МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 3

УДК 517.977

© *Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов*

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С НЕТЕРМИНАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ В КЛАССАХ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ [1]

Рассматривается антагонистическая линейно-выпуклая дифференциальная игра с показателем качества, оценивающим совокупность отклонений траектории движения в наперед заданные моменты времени от заданных целевых точек. Исследуется случай, когда не выполняется условие седловой точки в маленькой игре, также известное как условие Айзекса. Игра формализуется в классах смешанных стратегий управления игроков. Описывается численный метод для приближенного вычисления цены игры и построения оптимальных стратегий. Метод основывается на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. Приводятся результаты численных экспериментов на модельных примерах.

Ключевые слова: дифференциальные игры, цена игры, седловая точка, смешанные стратегии.

Введение

В статье в рамках теоретико-игрового подхода [1–9] рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой динамическая система, подверженная управляющим воздействиям первого и второго игроков, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, линейными по фазовому вектору. Воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления оценивает норму совокупности отклонений траектории движения в наперед заданные моменты времени от заданных целевых точек. В случае когда выполняется условие седловой точки в маленькой игре [2], известное также как условие Айзекса [3], эта игра имеет цену и седловую точку в классах чистых позиционных стратегий управления игроков [4]. Для нахождения такой функции цены игры в [8, 9] была предложена процедура, базирующаяся на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из метода стохастического программного синтеза [2]. В [10] на основе этой процедуры и правила экстремального сдвига [2, 4] был разработан численный метод решения данной игры в этом случае.

Настоящая статья посвящена случаю, когда условие седловой точки в маленькой игре может быть не выполнено. Тогда в рассматриваемой дифференциальной игре цена и седловая точка существуют в классах стратегии–контрстратегии [2], а также в классах смешанных стратегий [4–6]. Применимость методов из [8–10] для решения игры в классах стратегии–контрстратегии обоснована в [11]. Ниже показывается, что после введения вспомогательной системы-поводыря методы из [8–10] также оказываются применимы и для решения игры в классах смешанных стратегий. При построении оптимальных стратегий управления игроков правило экстремального сдвига обеспечивает необходимые гарантии качества управления поводырем, близость движений исходной системы и поводыря достигается при помощи конструкций из [12, 13]. Обсуждается программная реализация развиваемого численного метода, приводятся результаты компьютерного моделирования.

[1]Работа выполнена в рамках программы АВЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем», а также при поддержке РФФИ (12–01–00290-а) и программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ–5927.2012.1).

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим *дифференциальную игру* [2, 4, 5], описываемую *уравнением движения*

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + f\big(t, u, v\big), \quad t_0 \leqslant t < \vartheta, \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad v \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

с *начальным условием*

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

и *показателем качества*

$$\gamma = \mu_1\Big(D_1\big(x(\vartheta_1) - c_1\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big). \tag{1.3}$$

Здесь x — фазовый вектор; t — время; точка над символом обозначает производную по времени; $A(t)$ и $f(t,u,v)$ — непрерывные по совокупности переменных матрица-функция и вектор-функция; u и v — *управляющие воздействия первого и второго игроков*; *начальный* и *терминальный* моменты времени t_0 и ϑ зафиксированы; множества $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ компактны; $\vartheta_i \in (t_0, \vartheta]$: $\vartheta_{i+1} > \vartheta_i$, $i = 1, \ldots, N-1$, $\vartheta_N = \vartheta$, — заданные *моменты времени оценки качества движения*; D_i — постоянные матрицы размерности $d_i \times n$ $(1 \leqslant d_i \leqslant n)$; $c_i \in \mathbb{R}^n$ — *целевые векторы*; $\mu_1(g_1, \ldots, g_N)$ — норма в пространстве $(d_1 + \ldots + d_N)$-мерных векторов-наборов $(g_1, \ldots, g_N)$, составленных из d_i-мерных векторов g_i, $i = 1, \ldots, N$.

Предполагается, что существуют нормы $\mu_i\big(g_i, \ldots, g_N\big)$ и $\sigma_i(g_i, \mu)$, для которых справедливы равенства

$$\mu_i(g_i, \ldots, g_N) = \sigma_i(g_i, \mu), \quad \mu = \mu_{i+1}(g_{i+1}, \ldots, g_N), \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.4}$$

Тогда [9] показатель качества γ является *позиционным* [4, с. 43].

Допустимы измеримые (по Борелю) *реализации управлений игроков*

$$u(\cdot) = \big\{u(t) \in \mathbb{U},\ t_0 \leqslant t < \vartheta\big\}, \qquad v(\cdot) = \big\{v(t) \in \mathbb{V},\ t_0 \leqslant t < \vartheta\big\}.$$

Под *движением* $x(\cdot)$, порожденным такими реализациями, понимаем удовлетворяющую начальному условию (1.2) абсолютно непрерывную функцию $\big\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\big\}$, которая вместе с $u = u(t)$ и $v = v(t)$ при почти всех t удовлетворяет уравнению (1.1).

Цель первого игрока — доставить показателю (1.3) как можно меньшее значение. Цель второго противоположна.

Подчеркнем, что на систему (1.1) не накладывается *условие седловой точки в маленькой игре*, то есть могут существовать такие вектор $l^* \in \mathbb{R}^n$ и момент времени $t^* \in [t_0, \vartheta]$, что

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle l^*, f(t^*, u, v)\rangle \neq \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle l^*, f(t^*, u, v)\rangle,$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов. В этом случае дифференциальная игра (1.1)–(1.3) может не иметь цены в классах чистых позиционных стратегий $u(t, x, \varepsilon)$, $v(t, x, \varepsilon)$ [2], информационным образом для которых служит пара $\big\{t,\ x = x(t)\big\}$, составляющая текущую *позицию игры*. Поэтому имеет смысл рассматривать формализацию игры в классах *смешанных стратегий* [4, 5].

Поскольку компакты $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ могут быть приближены конечными множествами (см., например, [4]), то далее предполагается, что $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ конечны изначально:

$$\mathbb{U} = \{u^{[r]} \in \mathbb{R}^{n_u} : r = 1, \ldots, L\}, \qquad \mathbb{V} = \{v^{[s]} \in \mathbb{R}^{n_v} : s = 1, \ldots, M\}.$$

Положим

$$\mathbb{P} = \big\{p = (p_1, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L : p_r \geqslant 0,\ r = 1, \ldots, L,\ \sum_{r=1}^{L} p_r = 1\big\},$$

$$\mathbb{Q} = \big\{q = (q_1, \ldots, q_M) \in \mathbb{R}^M : q_s \geqslant 0,\ s = 1, \ldots, M,\ \sum_{s=1}^{M} q_s = 1\big\}.$$

Следуя конструкциям из [4, 5], опишем дифференциальную игру (1.1)–(1.3) в смешанных стратегиях с точки зрения первого игрока. Наряду с исходным *x-объектом* (1.1) рассмотрим вспомогательную *y-модель* с фазовым вектором $y \in \mathbb{R}^n$, которая в процессе формирования управления первого игрока будет играть роль *поводыря* [1, с. 248]. Движение y-модели описывается уравнением

$$\dot{y} = A(t)y + \sum_{r=1}^{L}\sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]})p_r^* q_s^*, \quad t_0 \leqslant t < \vartheta, \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad p^* \in \mathbb{P}, \quad q^* \in \mathbb{Q}. \qquad (1.5)$$

Смешанной стратегией S^u первого игрока назовем тройку $\big\{p_u(\cdot),\ p_u^*(\cdot),\ q_u^*(\cdot)\big\}$ функций

$$p_u = p_u(t, x, y, \varepsilon) \in \mathbb{P}, \quad p_u^* = p_u^*(t, x, y, \varepsilon) \in \mathbb{P}, \quad q_u^* = q_u^*(t, x, y, \varepsilon) \in \mathbb{Q},$$
$$t \in [t_0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0,$$

которые при фиксированных t и ε измеримы по x, y. Величина ε является *параметром точности*, значение которого выбирается игроком в момент начала процесса управления, остается в ходе этого процесса постоянным и определяет точность решения задачи.

