УДК 517.922, 517.977.1, 517.988.6

© *Е. А. Плужникова*

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЯВНОГО ВИДА [1]

Сформулированы теоремы о существовании решений, оценках решений и корректной разрешимости уравнений с накрывающими отображениями в произведении метрических пространств. Рассмотрены условия накрывания оператора Немыцкого в функциональных пространствах. Утверждения о накрывающих отображениях применяются к исследованию управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, не разрешенными относительно производной искомой функции. Получены условия существования решений и их оценки, а также исследован вопрос непрерывной зависимости решений от параметров управляемых систем дифференциальных уравнений со смешанными ограничениями на управление и дополнительным ограничением на производную решения.

Ключевые слова: накрывающие отображения, метрические пространства, дифференциальные уравнения неявного вида, корректная разрешимость, управляемые системы.

Введение

Утверждения о корректности управляемых систем имеют важное теоретическое значение и многочисленные приложения (в задачах оптимального управления, в математическом моделировании, в численных методах). В литературе подробно исследованы условия корректности управления динамическими объектами, описываемыми нормальными (разрешенными относительно производной) дифференциальными уравнениями, и многие модели реальных процессов представляют собой именно такие уравнения. Эти условия непосредственно следуют из классических теорем о непрерывной зависимости от параметров решений нормальных дифференциальных уравнений (которые приведены, например, в [1, глава V]). Корректность задач оптимизации с ограничениями, содержащими нормальные дифференциальные уравнения, также подробно исследованы (см., например, [2]). Однако есть процессы и явления, при описании которых необходимо учитывать зависимость параметров модели от скорости изменения состояния объектов. В этом случае модель представляет собой нелинейные дифференциальные уравнения неявного вида (не разрешенные относительно производной искомой функции). Примерами таких задач являются модели движения тел в гравитационных полях со скоростями, близкими к скорости света [3], модели электрического колебательного контура [4, с. 145, 148]. Однако до недавнего времени практически не проводились исследования управляемых систем, описываемых неявными дифференциальными уравнениями.

Новые возможности изучения таких систем предоставила интенсивно развивающаяся сейчас теория накрывающих отображений метрических пространств. В последние годы на основании утверждений о липшицевых возмущениях накрывающих отображений получены условия существования, продолжаемости решений, корректности дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной [5, 6], начато изучение задач управления для такого уравнения [7–9]. Так как всякая задача управления сводится к системе уравнений и включений (содержащей, кроме дифференциальных уравнений, еще начальные и краевые условия, ограничения на управления и пр.), то разрабатываемые схемы и методы исследования потребовали распространения теорем о липшицевых возмущениях на векторные накрывающие отображения. В [10, 11] такие утверждения были получены. На основании этих утверждений в предлагаемой работе исследуются разрешимость и корректность управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями неявного вида.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11–01–00626), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.132.21.1348).

§ 1. Основные определения

Пусть задано отображение $\Psi : X \to Y$, где (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in X$.

Определение 1 (см. [12, определение 1]). Если существует такое $\alpha > 0$, что для каждого $r > 0$ и любого $u \in X$ имеет место включение $\Psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r)$, то отображение $\Psi : X \to Y$ называется *накрывающим*, или *α-накрывающим*.

Отметим, что отображение $\Psi : X \to Y$ является *α-накрывающим* тогда и только тогда, когда для любых $u \in X$, $y \in Y$ существует точка x пространства X, удовлетворяющая уравнению $\Psi(x) = y$ и неравенству

$$\rho_X(x, u) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(y, \Psi(u)). \tag{1.1}$$

Это свойство называют *α-метрической регулярностью* (см. [13, Definition 2.1]).

В исследовании некоторых рассматриваемых ниже задач требование накрывания оказывается избыточным и может быть ослаблено: достаточно предполагать выполнение неравенства (1.1) не при всех $y \in Y$, а только для $y \in \Psi(X)$. Приведем точную формулировку такого свойства отображений.

Определение 2 (см. [5, с. 615]). Если существует такое $\alpha > 0$, что для каждого $r > 0$ и любого $u \in X$ имеет место включение $\Psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r) \cap \Psi(X)$, то отображение $\Psi : X \to Y$ называют *условно накрывающим*, или *условно α-накрывающим*.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ вещественных n-мерных векторов будем считать заданной норму $|\cdot|$, обладающую свойством монотонности: для векторов $x, u \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых удовлетворяют неравенствам $x_i \geqslant u_i \geqslant 0$, выполнено $|x| \geqslant |u|$ (например, евклидова норма $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2\Big)^{1/2}$ является монотонной).

§ 2. Разрешимость и оценка решений систем операторных уравнений

Приведем результаты о векторных накрывающих отображениях, полученные в [11]. Пусть заданы метрические пространства (X_j, ρ_{X_j}), (Y_j, ρ_{Y_j}), точки $y_j \in Y_j$, $j = \overline{1,n}$, и определены отображения $\Phi_i : X_i \times \prod_{j=1}^{n} X_j \to Y_i$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1, \\ \Phi_2(x_2, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_2, \\ \qquad \vdots \\ \Phi_n(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_n \end{cases} \tag{2.1}$$

относительно неизвестного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} X_j$.

Определим метрическое пространство $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ с расстоянием

$$\rho_X(x, u) = \Big| \big(\rho_{X_1}(x_1, u_1), \rho_{X_2}(x_2, u_2), \ldots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)\big) \Big| \tag{2.2}$$

для произвольных $x = (x_j)_{j=\overline{1,n}} \in X$ и $u = (u_j)_{j=\overline{1,n}} \in X$ (где норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством монотонности). Аналогичную метрику введем в $Y = \prod_{j=1}^{n} Y_j$. Зададим отображение $\Upsilon : X \times X \to Y$, $\Upsilon(u, x) = \big(\Phi_i(u_i, x)\big)_{i=\overline{1,n}}$. Тогда систему (2.1) можно записать в виде уравнения

$$\Upsilon(x, x) = y.$$

Пусть заданы числа $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $i, j = \overline{1,n}$. Определим матрицы

$$A = \mathrm{diag}(\alpha_i)_{n\times n}, \quad B = (\beta_{ij})_{n\times n}, \quad C = A^{-1}B = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}. \tag{2.3}$$

Обозначим $\varrho(C)$ — спектральный радиус матрицы C.

Теорема 1 (см. [11, теорема 1]). *Пусть метрические пространства $X_1,\ldots,X_n$ являются полными и выполнены следующие условия:*

для каждого $x\in X$ отображения $\Phi_i(\cdot,x):X_i\to Y_i$ условно α_i-накрывающие и имеют место включения

$$y_i\in\Phi_i(X_i,x),\quad i=1,\ldots,n;$$

при всех $i,j=\overline{1,n}$ и любых $u_i\in X_i$, $x_1\in X_1$, $\ldots$, $x_{j-1}\in X_{j-1}$, $x_{j+1}\in X_{j+1}$, $\ldots$, $x_n\in X_n$ отображения $\Phi_i(u_i,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n)$ β_{ij}-липшицевы;

для любой последовательности $\{u^k\}\subset X$ из сходимости $u^k\to u$, $\Upsilon(u^k,u)\to y$ следует равенство $\Upsilon(u,u)=y$.

Тогда если $\varrho(C)<1$, то система уравнений (2.1) *имеет решение и, кроме того, для любого $\varepsilon\in(0,1-\varrho(C))$ можно так определить монотонную норму $|\cdot|$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, что, при задании метрики в X равенством* (2.2), *для произвольного $u^0=(u^0_1,u^0_2,\ldots,u^0_n)\in X$ найдется решение $x=\xi\in X$ системы* (2.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\rho_X(\xi,u^0)\leqslant\Big(\frac{1}{1-\varrho(C)-\varepsilon}\Big)\cdot\bigg|\Big(\frac{\rho_{Y_j}(y_j,\Phi_j(u^0_j,u^0))}{\alpha_j}\Big)_{j=\overline{1,n}}\bigg|. \tag{2.4}$$

Норма $|\cdot|$ пространства $\mathbb{R}^n$, существование которой утверждается в теореме 1, — это любая монотонная норма, относительно которой имеет место оценка $|C|\leqslant\varrho(C)+\varepsilon$. Такую норму можно определить равенством [14, с. 15]

$$|x|=\big(\varrho(C)+\varepsilon\big)^{m-1}|x|'+\big(\varrho(C)+\varepsilon\big)^{m-2}|Cx|'+\ldots+|C^{m-1}x|', \tag{2.5}$$

где $|\cdot|'$ — евклидова норма, натуральное m выбрано так, что $\sqrt[m]{|C^m|'}\leqslant\varrho(C)+\varepsilon$. Монотонность нормы (2.5) следует из того, что все компоненты матрицы C, определенной формулой (2.3), неотрицательны. Заметим, что если хотя бы одному собственному значению матрицы C, модуль которого совпадает со спектральным радиусом $\varrho(C)$ этой матрицы, соответствуют не только собственные, но и присоединенные векторы, то для любой (не обязательно монотонной) нормы в $\mathbb{R}^n$ будет выполнено неравенство $|C|>\varrho(C)$ [14, с. 16], и поэтому нельзя считать $\varepsilon=0$ в неравенстве (2.4) теоремы 1.

Рассмотрим следствия теоремы 1 при $n=1,2$. Пусть заданы отображение $\Phi:X\times X\to Y$ и элемент $y\in Y$. Применяя теорему 1 к скалярному уравнению

$$\Phi(x,x)=y, \tag{2.6}$$

получаем следующий аналог теоремы 1 работы [12].

Следствие 1. *Пусть X — полное метрическое пространство, заданы числа $\alpha>\beta\geqslant0$ и выполнены следующие условия:*

при каждом $x_2\in X$ отображение $\Phi(\cdot,x_2):X\to Y$ условно α-накрывающее и $y\in\Phi(X,x_2)$;

при каждом $x_1\in X$ отображение $\Phi(x_1,\cdot):X\to Y$ β-липшицево;

для любой последовательности $\{u^k\}\subset X$ из сходимости $u^k\to u$, $\Phi(u^k,u)\to y$ следует равенство $\Phi(u,u)=y$.

Тогда для любого $u^0\in X$ существует решение $x=\xi\in X$ уравнения (2.6), *удовлетворяющее неравенству $\rho_X(\xi,u^0)\leqslant(\alpha-\beta)^{-1}\rho_Y(y,\Phi(u^0,u^0))$.*

В данном случае матрицы A, B, C содержат только по одному элементу $A=(\alpha)$, $B=(\beta)$, $C=(\alpha^{-1}\beta)$. Поэтому $|C|=\varrho(C)=\alpha^{-1}\beta<1$ и из теоремы 1 получаем неравенство

$$\rho_X(\xi,u^0)\leqslant\big(1-\alpha^{-1}\beta)^{-1}\alpha^{-1}\rho_Y\big(y,\Phi(u^0,u^0)\big),$$

из которого следует требуемая оценка.

Пусть теперь заданы отображения $\Phi_1 : X_1 \times X_2 \to Y_1,\ \Phi_2 : X_1 \times X_2 \to Y_2$ и имеют место включения $y_1 \in Y_1,\ y_2 \in Y_2$. Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2) = y_1, \\ \Phi_2(x_1, x_2) = y_2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Следствие 2 (см. [15, теорема 1]). *Пусть метрические пространства X_1, X_2 являются полными, существуют неотрицательные числа α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющие неравенству*

$$\alpha_1\alpha_2 > \beta_1\beta_2,$$

и выполнены следующие условия:

при каждом $x_2 \in X_2$ отображение $\Phi_1(\cdot, x_2) : X_1 \to Y_1$ условно α_1-накрывающее и выполнено $y_1 \in \Phi_1(X_1, x_2)$, а при любом $x_1 \in X_1$ отображение $\Phi_2(x_1, \cdot) : X_2 \to Y_2$ условно α_2-накрывающее и $y_2 \in \Phi_2(x_1, X_2)$;

при каждом $x_1 \in X_1$ отображение $\Phi_1(x_1, \cdot) : X_2 \to Y_1$ β_1-липшицево, а при любом $x_2 \in X_2$ отображение $\Phi_2(\cdot, x_2) : X_1 \to Y_2$ β_2-липшицево;

для любой последовательности $\{(u_1^k, u_2^k)\} \subset X_1 \times X_2$ из сходимости $u_1^k \to u_1,\ u_2^k \to u_2$, $\Phi_1(u_1^k, u_2) \to y_1,\ \Phi_2(u_1, u_2^k) \to y_2$ следуют равенства $\Phi_1(u_1, u_2) = y_1,\ \Phi_2(u_1, u_2) = y_2$.

Тогда система (2.7) разрешима и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно так определить норму $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^2$, что, при задании в $X = X_1 \times X_2$ метрики равенством (2.2), для любого $u^0 \in X$ найдется решение $x = \xi \in X$ системы (2.7), удовлетворяющее неравенству

$$\rho_X(\xi, u^0) \leqslant \left(\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \sqrt{\beta_1\beta_2}} + \varepsilon\right) \Big|\Big(\frac{\rho_{Y_1}(y_1, \Phi_1(u_1^0, u_2^0))}{\alpha_1}, \frac{\rho_{Y_2}(y_2, \Phi_2(u_1^0, u_2^0))}{\alpha_2}\Big)\Big|. \tag{2.8}$$

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из доказательства теоремы 1, действительно достаточно заметить, что в данном случае матрица

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1^{-1}\beta_1 \\ \alpha_2^{-1}\beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет спектральный радиус $\varrho(C) = \sqrt{\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)} < 1$.

Отметим, что в $\mathbb{R}^2$ можно определить норму $|\cdot|$, относительно которой спектральный радиус и норма данной матрицы C будут совпадать, но это не позволяет в неравенстве (2.8) принять $\varepsilon = 0$. Действительно, матрица C имеет два собственных числа

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}},$$

которым соответствуют собственные векторы

$$e_1 = \Big(\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}, \sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}\Big), \quad e_2 = \Big(-\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}, \sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}\Big).$$

Если определить норму в $\mathbb{R}^2$ вектора $x = \chi_1 e_1 + \chi_2 e_2$ равенством $|x| = \big(\chi_1^2 + \chi_2^2\big)^{1/2}$, то

$$\varrho(C) = |C| = \sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}}.$$

Однако эта норма не является монотонной, таким образом, в неравенстве (2.8) не удается избавиться от $\varepsilon > 0$.

§ 3. Корректная разрешимость систем операторных уравнений

Исследуем вопрос о корректности системы (2.1) в следующей постановке. Пусть определены отображения $\Phi_{im} : X_i \times X \to Y_i$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1, 2, \ldots$, и задан элемент $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y$. Рассмотрим последовательность систем операторных уравнений

$$\begin{cases} \Phi_{1m}(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1, \\ \Phi_{2m}(x_2, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_2, \\ \qquad \vdots \\ \Phi_{nm}(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_n, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

относительно неизвестного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$. Предположим, что для некоторого элемента $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ при $m \to \infty$ имеет место сходимость

$$\Phi_{im}(u_i^0, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \to y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом натуральном m системы уравнений (3.1) и сходимость к u^0 последовательности решений.

Определим отображения

$$\Upsilon_m : X \times X \to Y, \quad \Upsilon_m(u, x) = \big(\Phi_{im}(u_i, x)\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Тогда последовательность систем (3.1) можем записать в виде последовательности уравнений

$$\Upsilon_m(x, x) = y, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2 (см. [11, теорема 2]). *Пусть метрические пространства $X_1, \ldots, X_n$ являются полными. Пусть для всех $i, j = \overline{1,n}$ существуют такие числа $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, что для спектрального радиуса матрицы $C = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}$ имеет место неравенство $\varrho(C) < 1$, и для любых $m = 1, 2, \ldots$ выполнены следующие условия:*

для всех $i = \overline{1,n}$ и каждого $x \in X$ отображения $\Phi_{im}(\cdot, x) : X_i \to Y_i$ условно α_i-накрывающие и $y_i \in \Phi_{im}(X_i, x)$;

для всех $i, j = \overline{1,n}$ и любых $u_i \in X_i$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_{j-1} \in X_{j-1}$, $x_{j+1} \in X_{j+1}, \ldots, x_n \in X_n$ отображения $\Phi_{im}(u_i, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : X_j \to Y_i$ β_{ij}-липшицевы;

для любой последовательности $\{u^k\} \subset X$ из сходимости $u^k \to u$, $\Upsilon_m(u^k, u) \to y$ следует равенство $\Upsilon_m(u, u) = y$.

Тогда если имеет место сходимость (3.2), *то при каждом m существует такое решение $\xi^m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \ldots, \xi_n^m) \in X$ системы уравнений* (3.1), *что $\xi^m \to u^0$.*

Рассмотрим два следствия этой теоремы. Пусть заданы отображения $\Phi_m : X \times X \to Y$, $m = 1, 2, \ldots$, элемент $y \in Y$ и последовательность уравнений

$$\Phi_m(x, x) = y, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{3.3}$$

Следствие 3. *Пусть X — полное метрическое пространство, $u^0 \in X$ и существуют такие числа $\alpha > \beta \geqslant 0$, что при каждом $m = 1, 2, \ldots$ отображение Φ_m удовлетворяет следующим условиям:*

при каждом $x_2 \in X$ отображение $\Phi_m(\cdot, x_2) : X \to Y$ условно α-накрывающее и $y \in \Phi_m(X, x_2)$;

при каждом $x_1 \in X$ отображение $\Phi_m(x_1, \cdot) : X \to Y$ β-липшицево;

для любой последовательности $\{u^k\} \subset X$ из сходимости $u^k \to u$, $\Phi_m(u^k, u) \to y$ следует равенство $\Phi_m(u, u) = y$.

Тогда если $\Phi_m(u^0, u^0) \to y$, то при каждом m существует такое решение $x = \xi^m \in X$ уравнения (3.3), *что $\xi^m \to u^0$.*

Действительно, в данном случае имеем $|C| = \varrho(C) = \alpha^{-1}\beta < 1$ (см. следствие 1), поэтому можно воспользоваться теоремой 2.

Отметим, что это утверждение в случае «безусловного» накрывания отображений получено в [16], а для более общего определения накрывания — в работах [6, 17].

Пусть заданы отображения $\Phi_{1m} : X_1 \times X_2 \to Y_1$, $\Phi_{2m} : X_1 \times X_2 \to Y_2$ и элемент $y = (y_1, y_2)$ пространства $Y_1 \times Y_2$. Для последовательности систем двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \Phi_{1m}(x_1, x_2) = y_1, \\ \Phi_{2m}(x_1, x_2) = y_2, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

теорема 2 равносильна следующему утверждению.

Следствие 4. *Пусть метрические пространства X_1, X_2 являются полными и задана точка $u^0 = (u_1^0, u_2^0) \in X_1 \times X_2$. Пусть, далее, существуют неотрицательные числа α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющие неравенству $\alpha_1\alpha_2 > \beta_1\beta_2$, и при каждом $m = 1, 2, \ldots$ выполнены следующие условия:*

при любом $x_2 \in X_2$ отображение $\Phi_{1m}(\cdot, x_2) : X_1 \to Y_1$ условно α_1-накрывающее, точка y_1 принадлежит $\Phi_{1m}(X_1, x_2)$, при любом $x_1 \in X_1$ отображение $\Phi_{2m}(x_1, \cdot) : X_2 \to Y_2$ условно α_2-накрывающее и $y_2 \in \Phi_{2m}(x_1, X_2)$;

при любом $x_1 \in X_1$ отображение $\Phi_{1m}(x_1, \cdot) : X_2 \to Y_1$ β_1-липшицево, при любом $x_2 \in X_2$ отображение $\Phi_{2m}(\cdot, x_2) : X_1 \to Y_2$ β_2-липшицево;

для каждой последовательности $\{(u_1^k, u_2^k)\} \subset X_1 \times X_2$ из сходимости $u_1^k \to u_1$, $u_2^k \to u_2$, $\Phi_{1m}(u_1^k, u_2) \to y_1$, $\Phi_{2m}(u_1, u_2^k) \to y_2$ следуют равенства $\Phi_{1m}(u_1, u_2) = y_1$, $\Phi_{2m}(u_1, u_2) = y_2$.

Тогда если $\Phi_{1m}(u_1^0, u_2^0) \to y_1$, $\Phi_{2m}(u_1^0, u_2^0) \to y_2$ при $m \to \infty$, то для каждого m существует такое решение $x = \xi^m \in X_1 \times X_2$ системы (3.4), что $\xi^m \to u^0$.

Действительно, в рассматриваемом случае (см. следствие 2)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1^{-1}\beta_1 \\ \alpha_2^{-1}\beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho(C) = |C| = \sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}} < 1,$$

то есть выполнены все условия теоремы 2.

§ 4. Накрывающие отображения в функциональных пространствах

В этой работе исследование задач управления для дифференциальных уравнений неявного вида основано на представлении их в виде систем операторных уравнений в функциональных пространствах. Для применения теорем 1, 2 к таким уравнениям требуются условия накрывания оператора Немыцкого в функциональных пространствах. В работах [5, 17] получены условия накрывания оператора Немыцкого, действующего в пространстве существенно ограниченных функций, в [18] — в пространстве суммируемых функций. Здесь сформулировано необходимое для дальнейшего исследования утверждение об условном накрывании оператора Немыцкого, следующее из результатов перечисленных работ.

Обозначим через $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ совокупности всех непустых *замкнутых* и, соответственно, всех непустых *компактных* подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; равенством $\rho_{\mathbb{R}^n}(W) = \inf\limits_{w \in W} |w|$ определим расстояние от $0 \in \mathbb{R}^n$ до компактного множества W в $\mathbb{R}^n$.

Пусть задано измеримое отображение $t \in [a, b] \mapsto \Omega(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ такое, что измеримая функция $t \to \rho_{\mathbb{R}^n}\big(\Omega(t)\big)$ существенно ограничена. Множество существенно ограниченных сечений отображения Ω непусто, и можно определить полное метрическое пространство $L_\infty([a, b], \Omega)$ существенно ограниченных функций $y(t) \in \Omega(t)$ с метрикой $\rho_{L_\infty}(y_1, y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{s \in [a, b]} |y_1(s) - y_2(s)|$. Далее, обозначим $AC_\infty([a, b], \Omega)$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L_\infty([a, b], \Omega)$, с метрикой $\rho_{AC_\infty}(x_1, x_2) = \big|\big(\rho_{L_\infty}(\dot{x}_1, \dot{x}_2), x_1(a) - x_2(a)\big)\big|$.

Пусть при каждом $t \in [a, b]$ заданы измеримые многозначные отображения

$$t \in [a, b] \mapsto \Omega(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad t \in [a, b] \mapsto \Theta(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^l),$$

такие, что функции $t \in [a,b] \mapsto \rho_{_{\mathbb{R}^n}}\bigl(\Omega(t)\bigr) \in \mathbb{R}$, $t \in [a,b] \mapsto \rho_{_{\mathbb{R}^l}}\bigl(\Theta(t)\bigr) \in \mathbb{R}$ существенно ограничены. Пусть, далее, определена функция $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, удовлетворяющая условиям Каратеодори. Оператор Немыцкого

$$(N_g y)(t) = g(t, y(t))$$

действует из $L_\infty([a,b],\Omega)$ в $L_\infty([a,b],\Theta)$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие [19, с. 375]:

(a) для любого $r > 0$ существует такое $R > 0$, что при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $y \in \Omega(t)$ из неравенства $|y| \leqslant r$ следует $|g(t,y)| \leqslant R$.

В этом случае оператор $N_g : L_\infty \to L_\infty$ является замкнутым и ограниченным.

Теорема 3. *Пусть для функции g выполнено условие (a). Тогда если для некоторого $\alpha > 0$ при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $g(t,\cdot) : \Omega(t) \to \Theta(t)$ условно α-накрывающее, то оператор Немыцкого N_g также условно α-накрывающий. Аналогично, если при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $g(t,\cdot)$ «безусловно» α-накрывающее, то и оператор Немыцкого N_g α-накрывающий.*

§ 5. Разрешимость систем со смешанными ограничениями на управление

Пусть заданы $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $A^0 \in \mathbb{R}^n$, измеримые многозначные отображения

$$\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad U : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k), \quad V : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2}),$$

такие, что функции $t \in [a,b] \mapsto \rho_{_{\mathbb{R}^n}}\bigl(\Omega(t)\bigr),\ \rho_{_{\mathbb{R}^k}}\bigl(U(t)\bigr),\ \rho_{_{\mathbb{R}^{l_2}}}\bigl(V(t)\bigr) \in \mathbb{R}$ существенно ограничены. Пусть, далее, определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_1}, \quad g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_2},$$

относительно которых, кроме того, предполагаем, что для любого $r > 0$ существует такое $R > 0$, что при п.в. $t \in [a,b]$ для всех $x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \Omega(t),\ u \in U(t)$, удовлетворяющих условию $|x| + |z| + |u| \leqslant r$, имеют место неравенства $|f(t,x,z,u)| \leqslant R,\ |g(t,x,u)| \leqslant R$.

Рассмотрим управляемую систему

$$f\bigl(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\bigr) = 0, \quad t \in [a,b], \quad x(a) = A^0, \tag{5.1}$$

со смешанными ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t), \quad g\bigl(t, x(t), u(t)\bigr) \in V(t), \quad t \in [a,b], \tag{5.2}$$

и дополнительным ограничением на производную решения

$$\dot{x}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a,b]. \tag{5.3}$$

Управление $u(\cdot)$ будем предполагать измеримым и существенно ограниченным, а решение $x(\cdot)$ будем искать в классе абсолютно непрерывных функций, имеющих существенно ограниченную производную. Соответственно, *локальным решением* управляемой системы будем считать пару $(x,u) \in AC_\infty([a,a+\tau],\Omega) \times L_\infty([a,a+\tau],U)$, удовлетворяющую уравнениям (5.1), (5.2), (5.3), при п.в. $t \in [a,a+\tau]$, $\tau \in (0,b-a]$. Управляемую систему называют *локально разрешимой*, если она имеет локальное решение.

Пусть заданы непрерывная функция $x^0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\sigma > 0$. Положим $D(t) = B_{\mathbb{R}^n}(x^0(t),\sigma)$.

Теорема 4. *Пусть выполнено неравенство $|A^0 - x^0(a)| < \sigma$ и при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in D(t),\ z \in \Omega(t),\ u \in U(t)$ выполнены следующие условия:*

(1) *отображения $f(t,x,\cdot,u) \colon \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1},\ g(t,x,\cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ условно накрывающие;*

(2) *отображения*

$$f(t,\cdot,z,u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_1}, \quad f(t,x,z,\cdot) \colon U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}, \quad g(t,\cdot,u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$$

липшицевы и имеет место включение $0 \in f(t,x,\Omega(t),u)$.

Тогда если при п.в. $t \in [a,b]$ множество $\Bigl(\bigcap\limits_{x \in D(t)} g\bigl(t,x,U(t)\bigr)\Bigr) \bigcap V(t)$ непусто, то управляемая система (5.1), (5.2), (5.3) локально разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не уменьшая общности будем считать, что в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^{l_1}$, $\mathbb{R}^{l_2}$ введена евклидова норма (все предположения теоремы 3 сохраняются при изменении нормы: отображение, являющееся липшицевым или накрывающим в некоторой норме $|\cdot|$, относительно любой другой эквивалентной нормы $|\cdot|_*$ останется липшицевым или накрывающим, изменится только соответствующий коэффициент; существует такое $\sigma_*>0$, что $B_E(x^0(t),\sigma)=\{x:|x-x^0(t)|\leqslant\sigma\}\supset\{x:|x-x^0(t)|_*\leqslant\sigma_*\}=B_{E_*}(x^0(t),\sigma_*)$ при всех $t\in[a,b]$, где $E=\big(\mathbb{R}^n,|\cdot|\big)$, $E_*=\big(\mathbb{R}^n,|\cdot|_*\big)$; компактность и замкнутость множеств также инвариантны относительно эквивалентных норм). Пусть $\langle x,u\rangle$ — скалярное произведение векторов x,u.

Сначала покажем, что многозначное отображение

$$G:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2}),\quad G(t,x)=g\big(t,x,U(t)\big)$$

удовлетворяет условиям Каратеодори. Измеримость при каждом x отображения $G(\cdot,x)$ следует из [20, теорема 1.5.18]. Пусть для некоторых точек t, x и открытого множества $W\subset\mathbb{R}^{l_2}$ выполнено включение $G(t,x)\subset W$. Тогда $g(t,x,z)\in W$ для каждого $z\in U(t)$. Вследствие непрерывности функции $g(t,\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{l_2}$, для каждого $z\in U(t)$ существует такая окрестность точки (x,z)

$$O_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k}\big((x,z),\,r(z)\big)=O_{\mathbb{R}^n}\big(x,r(z)\big)\times O_{\mathbb{R}^k}\big(z,r(z)\big),$$

что $g\Big(t,\,O_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k}\big((x,z),\,r(z)\big)\Big)\subset W$. Множество $\{(x,z):z\in U(t)\}$ компактно в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$, а совокупность окрестностей $\{O_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k}\big((x,z),\,r(z)\big):z\in U(t)\}$ образует его покрытие. Выберем из этого покрытия конечное покрытие $\{O_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k}\big((x_i,z_i),\,r_i\big),\ i=\overline{1,m}\}$. Тогда для $r=\min_{i=\overline{1,m}}\{r_i\}$ имеем $g\big(t,\,O_{\mathbb{R}^n}(x,r),\,U(t)\big)\subset W$. Итак, доказано, что отображение $G(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ полунепрерывно сверху.

Пусть для точек t, x и открытого множества $W\subset\mathbb{R}^{l_2}$ множество $g\big(t,x,U(t)\big)\cap W$ непусто. Тогда существует элемент $z\in U(t)$, для которого $g(t,x,z)\in W$. Вследствие непрерывности функции $g(t,\cdot,z)$ найдется такая окрестность точки x, что для любого элемента $\tilde{x}$ этой окрестности выполнено $g(t,\tilde{x},z)\in W$, поэтому $g\big(t,\tilde{x},U(t)\big)\cap W\neq\varnothing$. Таким образом, отображение $G(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ полунепрерывно не только сверху, но и снизу и поэтому непрерывно.

Проверим измеримость многозначного отображения $H:[a,b]\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$,

$$H(t)=\Big(\bigcap_{x\in D(t)}g\big(t,x,U(t)\big)\Big)\bigcap V(t)=\Big(\bigcap_{x\in D(t)}G\big(t,x\big)\Big)\bigcap V(t).\tag{5.4}$$

Многозначное отображение $t\mapsto D(t)$ измеримо, обозначим $\mathfrak{D}$ — счетное семейство измеримых функций $d_i(\cdot)$, аппроксимирующих это отображение. При каждом натуральном i определим многозначное отображение $t\mapsto G(t,d_i(t))$; это отображение измеримо, так как отображение $G:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Следовательно, измеримым является отображение $t\mapsto\bigcap_i G(t,d_i(t))$. Чтобы доказать измеримость отображения $t\mapsto\bigcap_{x\in D(t)}G(t,x)$, установим справедливость равенства

$$\bigcap_{x\in D(t)}G(t,x)=\bigcap_i G(t,d_i(t)).\tag{5.5}$$

Включение $\bigcap_{x\in D(t)}G(t,x)\subset\bigcap_i G(t,d_i(t))$ очевидно. Зафиксируем произвольное $t\in[a,b]$ и любое $y\in\bigcap_i G(t,d_i(t))$. Для каждого $x\in D(t)$ выберем подпоследовательность $\{d_{i_j}\}\subset\mathfrak{D}$ так, чтобы $d_{i_j}(t)\to x$ при $j\to\infty$. Поскольку при любом номере j выполнено включение $y\in G(t,d_{i_j}(t))$, а отображение $G(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ непрерывно, то $y\in G(t,x)$. Итак, $y\in\bigcap_{x\in D(t)}G(t,x)$. Таким образом, равенство (5.5) действительно выполнено, отображение $t\mapsto\bigcap_{x\in D(t)}G(t,x)$, а с ним и отображение H измеримы.

Включение (5.2) имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого существенно ограниченного сечения $\eta:[a,b]\to\mathbb{R}^{l_2}$ многозначного отображения H выполнено

$$u(t)\in U(t),\quad g\big(t,x(t),u(t)\big)=\eta(t),\quad t\in[a,b].$$

Покажем, что многозначное отображение H имеет существенно ограниченное сечение η. Сначала проверим, что функция $t\in[a,b]\mapsto\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(H(t)\big)\in\mathbb{R}$ существенно ограничена. Действительно, из ограниченности соответствующих функций следует, что существует $r_0>0$, удовлетворяющее при п.в. $t\in[a,b]$ неравенствам $\rho_{\mathbb{R}^k}\big(U(t)\big)\leqslant r_0$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(V(t)\big)\leqslant r_0$. Найдем такое $R_0>0$, что $|g(t,x,u)|\leqslant R_0$ при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x\in D(t)$, $u\in U(t)$, $|u|\leqslant r_0$. Следовательно, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}\Big(\bigcap\limits_{x\in D(t)}G(t,x)\Big)\leqslant R_0$, и, таким образом, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(H(t)\big)\leqslant\max\{r_0,R_0\}$. Теперь в качестве требуемого сечения η многозначного отображения H можно выбрать сечение, удовлетворяющее равенству $|\eta(t)|=\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(H(t)\big)$ (см., например, [21]).

Определим отображение

$$\Pi:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to D(t),\quad \Pi(t,x)=\begin{cases} x, & \text{если}\quad x\in D(t),\\ x^0(t)+\dfrac{x-x^0(t)}{|x-x^0(t)|}\cdot\sigma, & \text{если}\quad x\notin D(t).\end{cases}\tag{5.6}$$

Докажем, что при всех $t\in[a,b]$ и любых $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|\Pi(t,x_1)-\Pi(t,x_2)|\leqslant|x_1-x_2|.\tag{5.7}$$

Пусть для определенности $x_1\in D(t)$, $x_2\notin D(t)$. Тогда $x_1=\Pi(t,x_1)$ и существует такое $\varsigma\geqslant1$, что $x_2-x^0(t)=\varsigma\big(\Pi(t,x_2)-x^0(t)\big)$. Положим $r=|\Pi(t,x_1)-x^0(t)|$. Очевидно, $r\leqslant\sigma$. Теперь вычислим

$$\begin{aligned}|x_2-x_1|^2&=|\varsigma(\Pi(t,x_2)-x^0(t))-(\Pi(t,x_1)-x^0(t))|^2=\varsigma^2\sigma^2+r^2-\\ &-2\varsigma\langle\Pi(t,x_2)-x^0(t),\Pi(t,x_1)-x^0(t)\rangle=\varsigma\big(\varsigma\sigma^2+\frac{r^2}{\varsigma}-2\langle\Pi(t,x_2)-x^0(t),\Pi(t,x_1)-x^0(t)\rangle\big).\end{aligned}$$

Так как функция $\varsigma\in[1,\infty)\mapsto\varsigma\sigma^2+r^2\varsigma^{-1}$ возрастает, то $\varsigma\sigma^2+r^2\varsigma^{-1}\geqslant\sigma^2+r^2$, следовательно,

$$\begin{aligned}|x_2-x_1|^2\geqslant\varsigma\big(\sigma^2+r^2-2\langle\Pi(t,x_2)-x^0(t),\Pi(t,x_1)-x^0(t)\rangle\big)=\\ =\varsigma|\Pi(t,x_2)-\Pi(t,x_1)|^2\geqslant|\Pi(t,x_2)-\Pi(t,x_1)|^2.\end{aligned}$$

Проверка неравенства (5.7) в случае $x_1\notin D(t)$, $x_2\notin D(t)$ проводится аналогично.

Пусть $\tau>0$. Рассмотрим «вспомогательную» систему управления

$$\begin{gathered}f\big(t,\,\Pi(t,x(t)),\,\dot x(t),\,u(t)\big)=0,\quad t\in[a,a+\tau],\quad x(a)=A^0,\\ g\big(t,\,\Pi(t,x(t)),\,u(t)\big)=\eta(t),\quad \dot x(t)\in\Omega(t),\quad u(t)\in U(t).\end{gathered}\tag{5.8}$$

Заметим, что если пара $\big(x(t),u(t)\big)$ является решением системы (5.8), то на достаточно малом промежутке $[a,a+\tau]$ будет выполнено $x(t)\in D(t)$, следовательно, эта пара будет локальным решением также и первоначальной системы (5.1), (5.2), (5.3). При этом функции $f(t,\,\Pi(t,\cdot),\,z,\,u)$, $g(t,\,\Pi(t,\cdot),\,u)$ являются липшицевыми на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, в отличие от функций $f(t,\cdot,z,u)$, $g(t,\cdot,u)$, обладающих этим свойством лишь на множестве $D(t)\subset\mathbb{R}^n$. Кроме того, отображения $f(t,\,\Pi(t,x),\,\cdot,\,u)$, $g(t,\,\Pi(t,x),\,\cdot)$ будут обладать свойствами условного накрывания уже при всех $x\in\mathbb{R}^n$, а не только при $x\in D(t)$.

Задача управления (5.8) равносильна системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered}f\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,v(t),\,u(t)\Big)=0,\\ g\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,u(t)\Big)=\eta(t)\end{gathered}\tag{5.9}$$

относительно пары $(v,u)\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U)$ неизвестных функций $v(t)=\dot{x}(t)\in\Omega(t)$, $u(t)\in U(t)$. Определим отображения

$$\Phi_1: L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\times L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1}),$$

$$(\Phi_1(w,v,u))(t)=f\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,w(t),\,u(t)\Big);$$

$$\Phi_2: L_\infty([a,a+\tau],U)\times L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2}),$$

$$(\Phi_2(z,v,u))(t)=g\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,z(t)\Big)$$

(последнее отображение постоянно по переменной u). К управляемой системе (5.9), записанной в виде системы операторных уравнений

$$\Phi_1(v,v,u)=0,\quad \Phi_2(u,v,u)=\eta, \tag{5.10}$$

применима теорема 1. Докажем это.

Пусть положительные числа α_1, α_2 являются константами условного накрывания отображений $f(t,x,\cdot,u):\Omega(t)\to\mathbb{R}^{l_1}$, $g(t,x,\cdot):U(t)\to\mathbb{R}^{l_2}$; а неотрицательные числа β_{11}, β_{12}, β_{21} — константами Липшица отображений $f(t,\cdot,z,u):D(t)\to\mathbb{R}^{l_1}$, $f(t,x,z,\cdot):U(t)\to\mathbb{R}^{l_1}$, $g(t,\cdot,u):D(t)\to\mathbb{R}^{l_2}$.

Для произвольных $v,w\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega)$, $u\in L_\infty([a,a+\tau],U)$ определим функцию $y(t)=f\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,w(t),\,u(t)\Big)$. Пусть $R=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|y(t)|$. Вследствие условного α_1-накрывания отображения $f(t,x,\cdot,u):\Omega(t)\to\mathbb{R}^{l_1}$ выполнено

$$0\in f\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,B_{\Omega(t)}\big(w(t),{\alpha_1}^{-1}R\big),\,u(t)\Big).$$

В силу леммы Филиппова [20, с. 78] существует такая измеримая функция $w_0:[a,a+\tau]\to\mathbb{R}^n$, что $w_0(t)\in B_{\Omega(t)}\big(w(t),{\alpha_1}^{-1}R\big)$, $f\Big(t,\,\Pi\big(t,A^0+\int_a^t v(s)\,ds\big),\,w_0(t),\,u(t)\Big)=0$; эта функция, очевидно, является существенно ограниченной. Таким образом,

$$0\in\Phi_1(L_\infty([a,a+\tau],\Omega),v,u)\quad\forall v\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\quad\forall u\in L_\infty([a,a+\tau],U).$$

Согласно теореме 3, отображение $\Phi_1(\cdot,v,u):L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1})$ является условно α_1-накрывающим. Далее, отображение $\Phi_1(w,\cdot,u):L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1})$ является $\tau\cdot\beta_{11}$-липшицевым, а отображение $\Phi_1(w,v,\cdot):L_\infty([a,a+\tau],U)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1})$ — β_{12}-липшицевым.

Аналогично отображение $\Phi_2(\cdot,v,u):L_\infty([a,a+\tau],U)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2})$ является условно α_2-накрывающим; имеет место включение

$$\eta\in\Phi_2(L_\infty([a,a+\tau],U),v,u)\quad\forall v\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\quad\forall u\in L_\infty([a,a+\tau],U);$$

отображение $\Phi_2(z,\cdot,u):L_\infty([a,a+\tau],\Omega)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2})$ является $\tau\cdot\beta_{21}$-липшицевым, а отображение $\Phi_2(z,v,\cdot):L_\infty([a,a+\tau],U)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2})$ постоянно, то есть 0-липшицево.

Для проверки условий теоремы 1 остается найти спектральный радиус ϱ матрицы (2.3), которая в данном случае имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\tau\beta_{11} & \alpha_1^{-1}\beta_{12}\\ \alpha_2^{-1}\tau\beta_{21} & 0\end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Имеем

$$\varrho(C)=\frac{\tau\beta_{11}}{2\alpha_1}+\sqrt{\frac{\tau^2{\beta_{11}}^2}{4\alpha_1^2}+\frac{\tau\beta_{12}\beta_{21}}{\alpha_1\alpha_2}}, \tag{5.12}$$

поэтому неравенство $\varrho(C) < 1$ будет выполнено, если

$$\tau < \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_{11}\alpha_2 + \beta_{12}\beta_{21}}. \qquad (5.13)$$

Таким образом, при полученных значениях τ, согласно теореме 1, система (5.10) имеет решение (x, u). На достаточно малом промежутке $[a, a+\tau_0] \subset [a, a+\tau]$ будет выполнено $x(t) \in D(t)$, следовательно, исходная управляемая система локально разрешима. □

Проиллюстрируем применение теоремы 4 к исследованию конкретных управляемых систем.

Пример 1. Рассмотрим при $t \in [0,1]$ систему

$$\big(\dot{x}(t)\big)^{1/3} + \big(x(t)\big)^2 + u(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \exp|x(t)| \in V(t), \quad \dot{x}(t) \in \Omega(t), \quad u(t) \in U(t). \quad (5.14)$$

Здесь $\Omega(t) = [-2, 2]$, $U(t) = [-t, t]$, отображение $V : [0,1] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$ измеримо и удовлетворяет соотношению $V(t) \bigcap [0,t] \neq \varnothing$, $t \in [0,1]$. Покажем, что для системы (5.14) выполнены все предположения теоремы 4 и, следовательно, эта система разрешима.

Положим $x^0(t) \equiv 0$, тогда $D(t) \equiv [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$. Для определенного равенством $f(t,x,z,u) = (z)^{1/3} + (x)^2 + u$ отображения $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ при любых $t \in [0,1]$, $x \in D(t)$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$ выполнено: $f(t,x,\cdot,u)$ является условно $3^{-1}4^{-1/3}$-накрывающим; $f(t,\cdot,z,u)$ является 2σ-липшицевым, $f(t,x,z,\cdot)$ является 1-липшицевым; при достаточно малом $\sigma > 0$ имеет место соотношение $f(t,x,\Omega(t),u) = [-2^{1/3} + x^2 + u,\ 2^{1/3} + x^2 + u] \supset [-2^{1/3} + \sigma^2 + t,\ 2^{1/3} - t] \ni 0$. Отображение $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(t,x,u) = |u| \exp|x|$ является 1-накрывающим по u и 1-липшицевым по x. Завершая проверку предположений теоремы 4, найдем множество

$$H(t) = \Big(\bigcap_{x \in D(t)} g\big(t,x,U(t)\big)\Big) \bigcap V(t) = \Big(\bigcap_{x \in [0,\sigma]} [0,t] \cdot \exp x\Big) \bigcap V(t) = [0,t] \bigcap V(t).$$

Так как это множество непусто, то, согласно теореме 4, система (5.14) разрешима: для некоторого $\tau_0 > 0$ существует пара функций $(x,u) \in AC_\infty([0,\tau_0],\Omega) \times L_\infty([0,\tau_0],U)$, удовлетворяющая этой системе на $[0,\tau_0]$.

Приведем оценку решения управляемой системы (5.1), (5.2), (5.3), следующую из неравенства (2.4).

Итак, пусть выполнены условия теоремы 4, причем $x^0 \in AC_\infty([a,b],\Omega)$. Как и в приведенном доказательстве, будем обозначать через α_1, α_2 константы условного накрывания отображений $f(t,x,\cdot,u) : \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g(t,x,\cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$; β_{11}, β_{12}, β_{21} — константы Липшица отображений $f(t,\cdot,z,u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $f(t,x,z,\cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g(t,\cdot,u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$. Пусть $\tau > 0$ удовлетворяет условию (5.13). Для заданной равенством (5.11) матрицы C и ее спектрального радиуса $\varrho(C)$ (который вычисляется по формуле (5.12)), любого $\varepsilon \in (0, 1-\varrho(C))$ определим монотонную норму $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы $|C| \leqslant \varrho(C) + \varepsilon$.

Следствие 5. *Для любой функции* $u^0 \in L_\infty([a,b],U)$ *найдется* $\tau_0 \in (0,\tau]$, *и существует решение* $(x,u) \in AC_\infty([a,a+\tau_0],\Omega) \times L_\infty([a,a+\tau_0],U)$ *управляемой системы* (5.1), (5.2), (5.3), *удовлетворяющее неравенству*

$$\Big|\Big(\operatorname*{vrai\ sup}_{t \in [a,a+\tau_0]} |\dot{x}(t) - \dot{x}^0(t)|,\ \operatorname*{vrai\ sup}_{t \in [a,a+\tau_0]} |u(t) - u^0(t)|\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{1 - \varrho(C) - \varepsilon} \cdot \Big|\Big(\frac{\phi_1}{\alpha_1}, \frac{\phi_2}{\alpha_2}\Big)\Big|,$$

где $\phi_1 = \operatorname*{vrai\ sup}_{t \in [a,a+\tau_0]} \big|f\big(t,x^0(t),\dot{x}^0(t),u^0(t)\big)\big|$, $\phi_2 = \operatorname*{vrai\ sup}_{t \in [a,a+\tau_0]} \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(g\big(t,x^0(t),u^0(t)\big),\ H(t)\big)$, *а многозначное отображение* $H : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ *определяется равенством* (5.4).

Доказательство. Функция $\zeta : [a,b] \to \mathbb{R}^{l_2}$, $\zeta(t) = g\big(t,x^0(t),u^0(t)\big)$ существенно ограничена. Выберем в качестве измеримого селектора многозначного отображения H функцию η, реализующую расстояние $\varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(\zeta(t),H(t)\big)$, то есть удовлетворяющую при п.в. $t \in [a,b]$ равенству $|\zeta(t) - \eta(t)| = \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(\zeta(t),H(t)\big)$ (см., например, [21]). Так как справедливо неравенство $\varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(\zeta(t),H(t)\big) \leqslant |\zeta(t)| + \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(H(t)\big)$, то функция η существенно ограничена. Требуемая оценка теперь непосредственно следует из неравенства (2.4), примененного к системе (5.10). □

§ 6. Корректная разрешимость управляемых систем

В этом параграфе исследуется корректность управляемой дифференциальной системы (5.1), (5.2), (5.3).

Пусть заданы числа $A_m^0 \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, измеримые многозначные отображения

$$\Omega : [a, b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad U : [a, b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k), \quad V_m : [a, b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$$

такие, что функции $t \in [a, b] \mapsto \rho_{\mathbb{R}^n}\big(\Omega(t)\big)$, $\rho_{\mathbb{R}^k}\big(U(t)\big)$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(V_m(t)\big) \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, существенно ограничены. Пусть, далее, при любом $m = 1, 2, \ldots$ определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции $f_m : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g_m : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_2}$, относительно которых, кроме того, предполагаем, что для любого $r > 0$ существует такое $R_m > 0$, что при п.в. $t \in [a, b]$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$, удовлетворяющих условию $|x| + |z| + |u| \leqslant r$, имеют место неравенства $|f_m(t, x, z, u)| \leqslant R_m$, $|g_m(t, x, u)| \leqslant R_m$.

Рассмотрим последовательность управляемых систем

$$f_m\big(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\big) = 0, \quad x(a) = A_m^0, \tag{6.1}$$

$$u(t) \in U(t), \quad g_m\big(t, x(t), u(t)\big) \in V_m(t), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

$$\dot{x}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a, b]. \tag{6.3}$$

Пусть для некоторой пары функций $(x^0, u^0) \in AC_\infty([a, b], \Omega) \times L_\infty([a, b], U)$ имеют место соотношения

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \big| f_m\big(t, x^0(t), \dot{x}^0(t), u^0(t)\big) \big| \to 0, \quad A_m^0 \to x^0(a),$$

$$H_m(t) = \Big(\bigcap_{x \in D(t)} g_m\big(t, x, U(t)\big) \Big) \bigcap V_m(t) \neq \varnothing,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\Big(g_m\big(t, x^0(t), u^0(t)\big),\, H_m(t) \Big) \to 0. \tag{6.4}$$

Получим условия, обеспечивающие существование при любом натуральном m такого решения $(x_m, u_m) \in AC_\infty([a, b], \Omega) \times L_\infty([a, b], U)$ управляемой системы (6.1), (6.2), (6.3), что последовательность (x_m, u_m) сходится к (x^0, u^0) в пространстве $AC_\infty([a, b], \Omega) \times L_\infty([a, b], U)$.

Как и в теореме 4, обозначаем $D(t) = B_{\mathbb{R}^n}(x^0(t), \sigma)$, $\sigma > 0$.

Теорема 5. *Пусть существуют такие положительные числа* α_1, α_2 *и неотрицательные числа* β_{11}, β_{12}, β_{21}, *что при п.в.* $t \in [a, b]$ *и любых* $x \in D^0(t)$, $u \in U(t)$, $z \in \Omega(t)$, $m = 1, 2, \ldots$ *выполнены условия: отображения* $f_m(t, x, \cdot, u) : \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$, $g_m(t, x, \cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ *условно накрывающие с константами* α_1, α_2 *соответственно; отображения*

$$f_m(t, \cdot, z, u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_1}, \quad f_m(t, x, z, \cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}, \quad g_m(t, \cdot, u) : D(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$$

липшицевы с константами $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}$ *и имеет место включение* $0 \in f_m(t,\, x,\, \Omega(t),\, u)$.

Тогда если справедливы соотношения (6.4), *то для всех достаточно больших значений* m *управляемая система* (6.1), (6.2), (6.3) *разрешима на отрезке* $[a, b]$ *и найдется такое решение* $(x_m, u_m) \in AC_\infty([a, b], \Omega) \times L_\infty([a, b], U)$, *что имеет место сходимость* $(x_m, u_m) \to (x^0, u^0)$ (*в пространстве* $AC_\infty([a, b], \Omega) \times L_\infty([a, b], U)$).

Сформулированное утверждение может быть получено из общей теоремы 2 о корректности системы операторных уравнений. Мы приведем доказательство, основанное на теореме 4 — признаке разрешимости управляемой системы (5.1), (5.2), (5.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\tau = 2^{-1}(\beta_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)^{-1}\alpha_1\alpha_2$. Это значение τ удовлетворяет условию (5.13), следовательно, для заданной равенством (2.3) матрицы C и любого $\varepsilon \in (0, 1 - \varrho(C))$ можно определить монотонную норму $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы $|C| \leqslant \varrho(C) + \varepsilon < 1$.

Для произвольного $\epsilon \in (0,1)$ определим натуральное число M так, чтобы при всех $m > M$ выполнялись неравенства

$$\Big|\Big(\frac{\phi_{1\,m}}{\alpha_1}, \frac{\phi_{2\,m}}{\alpha_2}\Big)\Big| \leqslant \frac{(1-\varrho(C)-\varepsilon)\sigma\epsilon}{2(b-a)}, \quad |A^0_m - x^0(a)| \leqslant \frac{\sigma\epsilon}{2},$$

где $\phi_{1\,m} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,\,b]} \big|f_m\big(t, x^0(t), \dot x^0(t), u^0(t)\big)\big|$, $\phi_{2\,m} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,\,b]} \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(g_m\big(t, x^0(t), u^0(t)\big),\, H_m(t)\big)$. Найдем наименьшее натуральное J, удовлетворяющее неравенству $\tau J \geqslant b-a$. Решение системы (6.1), (6.2), (6.3) будем строить последовательно на промежутках

$$[a, a+\tau],\ [a+\tau, a+2\tau],\ \ldots,\ [a+\tau(J-1), b].$$

Согласно теореме 4 и следствию 5, существует решение (x_m, u_m) на $[a, a+\tau]$ «вспомогательной» задачи управления — системы интегральных уравнений

$$f_m\Big(t,\, \Pi\big(t, A^0_m + \int_a^t \dot x(s)\,ds\big),\, \dot x(t),\, u(t)\Big) = 0, \quad g_m\Big(t,\, \Pi\big(t, A^0_m + \int_a^t \dot x(s)\,ds\big),\, u(t)\Big) = \eta_m(t), \tag{6.5}$$

где отображение Π определено формулой (5.6), а функция η_m является измеримым селектором многозначного отображения H_m, реализующим расстояние $\varrho_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(g_m\big(t, x^0(t), u^0(t)\big),\, H_m(t)\big)$. Пара (x_m, u_m) является решением системы (6.1), (6.2), (6.3) на таком отрезке $[a, a+\tau_0] \subset [a, a+\tau]$, где $x_m(t) \in D(t)$. Эта пара функций удовлетворяет оценке

$$\big|\big(\dot x_m(t) - \dot x^0(t),\, u(t)_m - u^0(t)\big)\big| \leqslant \frac{1}{1-\varrho(C)-\varepsilon}\cdot\Big|\Big(\frac{\phi_{1\,m}}{\alpha_1}, \frac{\phi_{2\,m}}{\alpha_2}\Big)\Big| \leqslant \frac{\sigma}{2(b-a)}. \tag{6.6}$$

Вследствие монотонности нормы $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^2$ получаем $|\dot x(t) - \dot x^0(t)| \leqslant 2^{-1}(b-a)^{-1}\sigma$. Следовательно, при всех $t \in [a, a+\tau]$ выполнено $|x_m(t) - x^0_m(t)| \leqslant 2^{-1}\sigma + 2^{-1}(b-a)^{-1}\sigma\tau \leqslant \sigma$, то есть $x_m(t) \in D(t)$. Таким образом, данная пара функций является решением системы (6.1), (6.2), (6.3) на всем отрезке $[a, a+\tau]$.

Для нахождения продолжения полученного решения рассмотрим задачу управления при $t \in [a+\tau,\, a+2\tau]$, выбрав «последнее» значение $x_m(a+\tau)$ определенной выше функции в качестве начального. Тогда снова, согласно теореме 4 и следствию 5, существует решение (x_m, u_m) на $[a+\tau,\, a+2\tau]$ системы (6.5), которое является решением исходной системы (6.1), (6.2), (6.3) на том отрезке $[a+\tau,\, a+\tau+\tau_0] \subset [a+\tau,\, a+2\tau]$, где $x_m(t) \in D(t)$. Для этой пары функций имеет место оценка (6.6), из которой вследствие монотонности нормы $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^2$ получаем неравенство $|\dot x(t) - \dot x^0(t)| \leqslant 2^{-1}(b-a)^{-1}\sigma$. Следовательно, при всех $t \in [a+\tau,\, a+2\tau]$ выполнено

$$|x_m(t) - x^0_m(t)| \leqslant 2^{-1}\sigma + 2^{-1}(b-a)^{-1}\sigma\tau + 2^{-1}(b-a)^{-1}\sigma\tau = 2^{-1}\sigma\big(1 + 2\tau(b-a)^{-1}\big) \leqslant \sigma.$$

Итак, $x_m(t) \in D(t)$, и данная пара функций является решением системы (6.1), (6.2), (6.3) на всем отрезке $[a+\tau,\, a+2\tau]$.

Аналогично доказывается, что на каждом следующем промежутке, вплоть до последнего $[a+\tau(J-1), b]$, существует решение (x_m, u_m) системы (6.5), которое является решением управляемой системы (6.1), (6.2), (6.3).

На каждом из рассмотренных отрезков $I_j = [a+\tau(j-1), a+\tau j]$, $j = 1, 2, \ldots, J$, пара (x_m, u_m) удовлетворяет неравенству

$$\Big|\Big(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in I_j} |\dot x_m(t) - \dot x^0(t)|,\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in I_j} |u_m(t) - u^0(t)|\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{1-\varrho(C)-\varepsilon}\cdot\Big|\Big(\frac{\phi_1}{\alpha_1}, \frac{\phi_2}{\alpha_2}\Big)\Big|,$$

следовательно, на всем $[a, b]$ — неравенству

$$\Big|\Big(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |\dot x_m(t) - \dot x^0(t)|,\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |u_m(t) - u^0(t)|\Big)\Big| \leqslant \frac{2}{1-\varrho(C)-\varepsilon}\cdot\Big|\Big(\frac{\phi_1}{\alpha_1}, \frac{\phi_2}{\alpha_2}\Big)\Big|.$$

Отсюда, в силу соотношений (6.4), получаем сходимость $(x_m, u_m) \to (x^0, u^0)$ в пространстве $AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим при $t \in [0,1]$ последовательность управляемых систем вида

$$\begin{gathered}\big(\dot{x}(t)\big)^{1/3} + \big(x(t)\big)^2 + u(t) = q_m(t), \quad x(0) = A_m^0, \quad |u(t)| \exp|x(t)| \in V_m(t), \quad m = 1, 2, \ldots, \\ \dot{x}(t) \in \Omega(t) \doteq [-2, 2], \quad u(t) \in U(t) \doteq [-t, t].\end{gathered} \tag{6.7}$$

Будем предполагать, что функции $q_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ существенно ограничены и $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} |q_m(t)| \to 0$ при $m \to \infty$. Пусть, далее, $A_m^0 \to 0$; отображения $V_m : [0,1] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$ измеримы, удовлетворяют соотношению $V_m(t) \bigcap [0,t] \neq \emptyset$, $t \in [0,1]$, и имеет место сходимость $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \varrho_{\mathbb{R}}\big(V_m(t)\big) \to 0$. Покажем, что для системы (6.7) выполнены предположения теоремы 5.

В рассматриваемом примере $x^0(t) \equiv 0$, $u^0(t) \equiv 0$, $f_m(t,x,z,u) = (z)^{1/3} + (x)^2 + u - q_m(t)$, $g_m(t,x,u) = |u| \exp|x|$, $D(t) \equiv [-\sigma, \sigma]$. При любых $t \in [0,1]$, $x \in D(t)$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$ выполнено (см., пример 1): $f_m(t,x,\cdot,u)$ является условно $3^{-1}4^{-1/3}$-накрывающим; $f_m(t,\cdot,z,u)$ является 2σ-липшицевым, $f_m(t,x,z,\cdot)$ является 1-липшицевым; $g_m(t,x,\cdot)$ является условно 1-накрывающим; $g_m(t,\cdot,u)$ является 1-липшицевым; имеет место соотношение

$$f_m(t,x,\Omega(t),u) = [-2^{1/3}+x^2+u-q_m(t),\, 2^{1/3}+x^2+u-q_m(t)] \supset [-2^{1/3}+\sigma^2+t-q_m(t),\, 2^{1/3}-t-q_m(t)].$$

Следовательно, при достаточно малом $\sigma > 0$ и при всех достаточно больших m это множество непусто и $0 \in f_m(t,x,\Omega(t),u)$.

В заключение проверим соотношения (6.4). Для множества $H_m(t)$ имеем

$$H_m(t) = \Big(\bigcap_{x\in D(t)} g_m\big(t,x,U(t)\big)\Big) \bigcap V_m(t) = \Big(\bigcap_{x\in[0,\sigma]} [0,t]\cdot \exp x\Big) \bigcap V_m(t) = [0,t] \bigcap V_m(t) \neq \emptyset.$$

Далее, $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \big|f_m\big(t,x^0(t),\dot{x}^0(t),u^0(t)\big)\big| = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \big|q_m(t)\big| \to 0,$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \varrho_{\mathbb{R}}\big(g_m\big(t,x^0(t),u^0(t)\big),\, H_m(t)\big) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \varrho_{\mathbb{R}}\big(V_m(t)\big) \to 0.$$

Итак, все предположения теоремы 5 выполнены, поэтому для всех достаточно больших значений m управляемая система (6.7) разрешима на всем $[0,1]$ и существует такое ее решение $(x_m, u_m) \in AC_\infty([0,1],\Omega) \times L_\infty([0,1],U)$, что имеют место соотношения

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} |\dot{x}_m(t)| \to 0, \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} |u_m(t)| \to 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
3. Писаренко Г.С., Кравчук Л.В., Писаренко В.Г. Космические исследования на Украине и космофизические аспекты проблемы объединения фундаментальных полей // Космические исследования на Украине. Киев: Наукова думка, 1983. Вып. 17. С. 3–20.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: ГИФМЛ, 1959. 916 с.
5. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
6. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. Vol. 90. № 6. P. 889–898.

8. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.
9. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. О применении накрывающих отображений при исследовании управляемых систем // Тезисы докладов XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Конференция Пятницкого). М. 2012. С. 128–129.
10. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Теорема о накрывании операторов в произведении метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 1. С. 70–72.
11. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.
12. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
13. Mordukhovich B.S., Wang B. Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Inter. J. Maths. Math. Science. 2004. Vol. 50. P. 2650–2683.
14. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. 456 с.
15. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.
16. Арутюнов А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 163–169.
17. Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskii S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. Vol. 75. Issue 3. P. 1026–1044.
18. Плужникова Е.А. О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1686–1687.
19. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. М.: СМБ, 1968. 448 с.
20. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011. 224 с.
21. Himmelberg C.J., Van Vleck F.S. Lipschitzian generalized differential equations // Rend. Sem. Mat. Padova. 1972. Vol. 48. P. 159–169.

Поступила в редакцию 19.04.2013

Плужникова Елена Александровна, аспирант, кафедра алгебры и геометрии, Институт математики, физики и информатики, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

E. A. Pluzhnikova
Well-posed solvability of control problems for systems of implicit differential equations

Keywords: covering mappings, metric spaces, implicit differential equations, well-posed solvability, controlled systems.

Mathematical Subject Classifications: 34A09, 34H05, 47J05

Theorems on solvability, estimates of solutions, and well-posed solvability of equations with covering mappings in the product of metric spaces are formulated. Conditions for the Nemytskii operator to be a covering operator in functional spaces are considered. Statements about covering mappings are applied to studying the controlled systems described by ordinary differential equations unsolved for the derivative. For controlled differential systems with mixed constraints on control and an additional constraint on the solution's derivative, conditions of solvability are received as well as solutions' estimates, the question of continuous dependence of solutions on parameters is investigated.

REFERENCES

1. Hartman Ph. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary differential equations), Moscow: Mir, 1970, 720 p.

2. Donchev A. *Sistemy optimal'nogo upravleniya. Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti* (Systems of optimal control. Perturbations, approximations and sensitivity analysis), Moscow: Mir, 1987, 156 p.

3. Pisarenko G.S., Kravchuk L.V., Pisarenko V.G. Space researches in Ukraine and cosmophysical aspects of the problem of integrating the fundamental fields, *Space Researches in Ukraine*, Kiev: Naukova Dumka, 1983, vol. 17, pp. 3–20.

4. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. *Teoriya kolebanii* (Oscillations theory), Moscow: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1959, 916 p.

5. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S. Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 613–634.

6. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1523–1537.

7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Existence of local solutions in constrained dynamic systems, *Applicable Analysis*, 2011, vol. 90, no. 6, pp. 889–898.

8. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Local solvability of control systems with mixed constraints, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 11, pp. 1561–1570.

9. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. On application of covering mappings at research of controlled systems, *XII International conference «Stability and oscillations of nonlinear control systems» (Pyatnitskiy conference)*, Russian Academy of Sciences, Moscow, 2012, pp. 128–129.

10. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. A theorem on operator covering in the product of metric spaces, *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2011, vol. 16, issue 1, pp. 70–72.

11. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Covering mappings in the product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 4, pp. 439–455.

12. Arutyunov A.V. Covering mappings in metric spaces and fixed points, *Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk*, 2007, vol. 416, no. 2, pp. 151–155.

13. Mordukhovich B.S., Wang B. Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces, *Inter. J. Maths. Math. Science*, 2004, vol. 50, pp. 2650–2683.

14. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* (Approximate solution of the operator equations), Moscow, 1969, 456 p.

15. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. On one method of research of boundary value problems solvability for differential equations, *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2010, vol. 15, issue 6, pp. 1673–1674.

16. Arutyunov A.V. Stability of coincidence points and properties of covering mappings, *Mat. Zametki*, 2009, vol. 86, issue 2, pp. 163–169.

17. Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2012, vol. 75, issue 3, pp. 1026–1044.

18. Pluzhnikova E.A. On covering Nemytskii's operator in the space of summable functions, *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2010, vol. 15, issue 6, pp. 1686–1687.

19. Zabreiko P.P., Koshelev A.I., Krasnosel'skii M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stetsenko V.Ya. *Integral'nye uravneniya* (Integral equations), Moscow, 1968, 448 p.

20. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* (Introduction to the theory of multi-valued maps and differential inclusions), Moscow: Librokom, 2011, 224 p.

21. Himmelberg C.J., Van Vleck F.S. Lipschitzian generalized differential equations, *Rend. Sem. Mat. Padova*, 1972, vol. 48, pp. 159–169.

Received 19.04.2013

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, post-graduate student, Department of Algebra and Geometry, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru