УДК 519.833

© *В. И. Жуковский, Н. Г. Солдатова*

СПОСОБ УРАВНОВЕШИВАНИЯ КОНФЛИКТОВ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В качестве математической модели конфликта рассматривается бескоалиционная игра Г двух участников при неопределенности. О неопределенности известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют. Для оценки риска в Г привлекается функция риска по Сэвиджу (из принципа минимаксного сожаления). Качество функционирования участников конфликта оценивается по двум критериям — исходам и рискам, при этом каждый из них стремится увеличить исход и одновременно уменьшить риск. На основе синтеза принципов минимаксного сожаления и гарантированного результата, равновесности по Нэшу и оптимальности по Слейтеру, а также решения иерархической двухуровневой игры по Штакельбергу формализуется понятие гарантированного по исходам (выигрышам) и рискам равновесия в Г. Приведен пример. Затем устанавливается существование такого решения в смешанных стратегиях при обычных ограничениях в математической теории игр.

Ключевые слова: стратегии, ситуации, неопределенности, бескоалиционная игра, равновесность по Нэшу, максимум и минимум по Слейтеру.

Введение

В данной работе рассматривается бескоалиционная игра двух участников при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y^X, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle.$$

В Г каждый i-й участник конфликта (игрок) выбирает свою чистую стратегию $x_i \in X_i \subset \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1,2)$; в результате образуется ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$; независимо от их действий в Г реализуется *информированная* неопределенность $y(x) : X \to Y \subset \mathbb{R}^m$, $y(\cdot) \in Y^X$ (Y^X — множество m-вектор-функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y). Причем, следуя [1, с. 353], полагаем информационную дискриминацию обоих игроков и информационное превосходство ЛПР (лица, принимающего решение), формализующего неопределенность. О множестве Y известны лишь границы изменений, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют по тем или иным причинам (из-за непредсказуемой «реализации» $y \in Y$ названа «дурной» неопределенностью в терминологии Е. С. Вентцель [2]).

Приведем «иерархический подход» к принятию решений в Г без учета рисков. Рассматривается двухуровневая игра трех лиц с двумя игроками на верхнем уровне и одним на нижнем.

Первый ход за игроками верхнего уровня: они передают на нижний уровень иерархии свои возможные стратегии. **Второй ход** за игроком нижнего уровня: он формирует две информированные неопределенности $y^{(i)}(x) : X \to Y$ (m-вектор-функции $y^{(i)}(x) \in C(X,Y)$, то есть непрерывны на X) такие, что

$$\min_{y(\cdot)\in Y^X} f_i(x,y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) = f_i[x] \quad \forall x \in X \quad (i = 1,2), \tag{0.1}$$

и передает $y^{(i)}(x)$ игроку i верхнего уровня. Завершающий **третий ход** за верхним уровнем: игроки строят ситуации $x^e \in X$, которые,
во-первых, равновесны по Нэшу в «игре гарантий»

$$\Gamma^g = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x]\}_{i=1,2} \rangle,$$

то есть $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ определяется равенствами

$$\max_{x_1 \in X_1} f_1[x_1, x_2^e] = f_1[x^e], \quad \max_{x_2 \in X_2} f_2[x_1^e, x_2] = f_2[x^e]$$

(множество $\{x^e\}$ обозначаем X^e);
во-вторых, находится максимальная по Слейтеру ситуация x^g в двухкритериальной задаче $\langle X^e, \{f_i[x]\}_{i=1,2}\rangle$. В качестве гарантированного решения постулируется пара $(x^g, f[x^g])$, $f = (f_1, f_2)$, ибо при использовании любого $x \in X$, благодаря (0.1),

$$f_i[x] \leqslant f_i(x, y) \quad \forall y \in Y, \tag{0.2}$$

и поэтому $f_i[x]$ является гарантированным исходом для i-го участника конфликта. Из всех таких гарантий выбирается x^g — наибольшая в «нэшовском» и затем «векторном» смыслах, так как каждый игрок стремится к возможно большим гарантированным исходам.

Как при этом учитывать гарантированные риски, которые игроки, естественно, стремятся возможно уменьшить? Приведем определение: *риск — это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемых значений.* Отметим, что именно такому понятию риска отвечают общепринятые многочисленные микроэкономические риски из [3, с. 40–50]. Для определения риска здесь используются значения функции риска по Сэвиджу, фигурирующие в предложенном им же в 1951 г. принципе минимаксного сожаления [4]. В конфликте Γ для первого игрока возможны два вида функций риска:

$$\Phi_1^{(1)}(x, y) = \max_{z_1 \in X_1} f_1(z_1, x_2, y) - f_1(x, y), \quad \Phi_1^{(1,2)}(x, y) = \max_{z \in X} f_1(z, y) - f_1(x, y); \tag{0.3}$$

аналогично для второго:

$$\Phi_2^{(1)}(x, y) = \max_{z_2 \in X_2} f_2(x_1, z_2, y) - f_2(x, y), \quad \Phi_2^{(1,2)}(x, y) = \max_{z \in X} f_2(z, y) - f_2(x, y). \tag{0.4}$$

Далее именно функции риска из (0.3) и (0.4) привлекаем для оценки риска в Γ. В ряде фундаментальных книг по финансовой экономике (например, в [5, с. 103]) выделяются три группы субъектов в зависимости от их отношения к риску:

(1) рискофобы (отвергающие риск);

(2) рискофилы (любители рисковать);

(3) рисконейтралы (стремятся добиться больших своих исходов и одновременно по возможности уменьшить свои риски).

В настоящей работе считаем обоих участников конфликта рисконейтралами, каждый i-й ($i = 1, 2$) из них стремится увеличить свой исход — значение $f_i(x, y)$ и одновременно уменьшить риск — значение $\Phi_i(x, y)$, при этом нужно учитывать реализацию $\forall y \in Y$. Для этого сопоставим модели конфликта Γ игру

$$\Gamma_2 = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y^X, \{F_i(x, y)\}_{i=1,2}\rangle,$$

где качество функционирования i-го участника конфликта оценивается двумерным вектором $F_i(x, y) = (f_i(x, y), -\Phi_i(x, y))$. Здесь $f_i(x, y)$, X, Y те же, что в Γ, а функция риска $\Phi_i(x, y)$ — по одной из (0.3) и (0.4). Знак «минус» специально выбран перед Φ_i, чтобы i-ый участник конфликта стремился к *увеличению обеих компонент* $F_i(x, y)$ сразу, что эквивалентно увеличению $f_i(x, y)$ и одновременно уменьшению $\Phi_i(x, y)$. Далее используем двухкомпонентные векторы $f = (f_1, f_2)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$.

Применив к Γ_2 снова «иерархический подход», приходим к следующему понятию.

§ 1. Формализация решения

Определение 1. Тройку $(x^g, f^g, \Phi^g) = (x^g, f_1^g, f_2^g, \Phi_1^g, \Phi_2^g) \in X \times \mathbb{R}^4$ назовем *гарантированным по исходам и рискам равновесием* Γ, если

(1) существуют четыре непрерывных m-вектор-функции $y^{(j)}(x)$ $(j=1,2,3,4)$ таких, что

$$f_i\big(x,y^{(i)}(x)\big)=\min_{y\in Y} f_i(x,y)=f_i[x], \tag{1.1}$$

$$-\Phi_i\big(x,y^{(i+2)}(x)\big)=\min_{y\in Y}[-\Phi_i(x,y)]=-\Phi_i[x] \qquad (i=1,2); \tag{1.2}$$

(2) для «конфликта гарантий»

$$\Gamma_2=\langle\{1,2\},\{X_i\}_{i=1,2},\{\varphi_i(x_1,x_2)=f_i[x]-\Phi_i[x]\}_{i=1,2}\rangle \tag{1.3}$$

существует ситуация равновесия по Нэшу $x^e=(x_1^e,x_2^e)\in X$:

$$\max_{x_1\in X_1}\varphi_1[x_1,x_2^e]=\varphi_1[x^e], \quad \max_{x_2\in X_2}\varphi_2[x_1^e,x_2]=\varphi_2[x^e] \tag{1.4}$$

(множество $\{x^e\}$ обозначаем X^e);

(3) ситуация $x^g\in X^e$ максимальна по Слейтеру в двухкритериальной задаче

$$\Gamma^e=\langle X^e,\{\varphi_i[x]\}_{i=1,2}\rangle,$$

то есть для каждой стратегии $x\in X$ найдется свой номер $j(x)=j\in\{1,2\}$ такой, что $\varphi_j[x]\leqslant \varphi_j[x^g]$;

(4) векторы $f^g=(f_1^g,f_2^g)$, $\Phi^g=(\Phi_1^g,\Phi_2^g)$, где $f_i^g=f_i[x^g]$, $\Phi_i^g=\Phi_i[x^g]$ $(i=1,2)$.