В рамках формализации дифференциальной игры (1.1)–(1.3) в классах смешанных стратегий игроки формируют реализации управлений, используя вероятностные механизмы. Будем предполагать, что в основу дальнейших построений положено достаточно богатое вероятностное пространство $\Pi = \{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, где $\Omega = \{\omega\}$ — множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра для этого множества, $P = P(B)$, $B \in \mathcal{F}$, — вероятностная мера. Пояснения относительно формального построения подходящего пространства Π приведены, например, в [7, с. 16–17], [6] и [4, с. 250–254].

Законом управления $\mathcal{U}$ первого игрока назовем тройку $\big\{S^u,\ \varepsilon,\ \Delta_\delta\big\}$, где Δ_δ — разбиение отрезка времени $[t_0, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j \leqslant \delta,\ j = 0, \ldots, k-1,\ t_k = \vartheta\}. \qquad (1.6)$$

Из заданных позиций $\{t_0, x_0\}$ x-объекта и $\{t_0, y_0\}$ y-модели закон управления $\mathcal{U}$ в паре с допустимой случайной реализацией $v_\omega(\cdot) = \big\{v_\omega(t) \in \mathbb{V},\ t_0 \leqslant t < \vartheta,\ \omega \in \Omega\big\}$ управления второго игрока порождает случайное движение $\{x_\omega(\cdot), y_\omega(\cdot)\}$ комплекса $\{x$-объект, y-модель$\}$, которое определяется как решение следующих пошаговых уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + f\big(t, u_\omega^{(j)}, v_\omega(t)\big),\\ \dot{y}_\omega(t) = A(t)y_\omega(t) + \sum_{r=1}^{L}\sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]})p_{ur}^*\big(t_j, x_\omega(t_j), y_\omega(t_j), \varepsilon\big)q_{us}^*\big(t_j, x_\omega(t_j), y_\omega(t_j), \varepsilon\big),\\ x_\omega(t_0) = x_0, \quad y_\omega(t_0) = y_0, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, k-1,\end{gathered} \qquad (1.7)$$

где значение $u_\omega^{(j)} \in \mathbb{U}$ определяется в результате случайного испытания при условии

$$P\Big(u_\omega^{(j)} = u^{[r]} \mid x_\omega(t_j),\ y_\omega(t_j)\Big) = p_{ur}\big(t_j, x_\omega(t_j), y_\omega(t_j), \varepsilon\big).$$

Здесь и далее символ $P(\,\ldots \mid \ldots\,)$ обозначает условную вероятность. Кроме того, предполагается, что на каждом шаге $t_j \leqslant t < t_{j+1}$ случайная реализация $v_\omega(\cdot)$ является стохастически независимой от получаемой реализации $u_\omega(\cdot) = \big\{u_\omega(t) = u_\omega^{(j)},\ t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 0, \ldots, k-1,\ \omega \in \Omega\big\}$:

$$P\Big(v_\omega(t) \in B \mid x_\omega(t_j),\ y_\omega(t_j),\ u_\omega(t_j)\Big) = P\Big(v_\omega(t) \in B \mid x_\omega(t_j),\ y_\omega(t_j)\Big)$$

для любого подмножества $B \subset \mathbb{V}$.

Гарантированным результатом закона управления $\mathcal{U}$ для фиксированных позиций $\{t_0, x_0\}$ и $\{t_0, y_0\}$ и числа $0 < \beta < 1$ называют величину

$$\rho(\mathcal{U}; t_0, x_0, y_0; \beta) = \sup_{v_\omega(\cdot)} \min \big\{ \alpha \in \mathbb{R} \bigm| P\big(\gamma(x_\omega(\cdot)) \leqslant \alpha\big) \geqslant \beta \big\}. \tag{1.8}$$

Гарантированным результатом стратегии S^u для фиксированной исходной позиции $\{t_0, x_0\}$ будет величина

$$\rho(S^u; t_0, x_0) = \lim_{\beta \to 1} \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \lim_{\eta \to 0} \sup_{|x_0 - y_0| \leqslant \eta} \lim_{\delta \to 0} \sup_{\Delta_\delta} \rho(\mathcal{U} = \{S^u, \varepsilon, \Delta_\delta\}; t_0, x_0, y_0; \beta).$$

Стратегию S_0^u называют *оптимальной*, если справедливо равенство

$$\rho(S_0^u; t_0, x_0) = \min_{S^u} \rho(S^u; t_0, x_0) = \rho_u^0(t_0, x_0).$$

Величина $\rho_u^0(t_0, x_0)$ называется *оптимальным гарантированным результатом первого игрока.*

Закон управления $\mathcal{U}$ назовем (ζ, β)*-оптимальным*, если

$$\rho(\mathcal{U}; t_0, x_0, y_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho_u^0(t_0, x_0) + \zeta. \tag{1.9}$$

Аналогичным образом, рассматривая дифференциальную игру (1.1)–(1.3) за второго игрока, вводим вспомогательную *z-модель*, движение которой описывается уравнением

$$\dot{z} = A(t)z + \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r^* q_s^*, \quad t_0 \leqslant t < \vartheta, \quad z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n, \quad p^* \in \mathbb{P}, \quad q^* \in \mathbb{Q}. \tag{1.10}$$

Смешанной стратегией S^v *второго игрока* называем тройку $\big\{q_v(\cdot),\, p_v^*(\cdot),\, q_v^*(\cdot)\big\}$ функций

$$q_v = q_v(t, x, z, \varepsilon) \in \mathbb{Q}, \quad p_v^* = p_v^*(t, x, z, \varepsilon) \in \mathbb{P}, \quad q_v^* = q_v^*(t, x, z, \varepsilon) \in \mathbb{Q},$$
$$t \in [t_0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0,$$

которые при фиксированных t и ε измеримы по x, z.

Закон управления $\mathcal{V}$ *второго игрока* определяется тройкой $\big\{S^v,\, \varepsilon,\, \Delta_\delta\big\}$. Из заданных позиций $\{t_0, x_0\}$ x-объекта и $\{t_0, z_0\}$ z-модели, при допустимой случайной реализации $u(\cdot) = \big\{u_\omega(t) \in \mathbb{U},\ t_0 \leqslant t < \vartheta,\ \omega \in \Omega\big\}$ управления первого игрока, закон управления $\mathcal{V}$ порождает случайное движение $\{x_\omega(\cdot), z_\omega(\cdot)\}$ комплекса $\{x$-модель, z-объект$\}$, которое определяется как решение пошаговых уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + f\big(t, u_\omega(t), v_\omega^{(j)}\big), \\
\dot{z}_\omega(t) = A(t)z_\omega(t) + \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_{vr}^*\big(t_j, x_\omega(t_j), z_\omega(t_j), \varepsilon\big) q_{vs}^*\big(t_j, x_\omega(t_j), z_\omega(t_j), \varepsilon\big), \\
x_\omega(t_0) = x_0, \quad z_\omega(t_0) = z_0, \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, k-1,
\end{gathered} \tag{1.11}$$

где значение $v_\omega^{(j)} \in \mathbb{V}$ определяется в результате случайного испытания при условии

$$P\Big(v_\omega^{(j)} = v^{[s]} \mid x_\omega(t_j),\ z_\omega(t_j)\Big) = q_{vs}\big(t_j, x_\omega(t_j), z_\omega(t_j), \varepsilon\big).$$

При этом предполагается, что случайная реализация $u_\omega(\cdot)$ является стохастически независимой от получаемой реализации $v_\omega(\cdot) = \big\{v_\omega(t) = v_\omega^{(j)},\ t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 0, \ldots, k-1,\ \omega \in \Omega\big\}$:

$$P\Big(u_\omega(t) \in B \mid x_\omega(t_j),\ z_\omega(t_j),\ v_\omega(t_j)\Big) = P\Big(u_\omega(t) \in B \mid x_\omega(t_j),\ z_\omega(t_j)\Big), \quad t_j \leqslant t < t_{j+1},$$

для любого подмножества $B \subset \mathbb{U}$.

Гарантированным результатом закона управления $\mathcal{V}$ при фиксированных $\{t_0, x_0\}$, $\{t_0, z_0\}$ и $0 < \beta < 1$ называют величину

$$\rho(\mathcal{V}; t_0, x_0, z_0; \beta) = \inf_{u_\omega(\cdot)} \max\big\{\alpha \in \mathbb{R} \;\big|\; P\big(\gamma(x_\omega(\cdot)) \geqslant \alpha\big) \geqslant \beta\big\}. \tag{1.12}$$

Заметим, что в согласии с определениями (1.8) и (1.12) для любых допустимых смешанных законов управления $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, при любых значениях $0{,}5 < \beta < 1$ справедливо неравенство

$$\rho(\mathcal{U}; t_0, x_0, y_0; \beta) \geqslant \rho(\mathcal{V}; t_0, x_0, z_0 = y_0; \beta). \tag{1.13}$$

Гарантированным результатом стратегии S^v будет

$$\rho(S^v; t_0, x_0) = \lim_{\beta \to 1} \varliminf_{\varepsilon \to 0} \lim_{\eta \to 0} \inf_{|x_0 - z_0| \leqslant \eta} \lim_{\delta \to 0} \inf_{\Delta_\delta} \rho(\mathcal{V} = \{S^v, \varepsilon, \Delta_\delta\}; t_0, x_0, z_0; \beta).$$

Стратегию S_0^v называют *оптимальной*, если

$$\rho(S_0^v; t_0, x_0) = \max_{S^v} \rho(S^v; t_0, x_0) = \rho_v^0(t_0, x_0).$$

Величина $\rho_v^0(t_0, x_0)$ — *оптимальный гарантированный результат второго игрока.*

Закон управления $\mathcal{V}$ назовем (ζ, β)-*оптимальным*, если

$$\rho(\mathcal{V}; t_0, x_0, z_0 = x_0; \beta) \geqslant \rho_v^0(t_0, x_0) - \zeta. \tag{1.14}$$

Известно [4, с. 257], что дифференциальная игра (1.1)–(1.3) имеет *цену*

$$\rho(t_0, x_0) = \rho_u^0(t_0, x_0) = \rho_v^0(t_0, x_0) \tag{1.15}$$

и *седловую точку* $\{S_0^u, S_0^v\}$ в классах смешанных стратегий.

Цель данной работы — разработка численного метода для нахождения цены $\rho(t_0, x_0)$ и построения (ζ, β)-оптимальных законов управления игроков.

§ 2. Вспомогательная дифференциальная игра

Рассмотрим дифференциальную игру для y-модели (1.5) с показателем качества вида (1.3):

$$\gamma_y = \mu_1\Big(D_1\big(y(\vartheta_1) - c_1\big), \ldots, D_N\big(y(\vartheta_N) - c_N\big)\Big). \tag{2.1}$$

В этой вспомогательной игре p^* трактуется как управляющее воздействие первого игрока, нацеленного минимизировать показатель (2.1), а q^* — как управляющее воздействие второго, нацеленного максимизировать этот показатель.

Система (1.5) удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре, поэтому вспомогательная игра (1.5), (2.1) имеет цену $\rho^*(t_0, y_0)$ и седловую точку $\{p_0^*(t, y, \varepsilon), q_0^*(t, y, \varepsilon)\}$ в классах чистых позиционных стратегий [2, с. 228–234]. Согласно [8, 9], цена $\rho^*(t_0, y_0)$ может быть приближенно вычислена по следующей процедуре. Процедура базируется на разбиении Δ_δ вида (1.6), в которое включаем все моменты ϑ_i оценки качества движения из показателя (2.1).

Обозначим

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \vartheta_1, \\ \max\{i = 1, \ldots, N \,|\, \vartheta_i \leqslant t\}, & \text{если иначе,} \end{cases}$$

$$\Delta\psi_j(m) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \max_{q^* \in \mathbb{Q}} \min_{p^* \in \mathbb{P}} \Big\langle m,\ \Psi[\vartheta, t] \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r^* q_s^* \Big\rangle\, dt, \tag{2.2}$$
$$m \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0, \ldots, k-1,$$

где $\Psi[\vartheta, t]$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Попятно по шагам разбиения Δ_δ определяем множества G_j векторов $m \in \mathbb{R}^n$ и скалярные функции $\varphi_j(m),\ m \in G_j,\ j = 0, \ldots, k$, по следующим рекуррентным соотношениям.

Для $j = k$

$$G_k = \{m = 0\}, \qquad \varphi_k(m) = 0,\ m \in G_k.$$

Для текущего j, в случае когда t_{j+1} не совпадает ни с одним из моментов ϑ_i оценки качества движения, то есть $h(t_j) = h(t_{j+1})$, обозначаем

$$G_j = G_{j+1}, \qquad \varphi^*_{j+1}(m) = \varphi_{j+1}(m),\ m \in G_j,$$

иначе, когда $t_{j+1} = \vartheta_h$, $h = h(t_j) + 1$, полагаем

$$G_j = \left\{ m = \nu m_* + \Psi^\top[\vartheta_h, \vartheta] D_h^\top l \;\middle|\; \begin{array}{l} \nu \geqslant 0,\ m_* \in G_{j+1}, \\ l \in \mathbb{R}^{d_h},\ \sigma_h^*(l, \nu) \leqslant 1 \end{array} \right\}, \tag{2.3}$$

$$\varphi^*_{j+1}(m) = \max_{m_*, \nu, l} \bigl[\nu \varphi_{j+1}(m_*) - \langle l, D_h c_h \rangle\bigr], \quad m \in G_j,$$

после чего определяем

$$\psi_j(m) = \Delta\psi_j(m) + \varphi^*_{j+1}(m), \quad \varphi_j(m) = \{\psi_j\}^*_{G_j}(m), \quad m \in G_j. \tag{2.4}$$

Здесь верхний индекс «$\top$» обозначает транспонирование; $\sigma_h^*(\cdot)$ — норма, сопряженная к $\sigma_h(\cdot)$ из (1.4); максимум вычисляется по всем таким $m_* \in G_{j+1}$, $\nu \geqslant 0$, $l \in \mathbb{R}^{d_h}$, $\sigma_h^*(l, \nu) \leqslant 1$, которые удовлетворяют равенству $m = \nu m_* + \Psi^\top[\vartheta_h, \vartheta] D_h^\top l$; символ $\{\psi_j\}^*_{G_j}$ обозначает выпуклую сверху оболочку функции ψ_j на множестве G_j, то есть минимальную из вогнутых функций, мажорирующих $\psi_j(m)$ при $m \in G_j$.

