УДК 515.122.22, 515.122.252

© *М. Е. Воронов*

# О КОМПАКТНЫХ $T_1$-ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматриваются пространства, всякие подпространства которых компактны. Будем называть такие пространства наследственно компактными. В работе рассматриваются вопросы о существовании и способах построения наследственно компактных $T_1$-топологий. Доказано существование $2^\tau$ попарно несравнимых наследственно компактных $T_1$-топологий на бесконечном множестве $X$ мощности $\tau$. Получены характеристики наследственно компактных пространств. Доказано, что тихоновское произведение конечного числа наследственно компактных $T_1$-пространств является наследственно компактным $T_1$-пространством. Доказано, что тихоновское произведение бесконечного числа неодноточечных наследственно компактных $T_1$-пространств не является наследственно компактным.

*Ключевые слова*: компактность, минимальная $T_1$-топология, тихоновское произведение.

## Введение

Работа посвящена некоторым вопросам теории компактных пространств.

Ослабление условия отделимости пространства $X$ с хаусдорфовости до аксиомы $T_1$ существенно изменяет свойства компактных пространств. Это определяется в большей степени тем, что в отличие от хаусдорфовых компактов семейство замкнутых и семейство компактных подмножеств в случае $T_1$-компактных пространств могут не совпадать. Вопросы, связанные с этой особенностью $T_1$-компактных пространств, изучались Я. де Гроотом [1] (он исследовал $c$- и $c^*$-пространства), А. В. Архангельским [2] (рассматривавшим класс самосопряженных пространств).

В данной работе рассматриваются наследственно компактные топологические пространства, то есть пространства, в которых любое подпространство компактно. В случае хаусдорфовых пространств наследственно компактное пространство оказывается конечным.

В случае $T_1$-пространств ситуация иная. Известным примером наследственно компактного $T_1$-пространства является бесконечное пространство $X$ с минимальной $T_1$-топологией.

В связи с этим возникает вопрос о существовании на данном множестве других наследственно компактных $T_1$-топологий. Если такие существуют, то сколько их? Возникает вопрос о способах построения таких топологий. Этим вопросам и посвящена данная работа.

## § 1. Предварительные сведения

Определения и обозначения, используемые в работе, стандартны, и их можно найти в [3, 4]. Напомним некоторые необходимые определения.

**Определение 1.** Пространство $X$ называется *компактным*, если из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие.

**Определение 2.** Топологическое пространство $X$ удовлетворяет *аксиоме отделимости* $T_1$, или является *$T_1$-пространством*, если для любых двух различных точек $x_1, x_2$ этого пространства существует окрестность $Ox_1$ такая, что $x_2 \notin Ox_1$.

Известно, что топологическое пространство $X$ является $T_1$-пространством тогда и только тогда, когда любое его одноточечное подмножество замкнуто.

**Определение 3.** Топологическое пространство $X$ называется *хаусдорфовым*, или *$T_2$-пространством*, если у любых двух различных точек $x_1$ и $x_2$ этого пространства существуют непересекающиеся окрестности.

Введем следующее определение.

**Определение 4.** Пространство $X$ назовем *наследственно компактным*, если любое его подмножество компактно.

В случае хаусдорфовых пространств возникает

**Предложение 1.** *Наследственно компактное $T_2$-пространство конечно.*

Доказательство. Пусть $X$ наследственно компактно. Возьмем произвольную точку $x \in X$. Множество $X \setminus \{x\}$ компактно. Известно, что в $T_2$-пространстве любое его компактное подмножество замкнуто. Тогда $X \setminus \{x\}$ замкнуто в $X$, а значит, $\{x\}$ открыто в $X$.

Таким образом, $X$ дискретно, а дискретное пространство компактно, только если оно конечно. □

В случае $T_1$-пространств ситуация иная, и далее в работе будут рассматриваться только $T_1$-пространства.

Известным примером наследственно компактного $T_1$-пространства является бесконечное пространство $X$ с минимальной $T_1$-топологией, также известной как топология Зарисского.

**Определение 5.** *Минимальной $T_1$-топологией* на множестве $X$ называется семейство $\tau_m = \{X \setminus K : K \text{ конечно}\}$.

В § 2 решаются вопрос о существовании других наследственно компактных $T_1$-топологий и вопрос об их количестве.