Почему же $(x^g,f[x^g],\Phi[x^g])\in X\times\mathbb{R}^4$ выбрана в качестве гарантированного по исходам и рискам равновесия конфликта Γ?

Во-первых, исходя из (1.1) и (1.2), для каждой ситуации $x\in X$

$$f_i[x]\leqslant f_i(x,y) \quad \forall y\in Y, \quad \Phi_i[x]\geqslant\Phi_i(x,y) \quad \forall y\in Y \quad (i=1,2),$$

то есть применение ситуации $x\in X$ ограничивает (при $\forall y\in Y$) исходы $f_i(x,y)$ снизу, а риски $\Phi_i(x,y)$ — сверху соответственно гарантированным исходом $f_i[x]$ и гарантированным риском $\Phi_i[x]$. Из этих гарантий в результате (1.4) отбираются равновесные по Нэшу (устойчивые к отклонениям отдельных игроков) и уже из полученных выбирается «самое большое» — максимальное по Слейтеру по отношению к другим равновесным по Нэшу ситуациям.

Во-вторых, в (1.3) использована свертка критериев $\varphi_i[x]=f_i[x]-\Phi_i[x]$. Согласно (1.4), например, для первого игрока будет

$$\max_{x_1\in X_1}\big(f_1[x_1,x_2^e]-\Phi_1[x_1,x_2^e]\big)=f_1[x^e]-\Phi_1[x^e],$$

что является достаточным условием максимума по Парето $x_1^e\in X_1$ в двухкритериальной задаче $\langle X_1,\{f_1[x_1,x_2^e],-\Phi_1[x_1,x_2^e]\}\rangle$, то есть при любых $x_1\in X_1$ несовместна система неравенств

$$f_1[x_1,x_2^e]\leqslant f_1[x_1^e,x_2^e], \quad \Phi_1[x_1,x_2^e]\geqslant\Phi_1[x_1^e,x_2^e],$$

из которых хотя бы одно строгое. Это означает, что при увеличении исхода (по сравнению с $f_1[x^e]$) автоматически увеличится риск, а при уменьшении риска (по отношению к $\Phi_1[x^e]$) уменьшается исход. А цель каждого участника конфликта — увеличить, по крайней мере, гарантированный исход и одновременно уменьшить гарантированный риск.

§ 2. Пример

Пусть в Γ

$$f_i(x,y)=-x_i^2+2x_1x_2+y_i \qquad (i=1,2), \tag{2.1}$$

$$X=X_1\times X_2=\{x=(x_1,x_2)|x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}, \tag{2.2}$$
$$Y=\{y=(y_1,y_2)|-1\leqslant y_i\leqslant 1 \qquad (i=1,2)\}.$$

Если x_i — количество товара, поставляемого на рынок сбыта одного и того же товара i-м участником конфликта, то вместимость рынка для обоих продавцов ограничена в (2.2), причем первое слагаемое в (2.1) можно интерпретировать как затраты i-го участника, второе — как прибыль от продажи количества x_i по цене x_j $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$, импорт поставляет такой же товар на сумму y_i.

Согласно (0.3)–(1.3) при $i, j = 1, 2$ и $i \neq j$ будет

$$f_i[x] = x_j^2 - (x_1 - x_2)^2 - 1, \quad \Phi_i^{(1)}[x] = \Phi_i^{(1)}(x, y) = (x_1 - x_2)^2,$$
$$\Phi_i^{(1,2)}[x] = \Phi_i^{(1,2)}(x, y) = 1 - x_j^2 + (x_1 - x_2)^2,$$
$$\varphi_i^{(1)}[x] = x_j^2 - 2(x_1 - x_2)^2 - 1,\ \varphi_i^{(1,2)}[x] = 2[x_j^2 - (x_1 - x_2)^2 - 1].$$

Введем 4 вида моделей для Γ_2, именно (знак $\vee$ означает «или») $\Gamma_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, где

$$-\Phi = -(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}) \vee = -(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1,2)}) \vee = -(\Phi_1^{(1,2)}, \Phi_2^{(1)}) \vee = -(\Phi_1^{(1,2)}, \Phi_2^{(1,2)}),$$

то есть $\Gamma_2^{(j)}$ различаются только приведенными видами функций риска из (0.3), (0.4).

Во всех четырех случаях гарантирующих ситуаций по две:

$$x^g = (x_1^g, x_2^g) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

одни и те же, так же, как гарантированные исходы $f_i[x^g] = -\frac{1}{2}$ $(i = 1, 2)$ и гарантированные риски $\Phi_i^{(1)}[x^g] = 0$, $\Phi_i^{(1,2)}[x^g] = \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2)$.

Отсюда видно, что надежды на помощь партнера по конфликту весьма и весьма призрачны.

§ 3. Существование

В математической теории игр, начиная с Джона фон Неймана [6] и затем Джона Нэша [7], в случаях, если предлагаемое решение в чистых стратегиях может отсутствовать, доказывают его существование в смешанных стратегиях. Тем более что необходимые для доказательства сведения, касающиеся, например, слабой компактности в себе множества ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях и ряд других, уже «заготовлены» в [8].

Итак, будем считать в Γ множества X и Y непустыми компактами (замкнутыми и ограниченными), а $f_i(x, y)$ — непрерывными по совокупности переменных функциями на декартовом произведении $X \times Y$. *Смешанной стратегией* $\mu_i(\cdot)$ участника конфликта $i = 1, 2$ называется скалярная неотрицательная функция $\mu_i(\cdot)$, счетно-аддитивная, нормированная единицей и определенная на борелевской σ-алгебре подмножеств компакта X_i (в ряде публикаций иногда $\mu_i(\cdot)$ называют *вероятностной мерой*). Множество таких смешанных стратегий $\mu_i(\cdot)$ обозначается через $\{\mu_i\}$, и оно является слабо компактным в себе множеством.

Смешанная ситуация $\mu(dx) = \mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2)$ вводится в соответствии с требованиями теории мер к мерам-произведениям. Множество $\mu(\cdot)$ обозначаем $\{\mu\}$.

«Конфликту гарантий» (1.3) поставим в соответствие его *смешанное расширение*

$$\langle \{1, 2\}, \{\mu_i\}_{i=1,2}, \{\widetilde{\varphi}_i[\mu]\}_{i=1,2} \rangle, \tag{3.1}$$

где смешанное расширение $\widetilde{\varphi}_i[\mu]$ функции $\varphi_i[x]$ из (1.3) есть математическое ожидание

$$\widetilde{\varphi}_i[\mu] = \int_X \varphi_i[x]\mu(dx).$$

Определение 2. Тройку $(\mu^g, \widetilde{f}^g, \widetilde{\Phi}^g) = (\mu^g, \widetilde{f}_1^g, \widetilde{f}_2^g, \widetilde{\Phi}_1^g, \widetilde{\Phi}_2^g) \in \{\mu\} \times \mathbb{R}^4$ назовем *гарантированным по исходам и рискам равновесием* Γ *в смешанных стратегиях*, если

(1) выполнено требование 1 определения 1;

(2) для «конфликта гарантий» в смешанных стратегиях (3.1) существует ситуация равновесия по Нэшу $\mu^e(dx) = \mu^e(dx_1)\mu^e(dx_2)$, которая определяется равенствами

$$\max_{\mu_1(\cdot)\in\{\mu_1\}} \varphi_1[\mu_1, \mu_2^e] = \varphi_1[\mu^e], \qquad \max_{\mu_2\cdot)\in\{\mu_2\}} \varphi_2[\mu_1, \mu_2^e] = \varphi_2[\mu^e]$$

(множество $\mu^e(\cdot)$ обозначаем $\{\mu^e\}$);

(3) ситуация в смешанных стратегиях $\mu^g(\cdot) \in \{\mu\}$ максимальна по Слейтеру в двухкритериальной задаче $\langle\{\mu^e\}, \{\widetilde{\varphi}_i[\mu]\}_{i=1,2}\rangle$;

(4) векторы $\widetilde{f}^g = (\widetilde{f}_1^g, \widetilde{f}_2^g)$, $\widetilde{\Phi}^g = (\widetilde{\Phi}_1^g, \widetilde{\Phi}_2^g)$ таковы, что

$$\widetilde{f}_i^g = \int_X f_i[x]\mu^g(dx),\ \widetilde{\Phi}_i^g = \int_X \Phi_i[x]\mu^g(dx)\ (i = 1, 2).$$

Замечание 1. Требование 1 выполняется

(a) для функций $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$, если в Γ множества X, Y суть компакты, Y выпукло, функции $f_i(x, y)$ непрерывны на $X \times Y$ и *строго выпуклы по* $y \in Y$ при каждом $x \in X$, то есть при любых постоянных $\lambda \in (0, 1)$ и $y^{(j)} \in Y$ $(j = 1, 2)$ будет для любого $x \in X$:

$$f_i\left(x, \lambda y^{(1)} + (1-\lambda)y^{(2)}\right) < \lambda f_i\big(x, y^{(1)}\big) + (1-\lambda) f_i\big(x, y^{(2)}\big)$$

(это требование имеет место, если, например, гессиан $\left\|\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_k\,\partial y_l}\right\|$ определенно положителен при всех $y \in Y$ и для каждого $x \in X$);

(b) если функции риска $\Phi_i(x, y)$ не зависят от y, то это требование 1 к $\Phi_i(x, y)$ также выполнено (операция max в (0.3) и (0.4) может «испортить» свойство строгой выпуклости).

Теорема 1. *Пусть в конфликте* Γ *множества* X_i $(i = 1, 2)$, Y *суть компакты,* Y *выпукло, функции* $f_i(x, y)$ *строго выпуклы по* $y \in Y$ *при каждом* $x \in X$ *и функции риска* Φ_i *из* (0.3) *и* (0.4) *от* y *не зависят.*

Тогда в Γ *существуют все четыре вида гарантированных по исходам и рискам равновесий в смешанных стратегиях.*

Доказательство теоремы 1, начиная с 2^o, дословно повторяет соответствующие абзацы из [8]; о пункте 1^o см. предыдущее замечание. □

Вывод

Учет рисков значительно «сужает» возможности участников конфликта при неопределенности. О последней предполагаются известными только границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют. В статье впервые (насколько авторам известно) формулируется способ уравновешивания конфликта с учетом исходов и рисков одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Знание, 1976. 63 с.
3. Цветкова Е.В., Арлюкова И.О. Риски в экономической деятельности. СПб.: ИВЭСЭП, 2002. 64 с.
4. Savage L.Y. The theory of statistical decision // J. American Statistical Association. 1951. № 46. P. 55–67.
5. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИНФРА, 2008. 843 с.
6. Von Neumann J. Zur Theorie der Gesellschaftspiele // Math. Ann. 1928. Vol. 100. P. 295–320.
7. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. Vol. 36. P. 48–49.
8. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 27–44.

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 3

Поступила в редакцию 05.07.2013

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Солдатова Наталья Геннадьевна, аспирант, кафедра математики и физики, Московский государственный областной гуманитарный институт, 142611, Россия, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22.
E-mail: solnata@pochta.ru

V. I. Zhukovskii, N. G. Soldatova
Method of settlement of conflicts under uncertainty

Keywords: strategy, situations, uncertainty, non-cooperative game, Nash equilibrium, Slater maximum and minimum.

Mathematical Subject Classifications: 91A10

As a mathematical model of conflict the non-cooperation game Γ of two players under uncertainty is considered. About uncertainty only the limits of change are known. Any characteristics of probability are absent. To estimate risk in Γ we use Savage functions of risk (from principle of minimax regret). The quality of functioning of conflict's participants is estimated according to two criteria: outcomes and risks, at that each of the participants tries to increase the outcome and simultaneously to decrease the risk. On the basis of synthesis of principles of minimax regret and guaranteed result, Nash equilibrium and Slater optimality as well as solution of the two-level hierarchical Stackelberg game, the notion of guaranteed equilibrium in Γ (outcomes (prize) and risks) is formalized. We give the example. Then the existence of such a solution in mixed strategies at usual limits in mathematical game theory is established.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York–Berlin: Springer-Verlag, 1988, 517 p.
2. Venttsel' E.S. *Issledovanie operatsii* (Operations research), Moscow: Znanie, 1976, 63 p.
3. Tsvetkova E.V., Arlyukova I.O. *Riski v ekonomicheskoi deyatel'nosti* (Risks in economic activity), Saint-Petersburg: IVESEP, 2002, 64 p.
4. Savage L.Y. The theory of statistical decision, *J. Am. Stat. Assoc.*, 1951, no. 46, pp. 55–67.
5. Cheremnykh Yu.N. *Mikroekonomika. Prodvinutyi uroven'* (Microeconomics. The advanced level), Moscow: INFRA, 2008, 843 p.
6. Von Neumann J. Zur Theorie der Gesellschaftspiele, *Math. Ann.*, 1928, vol. 100, pp. 295–320.
7. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1950, vol. 36, pp. 48–49.
8. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N. Equilibrating conflicts under uncertainty. I. Analogue of a saddle-point, *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 27–44.

Received 05.07.2013

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Soldatova Natal'ya Gennad'evna, post-graduate student, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities, Zelenaya, 22, Orekhovo-Zuevo, 142611, Russia.
E-mail: solnata@pochta.ru