Рассмотрим величины

$$e_j(y) = \max_{m \in G_j} \bigl[\langle m, \Psi[\vartheta, t_j] y \rangle + \varphi_j(m)\bigr], \quad j = 0, \ldots, k, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Известно [9], что для всякого ограниченного множества $Y_0 \subset \mathbb{R}^n$ и числа $\xi > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения Δ_δ вида (1.6) будет выполняться неравенство

$$|\rho^*(t_0, y_0) - e_0(y_0)| \leqslant \xi, \quad y_0 \in Y_0. \tag{2.6}$$

Положим

$$\varepsilon(t) = \bigl(\varepsilon + \varepsilon(t - t_0)\bigr)^{1/2} \exp\bigl\{\lambda_A (t - t_0)\bigr\},\ \varepsilon > 0,\ t \in [t_0, \vartheta], \qquad \lambda_A = \sup_{t \in [t_0, \vartheta],\, \|x\| = 1} \|A(t)x\| < +\infty. \tag{2.7}$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

По системе величин (2.5) методом экстремального сдвига [2,4] определим функцию $p_u^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,; \Delta_\delta)$:

$$p_u^{*\mathrm{e}} = p_u^{*\mathrm{e}}(t, y, \varepsilon; \Delta_\delta) \in \mathop{\arg\min}_{p^* \in \mathbb{P}} \max_{q^* \in \mathbb{Q}} \Bigl\langle \frac{\Psi^\top[\vartheta, t] m_u}{\sqrt{1 + \|\Psi^\top[\vartheta, t] m_u\|^2}} \varepsilon(t),\ \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r^* q_s^* \Bigr\rangle, \tag{2.8}$$

где

$$m_u \in \mathop{\arg\max}_{m \in G_j} \Bigl[\langle m, \Psi[\vartheta, t] y \rangle + \varphi_j(m) - \varepsilon(t) \sqrt{1 + \|\Psi^\top[\vartheta, t] m\|^2}\Bigr],$$
$$t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 0, \ldots, k-1, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим во вспомогательной игре (1.5), (2.1) закон $\bigl\{p_u^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,; \Delta_\delta), \varepsilon, \Delta_\delta\bigr\}$, формирующий по шагам разбиения Δ_δ, на котором были построены величины (2.5), кусочно-постоянную реализацию управления первого игрока по правилу

$$p^*(t) = p_u^{*\mathrm{e}}\bigl(t_j, y(t_j), \varepsilon; \Delta_\delta\bigr), \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, k-1.$$

Согласно [10], данный закон управления является *ζ-оптимальным.* Это означает, что для всякого ограниченного множества $Y_0 \subset \mathbb{R}^n$ и любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_y^* > 0$ и функция $\delta_y(\varepsilon) > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_y^*$, что, каковы бы ни были $y_0 \in Y_0$, значение $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_y^*$ и разбиение Δ_δ, $\delta \leqslant \delta_y(\varepsilon)$, закон $\{p_u^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,;\Delta_\delta), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ будет гарантировать для y-модели неравенство

$$\gamma_y \leqslant \rho^*(t_0, y_0) + \zeta/2, \tag{2.9}$$

какова бы ни случилась измеримая реализация $q^*(\cdot) = \{q^*(t) \in \mathbb{Q},\ t_0 \leqslant t < \vartheta\}$.

С другой стороны, рассматривая идентичную дифференциальную игру для z-модели (1.10) и показателя γ_z вида (2.1), базируясь на величинах (2.5), определим функцию $q_v^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,;\Delta_\delta)$:

$$q_v^{*\mathrm{e}} = q_v^{*\mathrm{e}}(t, z, \varepsilon; \Delta_\delta) \in \operatorname*{arg\,max}_{q^* \in \mathbb{Q}} \min_{p^* \in \mathbb{P}} \Big\langle \frac{\Psi^\top[\vartheta, t] m_v}{\sqrt{1 + \|\Psi^\top[\vartheta, t] m_v\|^2}} \varepsilon(t),\ \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r^* q_s^* \Big\rangle, \tag{2.10}$$

где

$$m_v \in \operatorname*{arg\,max}_{m \in G_j} \Big[\langle m, \Psi[\vartheta, t] z\rangle + \varphi_j(m) + \varepsilon(t)\sqrt{1 + \|\Psi^\top[\vartheta, t] m\|^2}\Big],$$
$$t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 0, \ldots, k-1, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

и соответствующий закон $\{q_v^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,;\Delta_\delta), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, формирующий реализацию управления второго игрока по правилу

$$q^*(t) = q_v^{*\mathrm{e}}\big(t_j, z(t_j), \varepsilon; \Delta_\delta\big), \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, k-1.$$

Для всякого ограниченного множества $Z_0 \subset \mathbb{R}^n$ и любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_z^* > 0$ и функция $\delta_z(\varepsilon) > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_z^*$, что, каковы бы ни были $z_0 \in Z_0$, значение $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_z^*$ и разбиение Δ_δ, $\delta \leqslant \delta_z(\varepsilon)$, этот закон $\{q_v^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,;\Delta_\delta), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ будет гарантировать для z-модели неравенство

$$\gamma_z \geqslant \rho^*(t_0, z_0) - \zeta/2, \tag{2.11}$$

какова бы ни случилась измеримая реализация $p^*(\cdot) = \{p^*(t) \in \mathbb{P},\ t_0 \leqslant t < \vartheta\}$.

§ 3. Близость объекта и модели

В исходной дифференциальной игре (1.1)–(1.3) первый игрок, формируя случайное движение $\{x_\omega(\cdot), y_\omega(\cdot)\}$ комплекса $\{x$-объект, y-модель$\}$ (1.7), может обеспечить подходящую близость между $x_\omega(\cdot)$ и $y_\omega(\cdot)$ за счет должного выбора функций $p_u(\cdot)$ и $q_u^*(\cdot)$ в своей смешанной стратегии S^u. С другой стороны, за счет выбора $q_v(\cdot)$ и $p_v^*(\cdot)$ в смешанной стратегии S^v второй игрок может обеспечить близость $x_\omega(\cdot)$ и $z_\omega(\cdot)$ для соответствующего движения $\{x_\omega(\cdot), z_\omega(\cdot)\}$ комплекса $\{x$-объект, z-модель$\}$ (1.11). А именно, имеет место следующий результат [12, 13]. Обозначим

$$\lambda(t, x, y) = \|x - y\|^2 \exp\{-2\lambda_A(t - t_0)\},$$

где константа λ_A взята из (2.7).

Лемма 3.1. *Пусть в смешанной стратегии $S^u = \{p_u(\cdot), p_u^*(\cdot), q_u^*(\cdot)\}$ первого игрока функции $p_u = p_u(t, x, y, \varepsilon)$ и $q_u^* = q_u^*(t, x, y, \varepsilon)$ определяются из условия*

$$\Big\langle x - y, \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_{ur} q_{us}^* \Big\rangle = \min_{p \in \mathbb{P}} \max_{q \in \mathbb{Q}} \Big\langle x - y, \sum_{r=1}^{L} \sum_{s=1}^{M} f(t, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r q_s \Big\rangle. \tag{3.1}$$

Тогда для всякого ограниченного множества $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ и любых $\lambda^* > 0$ и $0 < \beta < 1$ найдутся такие $\lambda_0 > 0$ и $\delta > 0$, что для любых начальных $x_0 \in X_0$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$\lambda(t_0,x_0,y_0)\leqslant\lambda_0$, любого значения $\varepsilon>0$ и любого разбиения Δ_δ (1.6), для случайного движения $\{x_\omega(\cdot),y_\omega(\cdot)\}$ (1.7), порожденного законом $\mathcal{U}=\{S^u,\varepsilon,\Delta_\delta\}$, будет выполняться неравенство

$$P\Big(\lambda(t,x_\omega(t),y_\omega(t))\leqslant\lambda^*,\ t\in[t_0,\vartheta]\Big)\geqslant\beta,$$

каковы бы ни были функция $p_u^*(\cdot)$ в стратегии S^u и допустимая случайная реализация $v_\omega(\cdot)$ управления второго игрока.

