathcal{V}$.

Замечание 1. Пучок $\mathcal{X}(z_0,\mathbb{U})$ отвечает определению множества конструктивных движений, порожденных позиционной стратегией управления (см. [1]). Определение пучка $\mathcal{X}_{\mathrm{c}}(z_0,\mathbb{U})$ следует [4].

В соответствии с определениями выполняются включения $\mathcal{X}_{\mathrm{p}}(z_0,\mathbb{U}) \subseteq \mathcal{X}_{\mathrm{c}}(z_0,\mathbb{U}) \subseteq \mathcal{X}(z_0,\mathbb{U})$ для всех $z_0 \in G_0$ и $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$. В [8] показано, что в общем случае $\mathcal{X}_{\mathrm{p}}(z_0,\mathbb{U}) \neq \mathcal{X}(z_0,\mathbb{U})$. Похожими рассуждениями можно показать, что в общем случае выполняется $\mathcal{X}_{\mathrm{c}}(z_0,\mathbb{U}) \neq \mathcal{X}(z_0,\mathbb{U})$.

Качество движения будем оценивать функционалом $\gamma(\cdot) : C(T;\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$, непрерывным в равномерной норме пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$.

Гарантированным результатом $\Gamma(z_0,\mathbb{U})$ для стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ в начальном состоянии $z_0 \in G_0$ при произвольных помехах назовем величину (см. [1,3])

$$\Gamma(z_0,\mathbb{U}) := \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}(z_0,\mathbb{U})} \gamma(x(\cdot)).$$

Оптимальным гарантированным результатом $\Gamma(z_0)$ в классе $\mathbf{S}$ для начального состояния $z_0 \in G_0$ при произвольных помехах назовем величину

$$\Gamma(z_0) := \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \Gamma(z_0, \mathbb{U}).$$

Определим величину $\Gamma_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U})$ гарантированного результата стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ для начального состояния z_0 *при* L_{p}*-компактных ограничениях на помеху*,

$$\Gamma_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{\mathrm{C}}(z_0,\mathbb{U})} \gamma(x(\cdot)),$$

и величину $\Gamma_{\mathrm{C}}(z_0)$ оптимального гарантированного результата в классе $\mathbf{S}$ для начального состояния $z_0 \in G_0$ *при* L_{p}*-компактных ограничениях на помеху*,

$$\Gamma_{\mathrm{C}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \Gamma_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}).$$

Определим величину $\Gamma_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U})$ гарантированного результата стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ в начальном состоянии $z_0 \in G_0$ *при программных ограничениях на помеху*,

$$\Gamma_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{\mathrm{P}}(z_0,\mathbb{U})} \gamma(x(\cdot)),$$

и величину $\Gamma_{\mathrm{P}}(z_0)$ оптимального гарантированного результата в классе $\mathbf{S}$ для начального состояния $z_0 \in G_0$ *при программных ограничениях на помеху*,

$$\Gamma_{\mathrm{P}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \Gamma_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}).$$

Наряду со стратегиями из класса $\mathbf{S}$ введем в рассмотрение квазистратегии: следуя [3, с. 24], назовем *квазистратегией* всякое отображение $\alpha(\cdot) : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$ такое, что для любых $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ таких, что $v(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = v'(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$, выполняется $\alpha(v(\cdot))|_{[t_0,\tau]} = \alpha(v'(\cdot))|_{[t_0,\tau]}$. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и квазистратегии $\alpha(\cdot)$ элементы множества

$$\mathcal{X}(z_0, \alpha(\cdot)) := \{x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)) \mid v(\cdot) \in \mathcal{V}\}$$

представляют собой *движения* из $z_0 \in G_0$, порожденные квазистратегией $\alpha(\cdot)$. Пусть $\mathbf{Q}$ — множество всех квазистратегий. Для начального состояния $z_0 \in G_0$ величины

$$\Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)) := \sup_{x(\cdot)\in\mathcal{X}(z_0,\alpha(\cdot))} \gamma(x(\cdot)), \quad \Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0) := \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{Q}} \Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot))$$

суть *гарантированный результат квазистратегии* $\alpha(\cdot)$ и *оптимальный гарантированный результат в классе квазистратегий* при отсутствии функциональных ограничений на помехи.