## § 2. Одна конструкция наследственно компактной топологии

Пусть $X$ — бесконечное множество, $A \subseteq X$ — его произвольное подмножество. Определим на множестве $X$ *семейство* $\tau_A$, состоящее из множеств семейства $\tau_m$ и множеств вида $A \cap U$, где $U \in \tau_m$. Другими словами, $\tau_A = \tau_m \cup \{A \setminus K : K \text{ конечно}\}$.

**Предложение 2.** *Семейство $\tau_A$ является топологией на множестве $X$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное семейство $\{U_\alpha : \alpha \in E\} \subseteq \tau_A$. Докажем, что $\bigcup\limits_{\alpha \in E} U_\alpha \in \tau_A$. Действительно, если для некоторого $\alpha_0 \in E$ множество $U_{\alpha_0} \in \tau_m$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in E} U_\alpha \in \tau_m$. Пусть все $\{U_\alpha : \alpha \in E\}$ имеют вид $U_\alpha = A \setminus K_\alpha$, где множество $K_\alpha$ конечно для любого $\alpha \in E$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in E} U_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in E} (A \setminus K_\alpha) = A \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in E} K_\alpha$ и, следовательно, $\bigcup\limits_{\alpha \in E} U_\alpha \in \tau_A$.

Рассмотрим произвольное конечное семейство $\lambda = \{U_i\}_{i \leqslant n} \subseteq \tau_A$. Докажем, что $\bigcap\limits_{i \leqslant n} U_i \in \tau_A$. Рассмотрим $U_i$ такие, что $U_i \in \tau_m$, и обозначим $\lambda' = \{U_i : U_i \in \tau_m\}$. Тогда

$$\bigcap_{i \leqslant n} U_i = \left(\bigcap\{U_i : U_i \in \lambda'\}\right) \bigcap \left(\bigcap\{U_i : U_i \in \lambda \setminus \lambda'\}\right).$$

Для $\bigcap\{U_i : U_i \in \lambda'\}$ имеем, что $\bigcap\{U_i : U_i \in \lambda'\} = X \setminus K$, где $K$ конечно. Также $\bigcap\{U_i : U_i \in \lambda \setminus \lambda'\} = A \setminus K'$, где $K'$ конечно.

Тогда $\bigcap\limits_{i \leqslant n} U_i = (X \setminus K) \bigcap (A \setminus K') = A \setminus (K \cup K')$ и, следовательно, $\bigcap\limits_{i \leqslant n} U_i \in \tau_A$. □

Будем говорить, что множество $A$ порождает топологию $\tau_A$. Нам будет полезна следующая

**Лемма 1.** *Пространство $X$ наследственно компактно тогда и только тогда, когда для любого семейства открытых множеств $\gamma = \{U\}$ существует конечное подсемейство $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$.*

Доказательство. Пусть $X$ наследственно компактно. Докажем, что для любого семейства открытых множеств $\gamma = \{U\}$ существует конечное подсемейство $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$.

Рассмотрим произвольное семейство открытых множеств $\gamma = \{U\}$. Подмножество $\bigcup\{U : U \in \gamma\} \subseteq X$, значит, $\bigcup\{U : U \in \gamma\}$ компактно. Семейство $\gamma$ — открытое покрытие множества $\bigcup\{U : U \in \gamma\}$. Тогда существует конечное подпокрытие $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$.

Пусть для каждого семейства открытых множеств $\gamma = \{U\}$ существует конечное подсемейство $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$. Докажем, что $X$ наследственно компактно.

Пусть $A$ — произвольное подмножество $X$, $\gamma = \{U\}$ — произвольное открытое в $A$ покрытие множества $A$. Тогда существует семейство $\gamma_x = \{U_x\}$ открытых в $X$ множеств, где $U_x \cap A = U$ для любого $U \in \gamma$. Следовательно, существует конечное подсемейство $\gamma'_x \subseteq \gamma_x$ такое, что $\bigcup\{U_x : U_x \in \gamma'_x\} = \bigcup\{U_x : U_x \in \gamma_x\}$. Значит, семейство $\gamma' = \{U : U = U_x \cap A, U_x \in \gamma'_x\}$ будет конечным подпокрытием множества $A$. Следовательно, любое подмножество $A \subseteq X$ компактно, а значит, $X$ наследственно компактно. $\square$

**Лемма 2.** *Пространство $X$ с топологией $\tau_A$ является наследственно компактным $T_1$-пространством.*

Доказательство. Пусть $X_0$ — произвольное подмножество $X$ и $\lambda = \{U\}$ — произвольное открытое покрытие $X_0$, то есть $X_0 \subseteq \bigcup\{U : U \in \lambda\}$. Докажем, что $X_0$ — компактно. Если $X_0 \setminus A \neq \varnothing$, то найдется $U \in \lambda$ такое, что $U \in \tau_m$, следовательно, $X_0 \setminus U$ конечно. Тогда найдется конечное число элементов из $\lambda$, покрывающих $X_0 \setminus U$. Пусть $X_0 \subseteq A$. Но тогда для любого $U \in \lambda$ имеем, что $X_0 \setminus U$ конечно, следовательно, найдется конечное число элементов из $\lambda$, покрывающих $X_0 \setminus U$. Следовательно, $X$ наследственно компактно. $\square$

Напомним следующее

**Определение 6.** Топология $\tau_A$ *мажорирует* топологию $\tau_B$, $\tau_B \leqslant \tau_A$, если $\tau_B \subseteq \tau_A$. Если найдутся $U \in \tau_A$ и $V \in \tau_B$ такие, что $U \notin \tau_B$ и $V \notin \tau_A$, то топологии называются *несравнимыми*.

**Лемма 3.** *Для любых множеств $A, B \in \tau_A \setminus \tau_m$ таких, что $A \setminus B$ бесконечно, следует, что топология $\tau_A$ несравнима с топологией $\tau_B$.*

Доказательство. Покажем, что $A \notin \tau_B$. Действительно, нельзя представить множество $A$ в виде $A = B \setminus K$, так как по условию $A$ содержит бесконечно много точек, не лежащих в $B$. Покажем, что $B \notin \tau_A$. Действительно, множество $B$ нельзя представить в виде $B = A \setminus K$, так как по условию множество $A \setminus B$ бесконечно. $\square$

Напомним, что симметрической разностью множеств $A$ и $B$ называется множество $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

**Определение 7.** Семейство $\sigma$ подмножеств множества $X$ назовем *существенным*, если для любых $A, B \in \sigma$ таких, что $A \neq B$, следует $A \triangle B$ бесконечно.

На множестве всех существенных семейств можно ввести отношение частичного порядка по включению, то есть $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ как подсемейство.

**Лемма 4.** *Пусть $X$ — бесконечное множество мощности $\tau$. Тогда на $X$ найдется существенное семейство множеств $\sigma$ подмножеств $X$ такое, что $|\sigma| = 2^\tau$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Sigma$ — множество всех существенных семейств подмножеств $X$, упорядоченных с указанным частичным порядком. Покажем, что в $\Sigma$ существует максимальный элемент.

Рассмотрим $\xi = \{\sigma\}$ — произвольную цепь, состоящую из существенных семейств. Покажем, что в $\Sigma$ для $\xi$ существует мажорирующий элемент. Пусть $\widehat{\sigma} = \bigcup\{\sigma : \sigma \in \xi\}$. Тогда $\widehat{\sigma}$ также является существенным семейством. Действительно, пусть $A, B \in \widehat{\sigma}$. Тогда найдутся $\sigma_1 \in \xi$ и $\sigma_2 \in \xi$ такие, что $A \in \sigma_1$ и $B \in \sigma_2$. Так как $\sigma_1$ и $\sigma_2$ есть элементы цепи $\xi$, то они сравнимы. Пусть для определенности $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, то есть $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Тогда $A, B \in \sigma_2$, и так как $\sigma_2$ существенно, то $A \vartriangle B$ бесконечно.

Очевидно, что для любого $\sigma \in \xi$ имеем $\sigma \leqslant \widehat{\sigma}$, следовательно, существует мажорирующий элемент. Таким образом, каждая цепь из $\Sigma$ имеет мажорирующий элемент, следовательно, по принципу максимального элемента во всем множестве $\Sigma$ найдется максимальный элемент.

Пусть $\exp X$ — множество всех подмножеств множества $X$. Рассмотрим максимальный элемент $\sigma_0 \in \Sigma$. Тогда $\exp X \setminus \sigma_0$ состоит только из множеств $A$, для которых найдется $U \in \sigma_0$ такое, что $A \vartriangle U$ конечно. В противном случае $A \cup \sigma_0$ — существенное семейство и $\sigma_0 \subseteq A \cup \sigma_0$, что противоречит максимальности $\sigma_0$.