Лемма 3.2. *Пусть в смешанной стратегии $S^v=\{q_v(\cdot),p_v^*(\cdot),q_v^*(\cdot)\}$ второго игрока функции $q_v=q_v(t,x,z,\varepsilon)$ и $p_v^*=p_v^*(t,x,z,\varepsilon)$ определяются из условия*

$$\Big\langle z-x,\sum_{r=1}^{L}\sum_{s=1}^{M}f(t,u^{[r]},v^{[s]})p_{vr}^*q_{vs}\Big\rangle=\max_{q\in\mathbb{Q}}\min_{p\in\mathbb{P}}\Big\langle z-x,\sum_{r=1}^{L}\sum_{s=1}^{M}f(t,u^{[r]},v^{[s]})p_rq_s\Big\rangle. \tag{3.2}$$

Тогда для всякого ограниченного множества $X_0\subset\mathbb{R}^n$ и любых $\lambda^*>0$ и $0<\beta<1$ найдутся такие $\lambda_0>0$ и $\delta>0$, что для любых начальных $x_0\in X_0$ и $z_0\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\lambda(t_0,x_0,z_0)\leqslant\lambda_0$, любого значения $\varepsilon>0$ и любого разбиения Δ_δ (1.6), для случайного движения $\{x_\omega(\cdot),z_\omega(\cdot)\}$ (1.11), порожденного законом $\mathcal{V}=\{S^v,\varepsilon,\Delta_\delta\}$, будет выполняться неравенство

$$P\Big(\lambda(t,x_\omega(t),z_\omega(t))\leqslant\lambda^*,\ t\in[t_0,\vartheta]\Big)\geqslant\beta,$$

каковы бы ни были функция $q_v^*(\cdot)$ в стратегии S^v и допустимая случайная реализация $u_\omega(\cdot)$ управления первого игрока.

§ 4. Вычисление цены игры, построение (ζ,β)-оптимальных законов управления

Определим смешанный закон управления $\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}=\big\{S^u=\big\{p_u(\cdot),\,p_u^*(\cdot),\,q_u^*(\cdot)\big\},\varepsilon,\Delta_\delta\big\}$ первого игрока, полагая, что разбиение Δ_δ вида (1.6) включает все моменты ϑ_i оценки качества движения из показателя (1.3), функции $p_u(\cdot)$ и $q_u^*(\cdot)$ удовлетворяют условию (3.1), а функция $p_u^*(\cdot)$ определяется из условия экстремального сдвига (2.8), так что

$$p_u^*=p_u^*(t,x,y,\varepsilon)=p_u^{*\mathrm{e}}(t,y,\varepsilon;\Delta_\delta),\quad t\in[t_0,\vartheta],x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^n,\varepsilon>0.$$

Аналогично определим закон $\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}=\big\{S^v=\big\{q_v(\cdot),\,p_v^*(\cdot),\,q_v^*(\cdot)\big\},\varepsilon,\Delta_\delta\big\}$ второго игрока, полагая, что функции $q_v(\cdot)$ и $p_v^*(\cdot)$ удовлетворяют условию (3.2), а функция $q_v^*(\cdot)$ определяется из условия (2.10):

$$q_v^*=q_v^*(t,x,z,\varepsilon)=q_v^{*\mathrm{e}}(t,z,\varepsilon;\Delta_\delta),\quad t\in[t_0,\vartheta],x\in\mathbb{R}^n,z\in\mathbb{R}^n,\varepsilon>0.$$

Теорема 1. *Для всякого ограниченного множества $X_0\subset\mathbb{R}^n$ и любых чисел $\zeta>0$ и $0{,}5<\beta<1$ найдутся такие число $\varepsilon^*>0$ и функция $\delta(\varepsilon)>0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$, что, каковы бы ни были $x_0\in X_0$, значение $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$ и разбиение Δ_δ, $\delta\leqslant\delta(\varepsilon)$, законы $\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$ и $\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$ будут (ζ,β)-оптимальными и будет выполнено неравенство*

$$|\rho(t_0,x_0)-e_0(x_0)|\leqslant\zeta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X_0\subset\mathbb{R}^n$; $\zeta>0$; $0{,}5<\beta<1$. Поскольку игра (1.1)–(1.3) имеет седловую точку $\{S_0^u,S_0^v\}$, существуют такие законы $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{V}_0$, что для $x_0\in X_0$ выполняется

$$\rho(\mathcal{U}_0;t_0,x_0,y_0=x_0;\beta)\leqslant\rho(t_0,x_0)+\zeta,\qquad\rho(\mathcal{V}_0;t_0,x_0,z_0=x_0;\beta)\geqslant\rho(t_0,x_0)-\zeta. \tag{4.1}$$

Пользуясь леммой 3.1, непрерывностью показателя качества (1.3) и ζ-оптимальностью вспомогательного закона $\big\{p_u^{*\mathrm{e}}(\ \cdot\ ;\Delta_\delta),\varepsilon,\Delta_\delta\big\}$, найдем такие число $\varepsilon_y^*>0$ и функцию $\delta_y'(\varepsilon)>0$,

$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_y^*$, что для произвольных $x_0 \in X_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_y^*$ и $0 < \delta \leqslant \delta_y'(\varepsilon)$ будут выполняться соотношения

$$P(|\gamma_x - \gamma_y| \leqslant \zeta/2) \geqslant \beta, \qquad \gamma_y \leqslant \rho^*(t_0, y_0 = x_0) + \zeta/2.$$

Отсюда, в согласии с (1.8), для закона $\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$ получаем

$$\begin{gathered}\beta \leqslant P(|\gamma_x - \gamma_y| \leqslant \zeta/2) \leqslant P(\gamma_x \leqslant \rho^*(t_0, y_0 = x_0) + \zeta),\\ \rho(\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}; t_0, x_0, y_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho^*(t_0, y_0 = x_0) + \zeta.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Рассматривая случай, когда в дифференциальной игре (1.1)–(1.3) управление первого игрока назначается согласно закону $\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$, а второго — согласно $\mathcal{V}_0$, в силу неравенств (4.1), (1.13) и (4.2) имеем

$$\rho(t_0, x_0) - \zeta \leqslant \rho(\mathcal{V}_0; t_0, x_0, z_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho(\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}; t_0, x_0, y_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho^*(t_0, y_0 = x_0) + \zeta.$$

Аналогично в силу леммы 3.2, непрерывности показателя (1.3) и ζ-оптимальности закона $\big\{q_v^{*\mathrm{e}}(\,\cdot\,; \Delta_\delta), \varepsilon, \Delta_\delta\big\}$ выберем такие число $\varepsilon_z^* > 0$ и функцию $\delta_z'(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_z^*$, что при $x_0 \in X_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_z^*$ и $0 < \delta \leqslant \delta_z'(\varepsilon)$ для гарантированного результата закона $\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$ получаем

$$\rho^*(t_0, z_0 = x_0) - \zeta \leqslant \rho(\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}; t_0, x_0, z_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho(\mathcal{U}_0; t_0, x_0, y_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho(t_0, x_0) + \zeta.$$

Таким образом, имеем $|\rho(t_0, x_0) - \rho^*(t_0, y_0 = x_0)| \leqslant 2\zeta$, следовательно,

$$\rho(t_0, x_0) = \rho^*(t_0, y_0 = x_0).$$

По числу $\xi = \zeta$ выберем число $\delta' > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство (2.6). Положим

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_y^*,\ \varepsilon_z^*\}, \qquad \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_y'(\varepsilon),\ \delta_z'(\varepsilon),\ \delta'\},\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*.$$

Тогда, каковы бы ни были $x_0 \in X_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ и $0 < \delta \leqslant \delta(\varepsilon)$, имеем

$$\begin{gathered}|\rho(t_0, x_0) - e_0(x_0)| \leqslant \zeta,\\ \rho(\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}; t_0, x_0, y_0 = x_0; \beta) \leqslant \rho(t_0, x_0) + \zeta,\\ \rho(\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}; t_0, x_0, z_0 = x_0; \beta) \geqslant \rho(t_0, x_0) - \zeta.\end{gathered}$$

С учетом (1.9), (1.14) и (1.15) законы $\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$ и $\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$ являются (ζ, β)-оптимальными. □

§ 5. Программная реализация

При программной реализации описанной выше процедуры построения системы величин e_j (2.5) возникают две основные проблемы. Первая сложность обусловлена трудоемкостью пересчета областей G_j (2.3) при переходе через моменты ϑ_i оценки качества движения. Вторая — известными сложностями построения выпуклых сверху оболочек функций в (2.4).

В реализации используем «пиксельное» представление компактных множеств, когда они покрываются равномерной конечной ε-сетью, и все точки множества, входящие в окрестность радиуса ε с центром в одном из узлов сети, отождествляются с этим узлом-пикселем. Таким образом, в разрабатываемом численном методе все компакты представляются в виде конечных наборов пикселей.