Замечание 2. Подобно тому, как это сделано выше, можно также определить оптимальный гарантированный результат в классе квазистратегий при L_{p}-компактных или программных ограничениях на помехи; однако эти определения приведут к одинаковым величинам: квазистратегии с точки зрения оптимального гарантированного результата нечувствительны к функциональным ограничениям на помехи.

Следующая теорема следует непосредственно из определений.

Теорема 1. *Для каждого* $z_0 \in G_0$ *справедливы соотношения*

$$\Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0) \leqslant \Gamma_{\mathrm{P}}(z_0) \leqslant \Gamma_{\mathrm{C}}(z_0) \leqslant \Gamma(z_0). \tag{1.2}$$

Замечание 3. Как следует из результатов [1–3], все неравенства цепочки (1.2) при всяком $z_0 \in G_0$ обращаются в равенства, если выполнено условие седловой точки:

$$\min_{u\in\mathcal{P}}\max_{v\in\mathcal{Q}}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle = \max_{v\in\mathcal{Q}}\min_{u\in\mathcal{P}}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle$$

при всех $t \in T$, $l, x \in \mathbb{R}^n$; здесь и далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что последнее условие, вообще говоря, не выполнено. В этой ситуации отдельные неравенства цепочки (1.2) могут быть строгими. Примеры ситуаций, когда различаются первый и последний элементы цепочки (1.2), хорошо известны в теории гарантирующего управления (см. [3, гл.VI, § 1]). Для функционала платы γ, равномерно (L^1,δ)-непрерывного на множестве всех движений системы (1.1), пример ситуации, когда последнее неравенство цепочки (1.2) строгое, приведен в [4]. Для непрерывного функционала пример аналогичного неравенства приводится в [9].

В силу неравенств (1.2) особый интерес представляют те функциональные ограничения на помехи и те условия, при которых соответствующий оптимальный гарантированный результат в классе стратегий с полной памятью совпадает с оптимальным гарантированным результатом в классе квазистратегий. В этом случае класс **S** является неулучшаемым в том смысле, что использование при выработке значений допустимого управления любой информации о прошлых и текущих значениях реализуемой допустимой помехи не является для управляющей стороны существенной — не позволяет ей улучшить значение гарантированного результата.

Согласно [4], достаточным условием для неулучшаемости класса стратегий с полной памятью при L_2-компактных ограничениях на помехи является взаимная однозначность отображения $v \mapsto f(t,x,u,v)$ при всех $(t,x,u) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}$. В работе [9] результаты [4] в части неулучшаемости класса **S** усиливаются для функционалов качества непрерывных в $C(T;\mathbb{R}^n)$. Но и в работе [9] условия неулучшаемости были достаточно обременительны. Так, для систем вида

$$\dot{x}(t) = g_1(t,x(t),u(t)) + g_2(t,x(t),u(t))\cdot h(t,x(t),v(t)), \tag{1.3}$$

где $g_2(\cdot)$ — матрица-функция размерности $n\times m$, $g_1(\cdot)$ — вектор-функция (столбец) размерности n, $h(\cdot)$ — вектор-функция размерности m, эти условия сводились к требованию независимости ядра отображения $g_2(t,x,u) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ от управляющего параметра $u \in \mathcal{P}$ при всех $(t,x) \in G$.

Цель настоящей работы — привести более общее достаточное условие неулучшаемости стратегий с полной памятью и указать случаи, допускающие эффективную численную реализацию соответствующей оптимальной стратегии.

§ 2. Неулучшаемость класса S

Далее определяется семейство $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ($\mathbb{U}_\varepsilon \in \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$) стратегий, которые обеспечивают неравенства $\Gamma_{\mathrm{C}}(z_0,\mathbb{U}_\varepsilon) \leqslant \Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0) + \varphi(\varepsilon)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot) : (0,1) \mapsto (0,1)$ такой, что $(\varphi(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0)$. Эти соотношения влекут равенство оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий и оптимального гарантированного результата в классе стратегий с полной памятью при программных и при L_{p}-компактных ограничениях на помеху.