Для каждого $U \in \sigma_0$ рассмотрим семейство $\lambda_U = \{A \subseteq X : A \vartriangle U \text{ конечно}\}$. Всякое $A \in \lambda_U$ получается из $U$ вычитанием или добавлением конечного множества точек из $X$. Следовательно, $|\lambda_U| = \tau$. Таким образом, $\exp X = \sigma_0 \cup \bigcup\{\lambda_U : U \in \sigma_0\}$. Получаем, что $|\bigcup\{\lambda_U : U \in \sigma_0\}| = |\sigma_0| \cdot \tau$. Отсюда следует, что $2^\tau = |\exp X| = |\sigma_0| \cdot \tau$. Значит, $|\sigma_0| = 2^\tau$. □

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая

**Теорема 1.** *На множестве $X$ мощности $\tau$ существует $2^\tau$ попарно несравнимых наследственно компактных $T_1$-топологий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 4 на множестве $X$ найдется существенное семейство множеств $\sigma$ такое, что $|\sigma| = 2^\tau$. По лемме 3 для любых $A, B \in \sigma$ получаем, что топологии $\tau_A$ и $\tau_B$ несравнимы. □

**Замечание 1.** В максимальном существенном семействе подмножеств бесконечного множества $X$ существует единственное конечное множество и существует единственное множество вида $X \setminus K$, где $K$ конечно.

Заметим также, что для любого $A \in \tau_m$ имеем $\tau_A = \tau_m$.

**Теорема 2.** *Пусть $\sigma_0$ — максимальное существенное семейство подмножеств бесконечного множества $X$, $T = \{\tau_A : A \subseteq X\}$ — семейство всех $\tau_A$-топологий на множестве $X$. Тогда*

*(1) для любых двух множеств $A, B \in \sigma_0 \setminus \tau_m$ не существует топологии $\tau_C \in T$ мажорирующей топологии $\tau_A$ и $\tau_B$;*

*(2) для всякого множества $A \in \exp X \setminus (\sigma_0 \cup \tau_m)$ существует единственное $B \in \sigma_0 \setminus \tau_m$ такое, что для $\tau_A$ и $\tau_B$ есть мажоранта $\tau_C \in T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $A, B \in \sigma_0 \setminus \tau_m$. Предположим, что существует $C \subseteq X$ такое, что $\tau_A \subseteq \tau_C$ и $\tau_B \subseteq \tau_C$. Тогда $A, B \in \tau_C$, следовательно, они получаются из $C$ выбрасыванием конечных множеств. Но это противоречит тому, что $A \vartriangle B$ бесконечно.

(2) Пусть $A \in \exp X \setminus (\sigma_0 \cup \tau_m)$. В силу максимальности семейства $\sigma_0$ найдется $B \in \sigma_0$ такое, что $A \vartriangle B$ конечно. Тогда $\tau_A \subseteq \tau_{A\cup B}$ и $\tau_B \subseteq \tau_{A\cup B}$.

Докажем единственность $B$. Предположим, что существует $C \in \sigma_0$, $C \neq B$, такое, что для $A$ и $C$ найдется $D \in \exp X$ такое, что $\tau_A \subseteq \tau_D$ и $\tau_C \subseteq \tau_D$. Тогда $A$ и $C$ получаются из $D$ выбрасыванием конечного числа точек, следовательно, $A \vartriangle C$ конечно. При этом $A \vartriangle B$ конечно. Тогда $A \vartriangle B$ конечно, что противоречит тому, что $A$ и $B$ существенно различны. □

**Теорема 3.** *Топология, мажорирующая все наследственно компактные $T_1$-топологии на множестве $X$, является дискретной.*

Доказательство. Каждое множество $A \subseteq X$ порождает соответственно топологию $\tau_A$. В топологии $\tau_A$ множество $A$ открыто.

Рассмотрим семейство $\sigma = \{\tau_A : A \subseteq X\}$. Мажорантой семейства $\sigma$ будет топология $\tau_\sigma$ такая, что $\tau_A \subseteq \tau_\sigma$ для любого $A \subseteq X$. Следовательно, в топологии $\tau_\sigma$ любое множество $A \subseteq X$ будет открыто, а значит, $\tau_\sigma$ — дискретная топология. $\square$

## § 3. Свойства наследственно компактных пространств

Наряду с известным критерием о том, что пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение, получена

**Теорема 4.** *Пространство $X$ наследственно компактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы замкнутых множеств $\gamma = \{F\}$ найдется конечная подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ такая, что $\bigcap\{F : F \in \gamma'\} = \bigcap\{F : F \in \gamma\}$.*

Доказательство. Пусть $X$ наследственно компактно. Рассмотрим произвольную центрированную систему замкнутых множеств $\gamma = \{F\}$. Тогда $\lambda = \{U_F = X \setminus F : F \in \gamma\}$ — семейство открытых множеств. В силу леммы 1 существует конечное подсемейство $\lambda' \subseteq \lambda$ такое, что $\bigcup\{U_F : U_F \in \lambda'\} = \bigcup\{U_F : U_F \in \lambda\}$. Обозначим систему множеств $F$ таких, что $U_F \in \lambda'$ через $\gamma'$. Тогда $\bigcup\{U_F : U_F \in \lambda'\} = \bigcup\{X \setminus F : F \in \gamma'\} = X \setminus \bigcap\{F : F \in \gamma'\}$ и $\bigcup\{U_F : U_F \in \lambda\} = X \setminus \bigcap\{F : F \in \gamma\}$. Тогда $\bigcap\{F : F \in \gamma\} = \bigcap\{F : F \in \gamma'\}$, следовательно, $\{F : F \in \gamma'\}$ — искомое конечное подсемейство системы $\gamma$.

Предположим, что для любой центрированной системы замкнутых множеств $\gamma = \{F\}$ найдется конечная подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ такая, что $\bigcap\{F : F \in \gamma'\} = \bigcap\{F : F \in \gamma\}$. Докажем, что $X$ наследственно компактно.

Пусть $\lambda = \{U\}$ — произвольное семейство открытых множеств. Докажем, что существует конечное подсемейство $\lambda' \subseteq \lambda$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \lambda'\} = \bigcup\{U : U \in \lambda\}$. Предположим противное, пусть из семейства $\lambda$ нельзя выделить такого конечного подсемейства.

Рассмотрим систему множеств $\gamma = \{F_U = X \setminus U : U \in \lambda\}$. Тогда, в силу нашего предположения, система $\gamma$ центрирована и состоит из замкнутых множеств. Следовательно, найдется конечная подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ такая, что $\bigcap\{F_U : F_U \in \gamma'\} = \bigcap\{F_U : F_U \in \gamma\}$. Тогда $\lambda' = \{U = X \setminus F_U : F_U \in \gamma'\} \subseteq \lambda$ — конечное подсемейство $\lambda$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \lambda'\} = \bigcup\{U : U \in \lambda\}$. Получаем противоречие с предположением, что из семейства $\lambda$ нельзя выделить такого конечного подсемейства. В силу леммы 1 пространство $X$ является наследственно компактным. $\square$

Следующая теорема показывает связь произвольного наследственно компактного пространства и минимального $T_1$-пространства.

**Теорема 5.** *Пространство $X$ наследственно компактно тогда и только тогда, когда в любом бесконечном подмножестве $A \subseteq X$ есть бесконечное $T_1$-минимальное подпространство.*

Доказательство. Пусть $X$ — наследственно компактно. Предположим, что существует бесконечное $A \subseteq X$ такое, что в $A$ нет бесконечного подпространства с минимальной $T_1$-топологией.

Построим систему открытых множеств $\{U_i : i \in \omega\}$ такую, что для любого $n \in \omega$ выполнены следующие условия:

(1) $A \setminus \{U_i : i \leqslant n\}$ бесконечно;

(2) $U_{n+1} \setminus \{U_i : i \leqslant n\} \neq \varnothing$.

Из нашего предположения следует, что $A$ как подпространство пространства $X$ не является минимальным $T_1$-пространством. Следовательно, найдется открытое в $X$ множество $U_0$ такое, что $A \setminus U_0$ бесконечно.

Пусть для $n \in \omega$ построено семейство $\{U_i : i \leqslant n\}$, удовлетворяющее условиям (1), (2). Построим множество $U_{n+1}$. По нашему предположению, $X' = A \setminus \{U_i : i \leqslant n\}$ бесконечно и не является минимальным $T_1$-пространством. Следовательно, найдется открытое в $X$ множество $U$ такое, что $U \cap X' \neq \varnothing$ и $X' \setminus U$ бесконечно. Положим $U_{n+1} = U$. Проводя индукцию по всем $n \in \omega$, получим систему открытых множеств $\gamma = \{U_i : i \in \omega\}$, удовлетворяющую условиям (1), (2).

Из построения системы $\gamma$ для каждого $n \in \omega$ имеем, что $\bigcup\limits_{i \leqslant n} U_i \neq \bigcup\limits_{i \in \omega} U_i$ и $U_{n+1} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_i \neq \varnothing$. Тогда из системы $\gamma$ нельзя выделить конечной подсистемы $\gamma'$ такой, что $\bigcup\{U_i : U_i \in \gamma'\} = \bigcup\{U_i : U_i \in \gamma\}$. Следовательно, в силу леммы 1 $X$ не является наследственно компактным, что противоречит условию теоремы. Тогда в любом бесконечном подмножестве $A \subseteq X$ есть бесконечное $T_1$-минимальное подпространство.

Пусть в любом бесконечном подмножестве $A \subseteq X$ есть бесконечное $T_1$-минимальное подпространство. Докажем, что $X$ наследственно компактно.

Предположим противное, пусть существует не компактное подпространство $A \subseteq X$. Построим последовательность $\{x_i \in A : i \in \omega\}$ и систему открытых множеств $\{U_i : i \in \omega\}$ такие, что

(1) $x_i \in U_i$;

(2) $A \setminus \bigcup\{U_i : i \leqslant n\}$ бесконечно для любого $n \in \omega$;

(3) $x_n \notin \bigcup\{U_i : i < n\}$.

Пусть $\gamma = \{U\}$ — открытое покрытие $A$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Пусть $x_0 \in A$ — произвольная точка. Так как $\gamma$ — покрытие, то найдется множество $U_0 \in \gamma$ такое, что $x_0 \in U_0$. В силу нашего предположения о $\gamma$ следует, что $A \setminus U_0$ — бесконечно.

Пусть построены $\{x_i : i < n\}$ и $\{U_i : i < n\}$. Строим $x_n$ и $U_n$ по следующему правилу: $A \setminus \bigcup\{U_i : i < n\}$ бесконечно, значит, найдется $x_n \in A \setminus \bigcup\{U_i : i < n\}$. Так как $\gamma$ — покрытие $A$, то найдется $U \in \gamma$ такое, что $x_n \in U$. Обозначим это $U$ через $U_n$. Проводя индукцию для всех $n \in \omega$, получаем последовательность $\{x_i \in A : i \in \omega\}$ и систему открытых множеств $\{U_i : i \in \omega\}$, удовлетворяющие условиям (1)–(3).

Обозначим $F = \{x_i \in A : i \in \omega\}$. Покажем, что в $F$ нет бесконечного минимального $T_1$-подпространства. Рассмотрим произвольное бесконечное $F' \subseteq F$. Зафиксируем $n_0 \in \omega$ и рассмотрим подмножество $F'' = \{x_n \in F' : n \leqslant n_0\}$. Но $F'' = F' \bigcap (\bigcup\limits_{i \leqslant n_0} U_i)$ является открытым и конечным подмножеством $F'$. Следовательно, в $F$ нет бесконечного минимального $T_1$-пространства, так как в нем открыты только бесконечные подмножества, являющиеся дополнениями до конечных подмножеств. Получаем противоречие, что существует не компактное подпространство $A \subseteq X$. Следовательно, $X$ наследственно компактно. □

В следующих теоремах рассматривается свойство сохранения наследственной компактности при произведениях пространств. Нам потребуется

**Лемма 5** (Дж. Александер, см. [5, с. 39–40]). *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда выделение конечного подпокрытия допускает каждое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии.*

**Теорема 6.** *Тихоновское произведение конечного числа наследственно компактных $T_1$-пространств является наследственно компактным $T_1$-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ — тихоновское произведение и $X_i$ — наследственно компактное пространство для каждого $i \leqslant n$. Для доказательства теоремы воспользуемся леммой Александера. Рассмотрим предбазу тихоновской топологии $B = \{W = \pi_i^{-1}(U) : U$ открыто в $X_i\}$, составленную из прообразов открытых подмножеств пространств $X_i$.

Пусть $A \subseteq X$ — произвольное подмножество тихоновского произведения. Тогда семейство $B_A = \{W \cap A : W \in B\}$ является предбазой топологии подпространства $A$.

Пусть $\lambda = \{W\}$ — произвольное открытое покрытие множества $A$ элементами предбазы $B$. Покажем, что из $\lambda$ можно выделить конечное подпокрытие.

Всякое множество $W \in \lambda$ имеет вид $W = \pi_i^{-1}(U)$, где $U$ — открытое подмножество $X_i$. Для каждого $W \in \lambda$ найдется номер $i$ такой, что $W = \pi_i^{-1}(\pi_i(W))$. Обозначим такой номер через $i(W)$. Для всех $i \leqslant n$ пусть $\lambda_i = \{W \in \lambda : i(W) = i\}$.

Рассмотрим $\widehat{\lambda}_i = \{\pi_i(W) : W \in \lambda_i\}$ — систему открытых в $X_i$ множеств. Так как $X_i$ наследственно компактно, то в силу леммы 1 найдется конечная подсистема $\widehat{\lambda}'_i = \{\pi_i(W_j)\}_{j\leqslant k_i}$ такая, что $\bigcup\limits_{j\leqslant k_i} \pi_i(W_j) = \bigcup\{\pi_i(W) : W \in \lambda_i\}$. Обозначим $\lambda'_i = \{W_j = \pi_i^{-1}(\pi_i(W))\}_{j\leqslant k_i} = \{W_j\}_{j\leqslant k_i}$.

Пусть $O_i = \bigcup\{W_j : W_j \in \lambda'_i\}$. Пусть $x \in A$. Тогда найдется $W \in \lambda$ такое, что $x \in W$. Но $W \in \lambda_i$ для некоторого $i$, следовательно, $x \in O_i = \bigcup\{W_j : W_j \in \lambda'_i\}$. Таким образом, $\bigcup\limits_{i\leqslant n} \lambda'_i$ и является искомым конечным подпокрытием покрытия $\lambda$.

Тогда по лемме 5 $A$ компактно, следовательно, $X$ наследственно компактно. □

Следующая теорема отвечает на вопрос, сохраняется ли наследственная компактность при бесконечном числе сомножителей в произведении.

**Теорема 7.** *Тихоновское произведение бесконечного числа неодноточечных наследственно компактных $T_1$-пространств не является наследственно компактным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $(x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ тихоновского произведения. Тогда $X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}$ — открытое множество в $X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Следовательно, $\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\})$ — открытое множество в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Тогда система $\gamma = \{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus (x_\alpha)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия.

Действительно, рассмотрим произвольное конечное подпокрытие $\gamma' = \{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) : \alpha \in A', A' \subseteq A \text{ конечно}\}$. Тогда

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus \bigcup\{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) : \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) \in \gamma'\} = \{(y_\alpha) : y_\alpha = x_\alpha, \alpha \in A'\},$$

следовательно, $\gamma'$ не является подпокрытием $\gamma$. Тогда $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ не является наследственно компактным пространством. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Groot Y. An isomorphism principle in general topology // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. № 3. P. 465–467.

2. Архангельский А.В. Отображения и пространства // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. № 4. С. 133–183.

3. Архангельский А.В., Пономарёв В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.

4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

5. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 336 с.

Поступила в редакцию 22.07.2013

МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 3

Воронов Михаил Евгеньевич, студент, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: mevoronov@gmail.com

***M. E. Voronov***
**On compact $T_1$-spaces**

*Keywords*: compactness, minimal $T_1$-topology, Tychonoff product.

Mathematical Subject Classifications: 54D10, 54D30

We consider spaces, any subspaces of which are compact. We call such spaces hereditarily compact. The present work covers questions on the existence and methods of constructing hereditarily compact $T_1$-topologies. We prove the existence of $2^\tau$ pairwise incomparable hereditarily compact $T_1$-topologies on an infinite set $X$ of power $\tau$. The characteristics of hereditarily compact spaces are obtained. It is proved that the Tychonoff product of a finite number of hereditarily compact $T_1$-spaces is a hereditarily compact $T_1$-space, but the Tychonoff product of an infinite number of nonsingleton hereditarily compact $T_1$-spaces is not hereditarily compact.

## REFERENCES

1. de Groot Y. An isomorphism principle in general topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 3, pp. 465–467.
2. Arkhangel'skii A.V. Maps and spaces, *Usp. Mat. Nauk*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 133–183.
3. Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh* (Fundamentals of general topology through problems and exercises), Moscow: Nauka, 1974, 424 p.
4. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 752 p.
5. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Basic design), Moscow: Fizmatlit, 2006, 336 p.

Received 22.07.2013

Voronov Mikhail Evgen'evich, student, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: mevoronov@gmail.com