При $j = k$ множество $G_k = \{m = 0\}$ представляем в виде массива $\widetilde{G}_k$, состоящего из одного нулевого вектора $\widetilde{m} = 0$, а функцию $\varphi_k(m) = 0$, $m \in G_k$, — в виде ассоциативного массива $\widetilde{\varphi}_k$, состоящего из одной пары $(\widetilde{m} = 0,\ \widetilde{\varphi}_k(\widetilde{m}) = 0)$. Далее, при $j = k-1$, так как $t_k = \vartheta_N = \vartheta_h$ и $h = h(t_{k-1}) + 1 = N$, производим пересчет (2.3). Вводим равномерное разбиение отрезка $\big[0, \max\big\{\nu \geqslant 0 \bigm| \sigma_N^*(0, \nu) \leqslant 1\big\}\big]$ с шагом Δ_ν. Для построения аппроксимации множества G_{k-1} перебираем только те ν, которые принадлежат этому разбиению. Для каждого очередного ν

перебираем с равномерным по всем координатам шагом Δ_l, начиная с $l = 0$, все такие $l \in \mathbb{R}^{d_N}$, которые удовлетворяют условию $\sigma_N^*(l,\nu) \leqslant 1$. Для очередных ν и l, перебирая все $m_* = \widetilde{m}_*$ из массива $\widetilde{G}_k$, получаем вектора $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{R}^n$, из которых покоординатным преобразованием

$$\widetilde{m}_i = \Delta_m \operatorname{round}\left(\frac{m_i}{\Delta_m}\right), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{5.1}$$

формируем массив $\widetilde{G}_{k-1}$ пиксельной аппроксимации множества G_{k-1}. Здесь round обозначает операцию округления до ближайшего целого числа, Δ_m — параметр, характеризующий размер пикселя. Одновременно с массивом $\widetilde{G}_{k-1}$ в согласии с (2.3) формируем ассоциативный массив $\widetilde{\varphi}_k^*$ пар $\big(\widetilde{m},\widetilde{\varphi}_k^*(\widetilde{m})\big), \widetilde{m} \in \widetilde{G}_{k-1}$, который задает табулированную функцию, аппроксимирующую φ_k^*. При этом для каждого $\widetilde{m}$, получаемого в результате преобразования (5.1), по соответствующей ему тройке $\{\widetilde{m}_*,\nu,l\}$ вычисляем значение $\widehat{\varphi}_k^*(\widetilde{m}) = \nu\widetilde{\varphi}_k(\widetilde{m}_*) - \langle l, D_N c_N\rangle$ и производим проверку, содержится ли уже пиксель $\widetilde{m}$ в массиве $\widetilde{G}_{k-1}$ (есть ли в ассоциативном массиве $\widetilde{\varphi}_k^*$ ключ $\widetilde{m}$). Если нет, то в $\widetilde{G}_{k-1}$ добавляем пиксель $\widetilde{m}$, а в $\widetilde{\varphi}_k^*$ добавляем пару $\big(\widetilde{m},\widetilde{\varphi}_k^*(\widetilde{m}) = \widehat{\varphi}_k^*(\widetilde{m})\big)$. В противном случае сравниваем значения $\widetilde{\varphi}_k^*(\widetilde{m})$ и $\widehat{\varphi}_k^*(\widetilde{m})$ и по ключу $\widetilde{m}$ в ассоциативном массиве $\widetilde{\varphi}_k^*$ сохраняем большее из них. В качестве ассоциативного массива в данной задаче удобно использовать структуру данных «хеш-таблица» [14].

Когда массивы $\widetilde{G}_{k-1}$ и $\widetilde{\varphi}_k^*$ сформированы, согласно (2.4) вычисляем табулированную функцию $\widetilde{\psi}_{k-1}$, аппроксимирующую функцию ψ_{k-1}. После этого для табулированной функции $\widetilde{\psi}_{k-1}$ выполняем процедуру построения выпуклой сверху оболочки, которая будет описана далее. Последующее построение пиксельных аппроксимаций множеств G_j и соответствующих аппроксимаций функций φ_j проводим аналогичным образом с понятными изменениями. Заметим, что при этом пересчет (2.3) можно распараллелить, разбив массив $\widetilde{G}_{j+1}$ на равные части, каждая из которых будет обрабатываться независимо.

Опишем используемую в реализации процедуру построения выпуклой сверху оболочки $\widetilde{\varphi} = \{\widetilde{\psi}\}^*_{\widetilde{G}}(\widetilde{m})$ табулированной функции $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(\widetilde{m})$, $\widetilde{m} \in \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^n$. Опираясь на результаты выпуклого анализа (см., например, [15, с. 119]), оболочку аппроксимируем сверху опорными гиперплоскостями с фиксированным набором нормалей, в качестве которого используем семейство векторов $\kappa = (\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_{n+1})$, лежащих на единичной $(n+1)$-мерной полусфере:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \cos(\phi_1),\\
\kappa_2 &= \sin(\phi_1)\cos(\phi_2),\\
\kappa_3 &= \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3),\\
&\ \ \vdots\\
\kappa_n &= \sin(\phi_1)\ldots\sin(\phi_{n-1})\cos(\phi_n),\\
\kappa_{n+1} &= \sin(\phi_1)\ldots\sin(\phi_{n-1})\sin(\phi_n),
\end{aligned}$$

где каждый угол ϕ_i пробегает отрезок $[0,\pi]$ с равномерным шагом Δ_ϕ. Сначала по набору нормалей находим функции опорных гиперплоскостей к графику функции $\widetilde{\psi}$. Затем для каждой точки $\widetilde{m} \in \widetilde{G}$ ищем минимум их значений в этой точке и значение $\{\widetilde{\psi}\}^*_{\widetilde{G}}(\widetilde{m})$ полагаем равным найденному минимуму. Обе части процедуры распараллеливаются: первая — по обрабатываемым нормалям, вторая — по обрабатываемым точкам массива $\widetilde{G}$.

Оценки алгоритмической сложности данного численного метода построения множеств $\widetilde{G}_j$ и функций $\widetilde{\varphi}_j$ приведены в [10].

Значения величин e_j, функций p_u, $p_u^{*\mathrm{e}}$ и q_u^*, входящих в определение закона $\mathcal{U}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$, и q_v, p_v^* и $q_v^{*\mathrm{e}}$, входящих в $\mathcal{V}^\varepsilon_{\Delta_\delta}$, вычисляем приближенно, заменяя множества G_j и функции φ_j описанными выше их аппроксимациями. Минимаксы и максимины вместе с их седловыми точками в (2.2), (2.8), (2.10), (3.1), (3.2) удобно находить численно, решая соответствующие матричные игры в смешанных стратегиях, например при помощи метода, предложенного в [16, с. 244–245], в основе которого лежит симплекс метод.

При формировании управляющих воздействий законами $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{\Delta_\delta}$ и $\mathcal{V}^{\varepsilon}_{\Delta_\delta}$ значения величин $u^{(j)}_{\omega}$ и $v^{(j)}_{\omega}$ определяются дискретными случайными величинами, описываемыми векторами $p_u\big(t_j, x_\omega(t_j), y_\omega(t_j), \varepsilon\big)$ и $q_v\big(t_j, x_\omega(t_j), z_\omega(t_j), \varepsilon\big)$, в результате случайных испытаний.

Решение пошаговых уравнений, определяющих движения комплексов $\{x$-объект, y-модель$\}$ и $\{x$-объект, z-модель$\}$ производится методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

§ 6. Примеры

Приведем результаты численных экспериментов.

Пример 1. Рассмотрим две дифференциальные игры, описываемые уравнением движения

$$\ddot{x} = \frac{4\,u}{1+e^{\,8(t-2)}} + \frac{(u+v)^2}{2} + \frac{2\,v}{1+e^{\,8(3-t)}}, \quad t_0 = 0 \leqslant t < \vartheta = 4,$$
$$u \in \mathbb{U} = \{-1, 1\},\ v \in \mathbb{V} = \{-1, 1\}, \tag{6.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{6.2}$$

и следующими показателями качества:

$$\gamma^{(1)} = \sqrt{x^2(1) + x^2(4)}, \tag{6.3}$$
$$\gamma^{(2)} = |x(1)| + |x(2) - 0{,}5| + |x(4)|. \tag{6.4}$$

При использовании разбиения Δ_δ отрезка времени управления $[0, 4]$ с диаметром $\delta = 0{,}001$ и пиксельном представлении компактов с параметрами $\Delta_m = \Delta_l = \Delta_\nu = 0{,}01$, $\Delta_\phi = \pi/360$ найденное численно приближающее цену игры (6.1)–(6.3) значение $e^{(1)}_0(x_0)$ составило 0,3553, а значение $e^{(2)}_0(x_0)$ для игры (6.1), (6.2), (6.4) составило 1,050. Приведем результаты трех экспериментов по симулированию процесса управления в этих играх. В первом управляющие воздействия игроков формировались законами $\mathcal{U}^{\varepsilon\,(1)}_{\Delta_\delta}$, $\mathcal{V}^{\varepsilon\,(1)}_{\Delta_\delta}$ в первой игре и $\mathcal{U}^{\varepsilon\,(2)}_{\Delta_\delta}$, $\mathcal{V}^{\varepsilon\,(2)}_{\Delta_\delta}$ — во второй. При этом реализовались следующие значения показателей качества (6.3) и (6.4):

$$\gamma^{(1)}_0 = \sqrt{(0{,}0237)^2 + (0{,}3551)^2} \approx 0{,}3559 \approx e^{(1)}_0(x_0) = 0{,}3553,$$
$$\gamma^{(2)}_0 = |0{,}005| + |-0{,}045 - 0{,}5| + |-0{,}516| \approx 1{,}066 \approx e^{(2)}_0(x_0) = 1{,}050.$$

Во втором эксперименте управляющие воздействия первого игрока по-прежнему формировались согласно $\mathcal{U}^{\varepsilon\,(1)}_{\Delta_\delta}$ и $\mathcal{U}^{\varepsilon\,(2)}_{\Delta_\delta}$ соответственно, а управление второго назначалось случайным неоптимальным образом. В этом случае реализовались значения показателей качества

$$\gamma^{(1)}_u = \sqrt{(0{,}0237)^2 + (-0{,}0049)^2} \approx 0{,}0242 < e^{(1)}_0(x_0) = 0{,}3553,$$
$$\gamma^{(2)}_u = |0{,}005| + |-0{,}046 - 0{,}5| + |0{,}034| \approx 0{,}585 < e^{(2)}_0(x_0) = 1{,}050.$$

В третьем управляющие воздействия первого игрока назначались случайным неоптимальным образом, а управление второго формировалось законами $\mathcal{V}^{\varepsilon\,(1)}_{\Delta_\delta}$ и $\mathcal{V}^{\varepsilon\,(2)}_{\Delta_\delta}$ соответственно. Реализовались значения показателей качества

$$\gamma^{(1)}_v = \sqrt{(0{,}4935)^2 + (8{,}2750)^2} \approx 8{,}2897 > e^{(1)}_0(x_0) = 0{,}3553,$$
$$\gamma^{(2)}_v = |0{,}505| + |2{,}063 - 0{,}5| + |8{,}731| \approx 10{,}799 > e^{(2)}_0(x_0) = 1{,}050.$$

Траектории движения, полученные в первом (жирная линия), втором (тонкая линия) и третьем (пунктирная линия, показана частично) экспериментах, приведены на рисунке 1: слева представлен случай игры с показателем качества $\gamma^{(1)}$, справа — с $\gamma^{(2)}$. Цели обозначены жирными вертикальными прямыми. Точки на траекториях соответствуют моментам времени оценки качества движения.

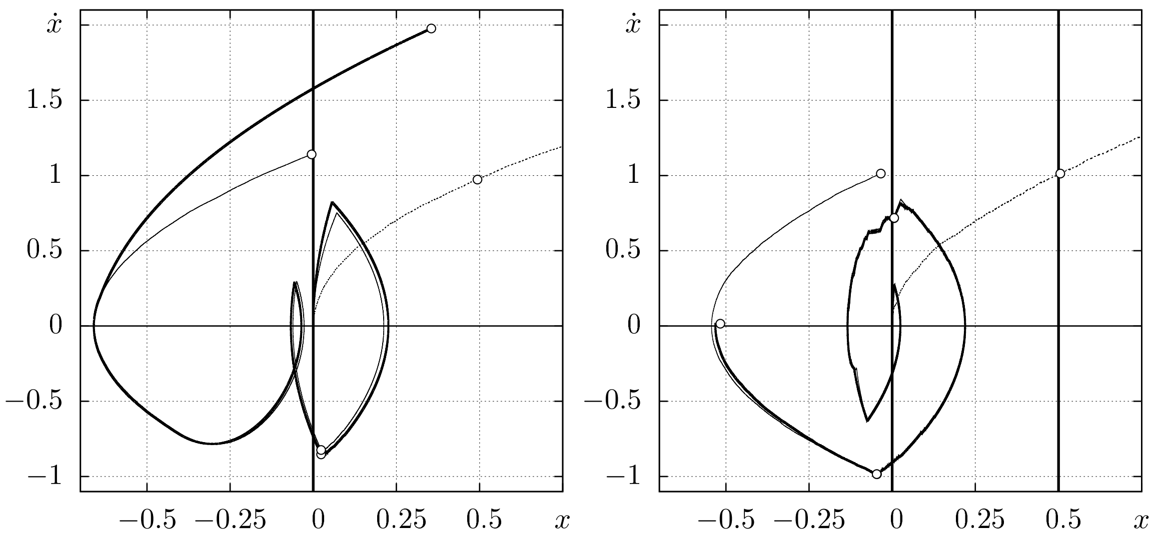

Рис. 1.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальную игру, основанную на примере из [4, с. 12–39, 274–309], которая описывается уравнением движения

$$
\begin{aligned}
&\ddot{s} = -\frac{\alpha_1 \dot{s}}{m_1(t)} - K_1 \lambda_1 u^{(1)}_{v^{(1)}} + \frac{N_1 v_*}{m_1(t)}, \\
&\ddot{r} = -\frac{\alpha_2 \dot{r}}{m_2(t)} + \frac{\beta r}{m_2(t)} - K_2 \lambda_2 u^{(2)} + \frac{N_2 v^*}{m_2(t)}, \qquad t_0 = 0 \leqslant t < \vartheta = 2, \\
&u^{(1)}_{v^{(1)}} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \cos v^{(1)} - u_2^{(1)} \sin v^{(1)} \\ u_1^{(1)} \sin v^{(1)} + u_2^{(1)} \cos v^{(1)} \end{bmatrix}, \qquad -\alpha_1^0 \leqslant v^{(1)} \leqslant \alpha_2^0, \\
&u^{(1)}, v_*, u^{(2)}, v^* \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

с начальным условием

$$
s(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \dot{s}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{6.6}
$$

и показателем качества

$$
\gamma = \sqrt{\big(r_1(\vartheta) - s_1(\vartheta)\big)^2 + \big(r_2(\vartheta) - s_2(\vartheta)\big)^2}. \tag{6.7}
$$

Игра рассматривалась при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = 0{,}2$; $K_1 = -40$; $\lambda_1 = 0{,}5$; $N_1 = 4$; $\beta = -4$; $\alpha_2 = 0{,}4$; $K_2 = -25$; $\lambda_2 = 0{,}4$; $N_2 = 6$; $m_i(t) = m_{i0} * e^{-\lambda_1 t}$; $i = 1, 2$; $m_{10} = 1$; $m_{20} = 1$.

При использовании разбиения Δ_δ отрезка времени управления $[0, 2]$ с диаметром $\delta = 0{,}01$ и пиксельном представлении компактов с параметрами $\Delta_m = \Delta_l = \Delta_\nu = 0{,}01$, $\Delta_\phi = \pi/500$ найденное численно приближающее цену игры (6.5)–(6.7) значение $e_0(x_0)$ составило 0,279. В результате трех экспериментов по симулированию процесса управления, аналогичных примеру 1, в этой игре реализовались соответственно следующие значения показателя качества:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sqrt{\big(0{,}135 - (-0{,}126)\big)^2 + \big(-0{,}940 - (-1{,}018)\big)^2} \approx 0{,}272 \approx e_0(x_0) = 0{,}279, \\
\gamma_u &= \sqrt{\big(0{,}263 - 0{,}263\big)^2 + \big(-1{,}004 - (-1{,}004)\big)^2} \approx 0 < e_0(x_0) = 0{,}279, \\
\gamma_v &= \sqrt{\big(7{,}151 - (-1{,}351)\big)^2 + \big(-3{,}126 - (-0{,}691)\big)^2} \approx 8{,}843 > e_0(x_0) = 0{,}279.
\end{aligned}
$$

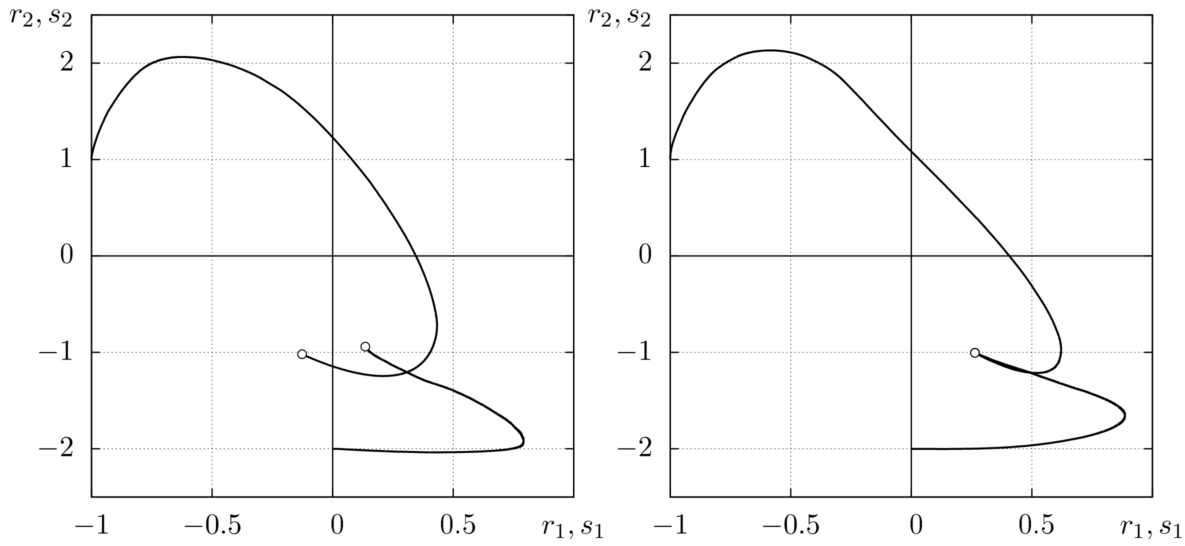

Рис. 2.

Траектория движения, соответствующая первому случаю, изображена на рисунке 2 слева, а второму — справа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
5. Красовский А.Н. Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.
6. Красовский А.Н. Синтез смешанных стратегий управления. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988. 151 с.
7. Красовский А.Н., Решетова Т.Н. Управление при дефиците информации: Учеб. пособие. Свердловск: УрГУ, 1990. 104 с.
8. Лукоянов Н.Ю. Одна дифференциальная игра с нетерминальной платой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 85–90.
9. Лукоянов Н.Ю. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.
10. Корнев Д.В. О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 11. С. 60–75.
11. Гомоюнов М.И., Корнев Д.В. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры в классе контрстратегий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 59–68.
12. Krasovskii A.N., Choi Y.S. Stochastic control with the leaders-stabilizers. Ekaterinburg: Inst. Mat. Mech. Ural Branch of RAS, 2001. 51 p.
13. Красовский А.А., Красовский А.Н. Нелинейная позиционная дифференциальная игра в классе смешанных стратегий // Математическая теория управления и дифференциальные уравнения: сб. статей к 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 144–151.
14. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
15. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
16. Williams J.D. The compleat strategyst, 2nd edition. New York: McGraw-Hill, 1966. 268 p.

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 3

Поступила в редакцию 22.07.2013

Корнев Дмитрий Васильевич, ассистент, кафедра вычислительной математики, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
E-mail: d.v.kornev@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич, д.ф.-м.н., зав. сектором, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: nyul@imm.uran.ru

D. V. Kornev, N. Yu. Lukoyanov

On numerical solution of differential games with nonterminal payoff in classes of mixed strategies

Keywords: differential games, game value, saddle point, mixed stategies.

Mathematical Subject Classifications: 49N70

A zero-sum linear-convex differential game with a quality index that estimates a set of deviations of a motion trajectory at given instants of time from given target points is considered. A case when the saddle point condition in a small game, also known as Isaac's condition, does not hold, is studied. The game is formalized in classes of mixed control strategies of players. A numerical method for approximate computation of the game value and optimal strategies is elaborated. The method is based on the recurrent construction of upper convex hulls of auxiliary program functions. The results of numerical experiments in model examples are given.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of a dynamical system. The problem of minimum guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 520 p.

3. Isaacs R. *Differentsial'nye igry* (Differential games), Moscow: Mir, 1967, 480 p.

4. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p.

5. Krasovskii A.N. Contstruction of mixed strategies on the basis of stochastics programms, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 186–192.

6. Krasovskii A.N. *Sintez smeshannykh strategii upravleniya* (Synthesis of mixed control strategies), Sverdlovsk: Ural State University, 1988, 151 p.

7. Krasovskii A.N., Reshetova T.N. *Upravlenie pri defitsite informatsii: Ucheb. posobie* (Control under lack of information: textbook), Sverdlovsk: Ural State University, 1990, 104 p.

8. Lukoyanov N.Yu. One differential game with nonterminal payoff, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Teor. Sist. Upr.*, 1997, no. 1, pp. 85–90.

9. Lukoyanov N.Yu. To question of calculation of value of differential game for positional functional, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 188–198.

10. Kornev D.V. On numerical solution of positional differential games with nonterminal payoff, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2012, no. 11, pp. 60–75.

11. Gomoyunov M.I., Kornev D.V. To question of calculation of value of differential game in class of counterstrategies, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 59–68.

12. Krasovskii A.N., Choi Y.S. *Stochastic control with the leaders-stabilizers*, Ekaterinburg: Inst. Mat. Mech. Ural Branch of RAS, 2001, 51 p.

13. Krasovskii A.A., Krasovskii A.N. Nonlinear positional differential game in class of mixed strategies, *Matematicheskaya teoriya upravleniya i differentsial'nye uravneniya: sb. statei k 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika Evgeniya Frolovicha Mishchenko, Tr. Mosk. Inst. Akad. Nauk*, 2012, vol. 277, pp. 144–151.

14. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R., Stein C. *Algoritmy: postroenie i analiz* (Introduction to algorithms) Moscow: Williams, 2005, 1296 p.

15. Rockafellar R. *Vypuklyi analiz* (Convex analysis) Moscow: Mir, 1973, 469 p.
16. Williams J.D. *The compleat strategyst, 2nd edition*, New York: McGraw-Hill, 1966, 268 p.

Received 22.07.2013

Kornev Dmitrii Vasil'evich, Assistant Lecturer, Department of Computational Mathematics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.
E-mail: d.v.kornev@gmail.com

Lukoyanov Nikolai Yur'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: nyul@imm.uran.ru