Стратегии $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ при формировании управления симулируют движение вспомогательной управляемой системы — y-модели. Для выбора помехи, действующей в y-модели, на малом завершающем участке предыдущего интервала разбиения в управлении исходной системы (1.1) используется специально выбранная серия тестовых управляющих воздействий. По наблюдениям за соответствующими реакциями управляемой системы решается обратная задача динамики [5, 6] — строится аппроксимация помехи, реально действующей в управляемой системе (1.1). Эта аппроксимация принимается в качестве помехи в y-модели. Управление в y-модели определяется как контруправление (см. [1]), экстремальное к некоторому множеству оптимальных траекторий системы, порожденному квазистратегиями. Выбранное таким образом управление используется и в «реальной» управляемой системе (1.1) на всем интервале разбиения, за исключением завершающего «тестового» участка. При подходящим образом согласованном уменьшении шага разбиения и меры «тестовых» участков движения y-модели будут сходиться в $C(T;\mathbb{R}^n)$ к оптимальным движениям, а движения исходной системы — к соответствующим движениям y-модели. Такая сходимость обеспечивает близкие к оптимальным значения показателя качества на движениях управляемой системы и, как следствие, искомые свойства семейства стратегий $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Дадим формальные определения. В построении используются «целевые» множества $\mathcal{W}(z)\subseteq C(T;\mathbb{R}^n)$, полученные из траекторий, порождаемых «почти оптимальными» квазистратегиями:

$$\mathcal{W}(z):=\bigcap_{\delta>0}\mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\Big\{\bigcup_{\substack{\Gamma_{\mathbb{Q}}(z,\alpha(\cdot))\\ \leqslant\Gamma_{\mathbb{Q}}(z)+\delta}}\mathcal{X}(z,\alpha(\cdot))\Big\},\quad z\in G_0, \tag{2.1}$$

и проекция $w(\cdot|\tau,y(\cdot))\in\mathcal{W}(y(t_0))|_{[t_0,\tau]}$ некоторого элемента $y(\cdot)\in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ на сужение этого множества на отрезок $[t_0,\tau]$:

$$w(\cdot|\tau,y(\cdot))\in\underset{w(\cdot)\in\mathcal{W}(y(t_0))|_{[t_0,\tau]}}{\operatorname{argmin}}\|w(\cdot)-y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}. \tag{2.2}$$

Выберем и зафиксируем некоторое значение параметра «точности» ε из интервала $(0,1)$.

Обозначим $(u^\varepsilon_j)_{j\in1..n_\varepsilon}$ некоторую ε-сеть в компакте $\mathcal{P}$ — произвольное конечное подмножество из $\mathcal{P}$ такое, что $\sup_{u\in\mathcal{P}}\min_{j\in1..n_\varepsilon}\|u-u^\varepsilon_j\|\leqslant\varepsilon$.

Пусть $\Delta:=(\tau_i)_{i\in0..n_\Delta}$ — разбиение интервала T. Без ограничения общности считаем, что для разбиения Δ выполняется неравенство $\mathrm{D}(\Delta)\,/\,\mathrm{d}(\Delta)\leqslant3$ (при необходимости «прорежаем» разбиение Δ указанным способом). Обозначим

$$\tau'_i:=\tau_i-\varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta),\qquad i\in1..(n_\Delta-1), \tag{2.3}$$

зададим дополнительные моменты разбиения интервала T:

$$\tau'_{ij}:=\tau'_i+\frac{j(\tau_i-\tau'_i)}{n_\varepsilon},\quad j\in0..n_\varepsilon,\quad i\in1..(n_\Delta-1) \tag{2.4}$$

(благодаря (2.3) $\tau'_{ij}\in(\tau_{i-1},\tau_i]$), и для произвольного $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$ зададим величины

$$d_{ij}(x(\cdot)):=\frac{x(\tau'_{ij})-x(\tau'_{i(j-1)})}{\tau'_{ij}-\tau'_{i(j-1)}},\quad j\in1..n_\varepsilon,\quad i\in1..(n_\Delta-1).$$

Зафиксируем некоторые $u_*\in\mathcal{P}$, $v_*\in\mathcal{Q}$ и определим обратную связь с полной памятью $\mathbf{U}^\Delta_\varepsilon=(\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon i}(\cdot))_{i\in0..(n_\Delta-1)}$ на разбиении Δ индуктивно.

База индукции: для всех $x_0(\cdot)\in C([t_0,\tau_0],\mathbb{R}^n)$ положим

$$y_0(\tau_0)=x_0(\tau_0),\quad \bar v_0:=v_*,\quad u_0:=u_*, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon0}(x_0(\cdot))(t):=\begin{cases}u_0, & t\in[\tau_0,\tau'_1),\\ u^\varepsilon_j, & t\in[\tau'_{1(j-1)},\tau'_{1j}),\quad j\in1..n_\varepsilon.\end{cases} \tag{2.6}$$

Шаг индукции: если при некотором $i\in1..(n_\Delta-1)$ для всех $x_{i-1}(\cdot)\in C([t_0,\tau_{i-1}],\mathbb{R}^n)$ определены значения $\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon(i-1)}(x_{i-1}(\cdot))$ и элементы $y_{i-1}(\tau_k)\in\mathbb{R}^n$, $u_{i-1}\in\mathcal{P}$, $\bar v_{i-1}\in\mathcal{Q}$, то для любых $x_i(\cdot)\in C([t_0,\tau_i],\mathbb{R}^n)$ положим

$$y_i(\tau)=y_{i-1}(\tau_{i-1})+\int_{\tau_{i-1}}^{\tau}f(t,y_i(t),u_{i-1},\bar v_{i-1})dt,\quad \tau\in[\tau_{i-1},\tau_i], \tag{2.7}$$

$$\bar v_i\in\underset{v\in\mathcal{Q}}{\operatorname{argmin}}\max_{j\in1..n_\varepsilon}\|d_{ij}(x_i(\cdot))-f(\tau_i,x_i(\tau_i),u^\varepsilon_j,v)\|, \tag{2.8}$$

$$u_i\in\underset{u\in\mathcal{P}}{\operatorname{argmin}}\langle y_i(\tau_i)-w(\tau_i\mid\tau_i,y_i(\cdot)),f(\tau_i,y_i(\tau_i),u,\bar v_i)\rangle, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon i}(x_i(\cdot))(t):=\begin{cases}u_i, & t\in[\tau_i,\tau'_{i+1}),\\ u^\varepsilon_j, & t\in[\tau'_{(i+1)(j-1)},\tau'_{(i+1)j}),\quad j\in1..n_\varepsilon.\end{cases} \tag{2.10}$$

Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}^{\Delta}_{\varepsilon}$ на разбиении $\Delta \in \Delta_T$ определена. Тем самым определена и стратегия $\mathbb{U}_{\varepsilon} := (\mathbf{U}^{\Delta}_{\varepsilon})_{\Delta\in\Delta_T}$. В присвоениях (2.10) первая строчка определяет действия управляющей стороны по минимизации гарантированного результата, вторая — по идентификации помехи.

Теорема 2. *Для любого* $z_0 \in G_0$ *справедливы равенства*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \Gamma_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_{\varepsilon}) \leqslant \Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0),$$

$$\Gamma_{\mathrm{P}}(z_0) = \Gamma_{\mathrm{C}}(z_0) = \Gamma_{\mathrm{Q}}(z_0).$$

Доказательство теоремы 2 в основных моментах следует п. 3 работы[2].

§ 3. Оптимальная стратегия с полной памятью

В конструкции стратегии $\mathbb{U}_{\varepsilon}$ имеются по крайней мере два места, которые могут представлять существенные трудности при попытке численной реализации указанной процедуры управления. Первое связано с вычислением проеций движений y-модели на «целевые» множества (см. (2.1), (2.2)). На идейном уровне эта задача сводится к задаче вычисления градиента цены «нижней» (максиминной) игры в текущем фазовом состоянии управляемой системы. Несмотря на трудность данной задачи, она давно известна, всесторонне изучена и во многих важных случаях имеет эффективные методы решения.

Второй трудностью при реализации стратегии $\mathbb{U}_{\varepsilon}$ является неограниченный и достаточно быстрый рост множества $(u^{\varepsilon}_j)_{j\in 1..n_{\varepsilon}}$ при уменьшении параметра ε. Это ведет к значительному росту размерности задачи минимизации при решении задачи обратной динамики (2.8). Эту трудность можно избежать в отдельных классах управляемых систем, рассмотренных ниже.

1. Пусть управляемая система (1.1) имеет вид (1.3) или вид

$$\dot{x}(t) = g_1(t, x(t), u(t)) + h(t, x(t), v(t)) \cdot g_2(t, x(t), u(t)), \tag{3.1}$$

где также $g_1(\cdot)$ — вектор-функция (столбец) размерности n, $g_2(\cdot)$ — вектор-функция размерности m и $h(\cdot)$ — матрица-функция размерности $n \times m$.

Выберем и зафиксируем некоторое конечное подмножество $\{\bar{u}_j \in \mathcal{P} \mid j \in 1..l\}$ и $\bar{K} \in \mathbb{R}$.

Условие 1. Для любых $(\tau, x, u) \in G \times \mathcal{P}$ найдутся $(\beta_j)_{j\in 1..l} \in \mathbb{R}^l$, $\sum_{j\in 1..l} |\beta_j| \leqslant \bar{K}$, удовлетворяющие равенствам

$$g_2(\tau, x, u) = \sum_{j\in 1..l} \beta_j g_2(\tau, x, \bar{u}_j). \tag{3.2}$$

Равенства (3.2) понимаются как равенства векторов в случае системы вида (3.1) и как равенства матриц в случае системы вида (1.3).

Из условия следует, что при любом $v \in \mathcal{Q}$ реакцию системы на управляющее воздействие $u \in \mathcal{P}$ можно вычислить, зная реакцию системы при этом v на конечный набор тестовых управляющих воздействий $\{\bar{u}_j \in \mathcal{P} \mid j \in 1..l\}$. И значит, для выбора аппроксимирующего значения $\bar{v}$ (см. (2.8)) достаточно этого фиксированного набора.

Определим стратегии $\bar{\mathbb{U}}_{\varepsilon} \in \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$, $\bar{\mathbb{U}}_{\varepsilon} = (\bar{\mathbf{U}}^{\Delta}_{\varepsilon})_{\Delta\in\Delta_T}$, где обратная связь с полной памятью $\bar{\mathbf{U}}^{\Delta}_{\varepsilon}$ на разбиении Δ задана соотношениями (2.3)–(2.10), в которых, $n_{\varepsilon} := l$ и $u^{\varepsilon}_j := \bar{u}_j$, $j \in 1..n_{\varepsilon}$.

Утверждение 1. *Пусть управляемая система* (1.1) *имеет вид* (1.3) *или вид* (3.1). *Тогда при выполнении условия* 1 *для всех* $z_0 \in G_0$ *верны равенства*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \Gamma_{\mathrm{C}}(z_0, \bar{\mathbb{U}}_{\varepsilon}) = \Gamma_{\mathrm{C}}(z_0).$$

Замечание 4. Из построения видно, что теперь, в случае выполнения условий из утверждения 1, в задаче обратной динамики (2.8) фиксирован размер данных.

[2] Серков Д.А. О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задаче минимизации риска // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. (В печати).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute, T.M. Rassias Ed., World Scientific. 1991.
5. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
6. Osipov Yu.S., Krayzhimskii A.V. Inverse problem of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
7. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
8. Серков Д.А. Об одном свойстве конструктивных движений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 98–103.
9. Серков Д.А. Оптимизация гарантированного результата при функциональных ограничениях на динамическую помеху // Доклады Академии наук. 2013. Т. 450. № 3. С. 274–278.

Поступила в редакцию 30.08.2013

Серков Дмитрий Александрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; доцент, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

D. A. Serkov

Optimal control under L_{p}-compact constraints on the disturbance

Keywords: optimal guarantee, strategy with full memory, lower game.

Mathematical Subject Classifications: 93C15, 49N30, 49N35

The problem of the optimization of a guaranteed result for the control system, described by an ordinary differential equation, and a continuous payoff functional, is considered. At every moment the values of the control and of the disturbance are in the given compact sets. The disturbances as functions of time are subject to functional constraints belonging to a given family of constraints. The actions of control are formed by the strategies with full memory.

It is demonstrated, that optimal guaranteed result in this problem is equal to the value of the lower game. For the effectiveness of implemented control algorithm additional conditions on the system and appropriate ways of constructing an optimal strategy are specified.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer–Verlag, 1988, 517 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamic system), Moscow: Nauka, 1995.
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
4. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies, *Constantin Caratheodory: An International Tribute*, T.M. Rassias Ed., World Scientific, 1991.
5. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. On the control modeling in dynamic system, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekhn. Kibernet.*, 1983, no. 2, pp. 51–60.

6. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problem of ordinary differential equations: dynamical solutions*, London: Gordon and Breach, 1995.

7. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.

8. Serkov D.A. On a property of constructive motions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2009, no. 3, pp. 98–103.

9. Serkov D.A. Optimization of guaranteed results under functional restrictions on the dynamic disturbance, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, issue 3, pp. 310–313.

Received 30.08.2013

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics named after N.N.Krasovskii, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Associate Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru