УДК 517.917

© *Е. И. Бравый*

О НЕУЛУЧШАЕМЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости периодической краевой задачи для всех линейных функционально-дифференциальных уравнений второго порядка с заданной нормой функционального оператора.

Ключевые слова: линейные уравнения с последействием, периодическая краевая задача, периодические решения, функционально-дифференциальные уравнения.

Введение

Рассмотрим периодическую краевую задачу для линейного функционально-дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2 x(t) = -(Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,\omega], & (0.1)\\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), & (0.2) \end{cases}$$

где $x \in \mathbf{AC}^1[0,\omega]$, $\omega > 0$, $a \geqslant 0$, $T : \mathbf{C}[0,\omega] \to \mathbf{L}[0,\omega]$ — линейный положительный оператор, $f \in \mathbf{L}[0,\omega]$.

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}[0,\omega]$ — банахово пространство непрерывных функций $x : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}} = \max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$; $\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}[0,\omega]$ — банахово пространство суммируемых функций $z : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|z\|_{\mathbf{L}} = \int_0^\omega |z(t)|\,dt$; $\mathbf{AC}^1 \equiv \mathbf{AC}^1[0,\omega]$ — банахово пространство функций $x : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ с абсолютно непрерывной производной и нормой $\|x\|_{\mathbf{AC}^1} = |x(0)| + |\dot{x}(0)| + \|\ddot{x}\|_{\mathbf{L}}$; линейный оператор $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ называется положительным, если он отображает неотрицательные функции в почти всюду неотрицательные. Будем называть краевую задачу (0.1)–(0.2) однозначно разрешимой, если при каждом $f \in \mathbf{L}[0,\omega]$ существует единственное решение $x \in \mathbf{AC}^1[0,\omega]$, удовлетворяющее периодическим условиям (0.2) и почти всюду на $[0,\omega]$ уравнению (0.1).

Уравнение второго порядка (0.1) играет важную роль при исследовании автоколебательных процессов в системах, описываемых дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями. К периодической краевой задаче (0.1)–(0.2) с, вообще говоря, невольтерровым оператором $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ приводит поиск периодических решений дифференциальных уравнений с последействием. Рассмотрим, например, уравнение с сосредоточенным запаздывающим аргументом

$$\ddot{x}(t) + a^2 x(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) x(\tau_i(t)) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

где $f, p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, — локально суммируемые ω-периодические функции, $\tau_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, — измеримые функции, удовлетворяющие неравенству $\tau_i(t) \leqslant t$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Уравнение (0.3) имеет абсолютно непрерывное вместе со своей производной ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда периодическая краевая задача (0.1)–(0.2) имеет решение при операторе $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, определенном равенством

$$(Tx)(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(\tau_i(t) - [\tau_i(t)/\omega]\omega), \quad t \in [0, \omega],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Неулучшаемые в определенном смысле условия существования и единственности решения задачи (0.1)–(0.2) и знакоопределенности функции Грина в случае обыкновенного дифференциального уравнения (0.1) получены в работах [1–4] (см. также списки литературы этих работ).

Для функционально-дифференциальных уравнений при $a = 0$ известен результат А. Ломтатидзе и С. Мухигулашвили [5] (см. также [7, 8] для уравнений произвольного порядка и оператора T, представимого в виде разности положительных): если $a = 0$, то задача (0.1)–(0.2) имеет единственное решение при всех $f \in \mathbf{L}$ и всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданной нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \mathcal{T} \leqslant \frac{16}{\omega}. \tag{0.4}$$

Здесь норма положительного оператора $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ определена равенством $\|T\| \equiv \|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} = \int_0^\omega (T\mathbf{1})(t)\,dt$, где $\mathbf{1}\,(t) \equiv 1$ — единичная функция.

Очевидно, что неравенство (0.4) дает возможность получить достаточные условия разрешимости задачи (0.1)–(0.2) и в случае $a \neq 0$. Действительно, из цитированного результата [5] следует, что если

$$\|T + a^2 I\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} = \|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} + a^2\omega \leqslant \frac{16}{\omega},$$

то задача имеет единственное решение (здесь $Ix = x$ при всех $x \in \mathbf{C}$ — оператор тождественного вложения $\mathbf{C}$ в $\mathbf{L}$). Таким образом, при $a \neq 0$ неравенство

$$\mathcal{T} \leqslant \frac{16}{\omega}\left(1 - \frac{a^2\omega^2}{16}\right) \tag{0.5}$$

достаточно для того, чтобы задача (0.1)–(0.2) была однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданной нормой $\|T\| = \mathcal{T} \geqslant 0$.

Может ли константа в правой части неравенства (0.5) быть увеличена? Ответ на этот вопрос дают *необходимые и достаточные* условия разрешимости периодической задачи (0.1)–(0.2) для семейств уравнений (0.1) с положительным оператором T заданной нормы, сформулированные в теореме 1. В подобных необходимых и достаточных условиях всегда присутствуют неулучшаемые константы. Далее в теореме 2 получены условия положительности функции Грина задачи (0.1)–(0.2) при всех положительных операторах T заданной нормы. В § 2 рассматривается задача (0.1)–(0.2) с отрицательным оператором T (теоремы 3, 4). В § 1 и § 2 на оператор T в уравнении (0.1) накладываются интегральные ограничения, а в § 3 (теоремы 5–9 для положительных операторов T) и § 4 (теоремы 10–11 для отрицательных операторов T) — поточечные.

§ 1. Отрицательный оператор с интегральными ограничениями

Здесь получим неулучшаемые условия разрешимости периодической краевой задачи (0.1)–(0.2) с отрицательным оператором в правой части уравнения (0.1).

Теорема 1. *Пусть $a > 0$ и задано неотрицательное число $\mathcal{T}$. Задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение при всех $f \in \mathbf{L}$ и при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots,$ и*

$$\mathcal{T} \leqslant \frac{16}{\omega} \begin{cases} \frac{a\omega}{4}\,\mathrm{ctg}(\frac{a\omega}{4}) & \text{при} \quad 0 < a\omega < 2\pi, \\ \frac{a\omega}{8}|\sin(\frac{a\omega}{2})| & \text{при} \quad a\omega > 2\pi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для доказательства теоремы 1 требуются вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $a \geqslant 0$. *Периодическая задача*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2 x(t) = f(t), \quad t \in [0,\omega], \\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases} \tag{1.2}$$

имеет при каждом $f \in \mathbf{L}$ *единственное решение тогда и только тогда, когда* $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$. *В этом случае решение имеет интегральное представление*

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in [0,\omega], \tag{1.3}$$

где

$$G(t,s) = \frac{\cos\left(\frac{a\omega}{2} - a|t-s|\right)}{2a \sin \frac{a\omega}{2}}, \quad t,s \in [0,\omega]. \tag{1.4}$$

Доказательство. Если $a\omega = 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$, то однородная задача (1.2) (при $f \equiv 0$) имеет нетривиальное решение. Поэтому фредгольмова [6, с. 103, 113–122] задача (1.2) не является однозначно разрешимой. Если $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$, то однородная задача (1.2) не имеет нетривиальных решений. Поэтому фредгольмова задача (1.2) имеет единственное решение при всех $f \in \mathbf{L}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это единственное решение определяется равенствами (1.3)–(1.4). $\square$

Теперь можно получить простое достаточное условие однозначной разрешимости.

Лемма 2. *Если* $a > 0$, $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, *и выполнено неравенство*

$$\|T\| \leqslant 2a \left|\sin \frac{a\omega}{2}\right|,$$

то задача (0.1)–(0.2) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Задача эквивалентна уравнению в пространстве $\mathbf{C}$

$$x(t) = (Ax)(t) + (Gf)(t), \quad t \in [0,\omega],$$

где $A \equiv -GT$ и для каждого $z \in \mathbf{L}$

$$(Gz)(t) \equiv \int_0^\omega G(t,s) z(s)\, ds, \quad t \in [0,\omega].$$

Так как

$$\|A\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{C}} \leqslant \|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} \|G\|_{\mathbf{L}\to\mathbf{C}} \leqslant \max_{t,s\in[0,\omega]} |G(t,s)| \|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} = \frac{\|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}}}{2a\left|\sin \frac{a\omega}{2}\right|},$$

то условие $\|T\| < 2a\left|\sin \frac{a\omega}{2}\right|$ гарантирует сжимаемость оператора A, а следовательно, однозначную разрешимость задачи (0.1)–(0.2). Если $\|T\| = 2a\left|\sin \frac{a\omega}{2}\right|$, то однородная задача (0.1)–(0.2) не может иметь нетривиальное решение, следовательно, задача однозначно разрешима. $\square$

Аналог следующей основной для доказательства леммы содержится в [9].

Лемма 3. *Пусть* $a > 0$, $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, *и пусть задано положительное число* $\mathcal{T}$. *Тогда задача* (0.1)–(0.2) *однозначно разрешима при всех положительных операторах* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ *с нормой* $\|T\| = \mathcal{T}$ *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$\max_{t\in[a,b]} \left(-\min_{s\in[a,b]} G(t,s)\mathcal{T} \right) \leqslant 1, \tag{1.5}$$

и при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, $d \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{T}_1 \geqslant 0,\ \mathcal{T}_2 \geqslant 0,\ \mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2=\mathcal{T},\ 0\leqslant \tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\omega,\ c,d\in[0,\omega], \tag{1.6}$$

выполнено неравенство

$$\Delta \equiv 1+\mathcal{T}_1 G(\tau_1,c)+\mathcal{T}_2 G(\tau_2,d)+\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\left(G(\tau_1,c)\,G(\tau_2,d)-G(\tau_1,d)\,G(\tau_2,c)\right)\geqslant 0 \tag{1.7}$$

или выполнено неравенство

$$\min_{t\in[a,b]}\left(-\max_{s\in[a,b]} G(t,s)\mathcal{T}\right)\geqslant 1, \tag{1.8}$$

и при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6), *выполнено неравенство*

$$\Delta\leqslant 0,$$

причем при каждых $\tau_1\leqslant\tau_2$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ не существует таких множеств положительной меры $E_c\subset[0,\omega]$, $E_d\subset[0,\omega]$, что при всех $c\in E_c$, $d\in E_d$ выполнено равенство $\Delta=0$.

Доказательство. Утверждение леммы для $a=0$ и произвольных краевых условий доказано в [9, теорема 2.29, с. 107]. При $a>0$, $a\omega\neq 2\pi k$, $k=1,2,\ldots$, краевая задача (1.2) однозначно разрешима, и доказательство леммы полностью повторяет доказательство теоремы 2.29 из [9]. □

Отметим, что из равенства (1.4) легко следует, что при $a>0$, $a\neq 2\pi k$, $k=1,2,\ldots$, выполнены равенства

$$\max_{s\in[0,\omega]} G(t,s)=\frac{1}{2a|\sin\frac{a\omega}{2}|}\ \text{при всех}\ t\in[0,\omega], \tag{1.9}$$

$$\min_{s\in[0,\omega]} G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cos\frac{a\omega}{2}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}}\ \text{при всех}\ t\in[0,\omega],\ \text{если}\ a\omega<2\pi,\\[2mm] -\dfrac{1}{2a|\sin\frac{a\omega}{2}|}\ \text{при всех}\ t\in[0,\omega],\ \text{если}\ a\omega>2\pi.\end{cases} \tag{1.10}$$

Поэтому неравенство (1.8) никогда не выполнено, а неравенство (1.5) выполнено тогда и только тогда, когда $a\omega\leqslant\pi$ или когда

$$\mathcal{T}\leqslant\begin{cases}2a|\operatorname{tg}\frac{a\omega}{2}|,\ \text{если}\ a\omega\in(\pi,2\pi),\\ 2a|\sin\frac{a\omega}{2}|,\ \text{если}\ a\omega>2\pi.\end{cases} \tag{1.11}$$

С учетом этого лемму 3 можно привести к более удобному виду.

Лемма 4. *Пусть $a>0$, $a\omega\neq 2\pi k$, $k=1,2,\ldots$, и пусть задано положительное число $\mathcal{T}$. Тогда задача* (0.1)–(0.2) *однозначно разрешима при всех положительных операторах $T:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$ с нормой $\|T\|=\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

(1) *при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, $d\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям* (1.6), *выполнено неравенство*

$$\Delta\geqslant 0;$$

(2) *если $a\omega>\pi$, то выполнено неравенство* (1.11);

(3) *при каждых τ_1, τ_2, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, удовлетворяющих* (1.6), *не существует таких множеств положительной меры $E_c\subset[0,\omega]$, $E_d\subset[0,\omega]$, что при всех $c\in E_c$, $d\in E_d$ выполнено равенство $\Delta=0$.*

Доказательство теоремы 1. Если $a\omega = 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, то нетривиальные решения задачи

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2 x(t) = 0, \quad t \in [0,\omega], \\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases}$$

имеют нули на отрезке $[0,\omega]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой линейный положительный оператор T с нормой $\|T\| = \varepsilon$, для которого однородная задача (0.1)–(0.2) также будет иметь нетривиальное решение, что доказывает утверждение теоремы для таких значений a.

Пусть $2\pi < a\omega \neq 2\pi k$, $k = 2, 3, \ldots$. Учитывая равенства (1.9)–(1.10), легко показать, что если $\mathcal{T} > 2a|\sin\frac{a\omega}{2}|$, то величина Δ, определенная в (1.7), принимает отрицательные значения, поэтому по лемме 4 найдется такой линейный положительный оператор $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$, что задача (0.1)–(0.2) не является однозначно разрешимой.

Если $\mathcal{T} \leqslant 2a|\sin\frac{a\omega}{2}|$, то по лемме 2 при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ задача (0.1)–(0.2) является однозначно разрешимой.

Рассмотрим теперь случай $a\omega \in (0,\pi]$. Легко видеть, что функция Грина $G(t,s)$, определенная равенством (1.4), неотрицательна, причем

$$\max_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{1}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} = G(\theta + \frac{\omega}{2}, \theta) = G(\tau, \tau + \frac{\omega}{2}), \quad \tau, \theta \in [0, \omega/2],$$
$$\min_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{\cos\frac{a\omega}{2}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} = G(\theta,\theta) = G(\omega,0) = G(0,\omega), \quad \theta \in [0,\omega].$$

Величина Δ принимает минимальное значение, если

$$G(\tau_1, c) = G(\tau_2, d) = \min_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s), \quad G(\tau_1, d) = G(\tau_2, c) = \max_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s).$$

Это возможно только в одном из трех случаев: (1) $\tau_1 = c$, $\tau_2 = d$, $\tau_2 - \tau_1 = \omega/2$;

(2) $\tau_1 = c = \omega/2$, $\tau_2 = \omega$, $d = 0$; (3) $\tau_2 = d = \omega/2$, $c = \omega$, $\tau_1 = 0$.

В каждом из этих случаев при фиксированных $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ величина Δ принимает следующее минимальное значение:

$$\Delta = 1 + \frac{\mathcal{T}\cos\frac{a\omega}{2}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\left(\frac{\cos^2\frac{a\omega}{2}}{4a^2\sin^2\frac{a\omega}{2}} - \frac{1}{4a^2\sin^2\frac{a\omega}{2}}\right) = 1 + \frac{\mathcal{T}\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{2}}{2a} - \frac{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2}{4a^2}.$$

Теперь на множестве таких неотрицательных $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, что $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$, минимальное значение Δ принимает при $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}/2$. Это значение определено равенством

$$\Delta = 1 + \frac{\mathcal{T}\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{2}}{2a} - \frac{\mathcal{T}^2}{16a^2}.$$

Это значение положительно только в том случае, когда

$$\mathcal{T} < 4a\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{4}.$$

Если $\mathcal{T} > 4a\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{4}$, то величина Δ принимает отрицательные значения. Если $\mathcal{T} = 4a\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{4}$, то при фиксированных τ_1, τ_2, $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ множество тех c и d, при которых $\Delta = 0$, имеет нулевую меру. Таким образом, утверждение теоремы следует из леммы 4.

Пусть теперь $\pi \leqslant a\omega < 2\pi$. Найдем минимальное значение Δ при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6). Минимальное и максимальное значения $G(t,s)$ определяются как и при $a\omega \in (0,\pi]$, но минимальное значение отрицательно при $a\omega > \pi$.

Очевидно, что если $\mathcal{T} > \mathcal{T}^* \equiv 4a\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{4}$, то минимальное значение Δ отрицательно. Покажем, что если $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}^*$, то все значения Δ неотрицательны. Обозначим $\alpha \equiv \min_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s)$, $\beta \equiv \max_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s)$. Имеем $\beta \geqslant |\alpha|$.

При фиксированных $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ минимум Δ не меньше одного из следующих двух значений:

$$\Delta_1 = 1 + \mathcal{T}_1\alpha + \mathcal{T}_2\alpha + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(\alpha^2 - \beta^2),$$
$$\Delta_2 = 1 + \mathcal{T}_1\alpha + \mathcal{T}_2\beta + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(\alpha\beta - \beta^2).$$

Из рассмотрения предыдущего случая $a\omega \in (0, \pi]$ следует, что $\Delta_1 \geqslant 0$ во всех возможных параметрах, и условие (3) леммы 4 выполнено.

Во втором случае при $\mathcal{T}_1 = m\gamma\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}_2 = (1-m)\gamma\mathcal{T}^*$, $m \in [0,1]$, $\gamma \in (0,1]$, имеем

$$\Delta_2 = 1 + m\gamma\mathcal{T}^* \frac{\cos\frac{a\omega}{2}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} + (1-m)\gamma\mathcal{T}^* \frac{1}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} - \frac{(1-m)m\gamma^2\mathcal{T}^{*2}}{4a^2\cos^2\frac{a\omega}{4}}.$$

После элементарных преобразований получаем, что

$$\Delta_2 = 1 - 2\gamma m + \frac{\gamma - 2(1-m)m\gamma^2}{\sin^2\frac{a\omega}{4}} \geqslant 1 + \gamma - 2m\gamma(1 + (1-m)\gamma) \geqslant 0$$

при всех $m \in [0,1]$, $\gamma \in [0,1]$. Кроме того, очевидно, что условия (2) и (3) леммы 4 выполнены. Применение леммы 4 заканчивает доказательство теоремы и в этом случае. □

Если задача (0.1)–(0.2) однозначно разрешима, то ее решение при каждой функции $f \in \mathbf{L}$ имеет интегральное представление

$$x(t) = \int_0^\omega \mathcal{G}(t,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,\omega],$$

где функция $\mathcal{G}(t,\cdot)$ (функция Грина этой задачи) при каждом $t \in [0,\omega]$ ограничена в существенном. Будем говорить, что функция Грина $\mathcal{G}(t,s)$ неотрицательна (неположительна), если при каждом $t \in [0,\omega]$ при почти всех $s \in [0,\omega]$ выполнено неравенство $\mathcal{G}(t,s) \geqslant 0$ ($\mathcal{G}(t,s) \geqslant 0$). Функция Грина $\mathcal{G}(t,s)$ сохраняет знак, если она неотрицательна или неположительна.

Условия сохранения знака функции Грина, эквивалентные условиям применимости аналогов теоремы о дифференциальном неравенстве, важны для различных приложений. При нулевом операторе T имеем $\mathcal{G}(t,s) = G(t,s)$, и $\mathcal{G}(t,s)$ сохраняет знак тогда и только тогда, когда $a\omega \in (0,\pi]$ (при этом $\mathcal{G}(t,s) \geqslant 0$ при $t,s \in [0,\omega]$).

Получим условия неотрицательности $\mathcal{G}(t,s)$ при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданной нормой.

Теорема 2. *Пусть $a > 0$ и задано неотрицательное число $\mathcal{T}$. Периодическая задача* (0.1)–(0.2) *однозначно разрешима, и ее функция Грина неотрицательна при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

$$a\omega \in (0,\pi], \quad \mathcal{T} \leqslant 2a\,\mathrm{ctg}\,\frac{a\omega}{2}.$$

Воспользуемся очевидной модификацией теоремы 4.8 работы [9], которую сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть $a \neq 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$, задано неотрицательное число $\mathcal{T}$, выполнены условия* (1.1) *теоремы* 1. *Для того чтобы функция Грина периодической задачи* (0.1)–(0.2) *была неотрицательна при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы функция Грина периодической задачи*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2x(t) = -p(t)x(\tau) + f(t), & t \in [0,\omega], \\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases} \tag{1.12}$$

была неотрицательна при всех $\tau \in [0,\omega]$ и при всех таких неотрицательных функциях $p \in \mathbf{L}$, что $\|p\|_{\mathbf{L}} = \mathcal{T}$.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся леммой 5. В условиях теоремы 2 задача (1.12) однозначно разрешима, ее функция Грина имеет представление

$$\mathcal{G}(t,s) = G(t,s) - \frac{G(\tau,s)\displaystyle\int_0^\omega G(t,\theta)p(\theta)\,d\theta}{1+\displaystyle\int_0^\omega G(\tau,\theta)p(\theta)\,d\theta}, \quad t,s\in[0,\omega].$$

Если $G(t,s)$ принимает отрицательные значения, то и $\mathcal{G}(t,s)$ принимает неотрицательные значения при достаточно малых $\|p\|_{\mathbf{L}}$. Так как функция $G(t,s)$ неотрицательна тогда и только тогда, когда $0 < a\omega \leqslant \pi$, пусть далее это неравенство выполнено. При фиксированных t, s, $\tau \in [0,\omega]$ точная нижняя грань значений $\mathcal{G}(t,s)$ при всех неотрицательных суммируемых p с нормой $\|p\|_{\mathbf{L}} = \mathcal{T}$ равна

$$G(t,s) - \max_{\theta\in[0,\omega]} \frac{G(\tau,s)G(t,\theta)\mathcal{T}}{1+G(\tau,\theta)\mathcal{T}}.$$

Следовательно, функция $\mathcal{G}(t,s)$ неотрицательна тогда и только тогда, когда при всех t, s, τ, $\theta\in[0,\omega]$ выполнено неравенство

$$G(t,s) + \mathcal{T}(G(t,s)G(\tau,\theta) - G(\tau,s)G(t,\theta)) \geqslant 0.$$

Из представления (1.4) для $G(t,s)$ легко вытекает, что последнее неравенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$2a\sin\frac{a\omega}{2}\cos\frac{a\omega}{2} + \mathcal{T}(\cos^2\frac{a\omega}{2} - 1) \geqslant 0,$$

откуда следует утверждение теоремы. □

§ 2. Положительный оператор с интегральными ограничениями

Теперь рассмотрим задачу с положительным оператором в правой части функционально-дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2x(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t\in[0,\omega], & (2.1)\\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), & (2.2)\end{cases}$$

где $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ — линейный положительный оператор.

Известно [5], что если $a = 0$, то задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение при всех $f \in \mathbf{L}$ и всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданной нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $0 < \mathcal{T} \leqslant \frac{16}{\omega}$.

При $a \neq 0$ из [7] следует достаточное условие однозначной разрешимости (2.1)–(2.2) при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с заданной нормой $\|T\| = \mathcal{T} > 0$:

$$\frac{a^2\omega^2}{1-a^2\omega^2/4} \leqslant \mathcal{T}\omega \leqslant 8 + 4\sqrt{4-a^2\omega^2} \quad\text{или}\quad \frac{\mathcal{T}\omega}{1-\mathcal{T}\omega/4} \leqslant a^2\omega^2 \leqslant 8+4\sqrt{4-\mathcal{T}\omega}.$$

В следующем утверждении получено неулучшаемое условие, которое является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (2.1)–(2.2) при всех линейных положительных операторах заданной нормы.

Теорема 3. *Пусть $a > 0$ и задано неотрицательное число $\mathcal{T}$. Задача* (2.1)–(2.2) *имеет единственное решение при всех $f \in \mathbf{L}$, и при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, и*

$$a\omega < \pi, \quad 2a\operatorname{tg}\frac{a\omega}{2} \leqslant \mathcal{T} \leqslant 4a\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{4}$$

или

$$\mathcal{T} \leqslant 2a|\sin\frac{a\omega}{2}|.$$

Для доказательства потребуются вспомогательные утверждения. Лемма 2 переносится на задачу (2.1)–(2.2) без изменений.

Лемма 6. *Если выполнены условия леммы 2, то задача (2.1)–(2.2) однозначно разрешима.*

Сформулируем аналог леммы 3 [9, теорема 2.29, с. 107].

Лемма 7. *Пусть $a > 0$, $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть задано положительное число $\mathcal{T}$. Тогда задача (2.1)–(2.2) однозначно разрешима при всех положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$\max_{t\in[a,b]} \left(\max_{s\in[a,b]} G(t,s)\mathcal{T} \right) \leqslant 1, \tag{2.3}$$

и при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6), выполнено неравенство

$$\Delta \equiv 1 - \mathcal{T}_2 G(\tau_1, d) - \mathcal{T}_1 G(\tau_2, c) + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 \left(G(\tau_1, d)\, G(\tau_2, c) - G(\tau_2, d)\, G(\tau_1, c) \right) \geqslant 0, \tag{2.4}$$

или выполнено неравенство

$$\min_{t\in[a,b]} \left(\min_{s\in[a,b]} G(t,s)\mathcal{T} \right) \geqslant 1, \tag{2.5}$$

и при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6), выполнено неравенство

$$\Delta \leqslant 0,$$

причем при каждых $\tau_1 \leqslant \tau_2$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ не существует таких множеств положительной меры $E_c \subset [0, \omega]$, $E_d \subset [0, \omega]$, что при всех $c \in E_c$, $d \in E_d$ выполнено равенство $\Delta = 0$.

Учитывая равенства (1.9) и (1.10), получаем, что неравенство (2.3) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T} \leqslant 2a|\sin \frac{a\omega}{2}|, \tag{2.6}$$

а неравенство (2.5) выполнено тогда и только тогда, когда $a\omega < \pi$ и

$$\mathcal{T} \geqslant 2a \operatorname{tg} \frac{a\omega}{2}. \tag{2.7}$$

Теперь сформулируем основную лемму.

Лемма 8. *Пусть $a > 0$, $a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть задано положительное число $\mathcal{T}$. Тогда задача (2.1)–(2.2) однозначно разрешима при всех положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

(1) *выполнено неравенство (2.6) и при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6), выполнено неравенство*

$$\Delta \geqslant 0$$

или, если $a\omega < \pi$, выполнено неравенство (2.7) и при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6), выполнено неравенство

$$\Delta \leqslant 0;$$

(2) *выполнено условие (3) леммы 4.*

Доказательство теоремы 3. При $a\omega = 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, доказательство совпадает с доказательством данного случая в теореме 1.

Рассмотрим случай, когда $a\omega \in (0, \pi)$ и неравенство (2.7) выполнено. Как и при доказательстве теоремы (1), легко видеть, что функция Грина $G(t, s)$, определенная равенством (1.4), неотрицательна, причем

$$\max_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{1}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} = G(\theta + \frac{\omega}{2}, \theta) = G(\tau, \tau + \frac{\omega}{2}),\ \ \tau, \theta \in [0, \omega/2],$$
$$\min_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{\cos\frac{a\omega}{2}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} = G(\theta,\theta) = G(\omega, 0) = G(0, \omega),\ \ \theta \in [0, \omega].$$

Обозначим $\alpha \equiv \min_{t,s\in[0,\omega]} G(t, s)$, $\beta \equiv \max_{t,s\in[0,\omega]} G(t, s)$. Имеем $\beta > \alpha > 0$. При фиксированных $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ максимум Δ не больше одного из следующих значений:

$$\Delta_1 = 1 - \mathcal{T}_1\alpha - \mathcal{T}_2\alpha,$$
$$\Delta_2 = 1 - \mathcal{T}_1\alpha - \mathcal{T}_2\beta + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(\alpha\beta - \alpha^2),$$
$$\Delta_3 = 1 - \mathcal{T}_1\beta - \mathcal{T}_2\beta + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(\beta^2 - \alpha^2).$$

Очевидно, что $\Delta_1 \geqslant 0$, если выполнено неравенство (2.7). Максимальное значение Δ_3 принимает, если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}/2$. Тогда

$$\Delta_3 = 1 - \frac{\mathcal{T}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} + \frac{\mathcal{T}^2}{4}\frac{1}{4a^2\sin^2\frac{a\omega}{2}}\Big(1 - \cos^2\frac{a\omega}{2}\Big) = 1 - \frac{\mathcal{T}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} + \frac{\mathcal{T}^2}{16a^2}.$$

Поэтому максимальное значение Δ_3 неположительно тогда и только тогда, когда

$$4a\,\mathrm{tg}\,\frac{a\omega}{4} \leqslant 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{a\omega}{2} \leqslant \mathcal{T} \leqslant 4a\,\mathrm{ctg}\,\frac{a\omega}{4}.$$

Ясно, что если $\mathcal{T} > \mathcal{T}^* \equiv 4a\,\mathrm{ctg}\,\frac{a\omega}{4}$, то Δ может принимать отрицательные значения, поэтому задача не может быть однозначно разрешима при всех положительных операторах T с нормой $\mathcal{T}$. При рассмотрении Δ_2 положим $\mathcal{T}_1 = m\gamma\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}_2 = (1 - m)\gamma\mathcal{T}^*$, где $m \in [0, 1]$,

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{a\omega}{2}}{2\,\mathrm{ctg}\,\frac{a\omega}{4}} = \frac{\sin^2\frac{a\omega}{4}}{1 - 2\sin^2\frac{a\omega}{4}} \leqslant \gamma \leqslant 1$$

и $\sin^2\frac{a\omega}{4} \leqslant 1/3$ (только тогда могут быть выполнены последние неравенства для γ). Тогда имеем

$$\Delta_2 = 1 - m\gamma\mathcal{T}^*\frac{\cos\frac{a\omega}{2}}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} - (1 - m)\gamma\mathcal{T}^*\frac{1}{2a\sin\frac{a\omega}{2}} + \frac{(1 - m)m\gamma^2\mathcal{T}^{*2}\cos\frac{a\omega}{2}}{4a^2(1 + \cos\frac{a\omega}{2})}.$$

После элементарных преобразований получаем, что

$$\Delta_2 = 1 + 2\gamma m - 4m(1 - m)\gamma^2 + \frac{-\gamma + 2m(1 - m)\gamma^2}{\sin^2\frac{a\omega}{4}}.$$

При фиксированных m и γ величина Δ_2 принимает максимальное значение при максимально возможном значении $\sin^2\frac{a\omega}{4} = \frac{\gamma}{1+2\gamma}$. Тогда

$$\Delta_2 = 1 + 2\gamma m - 4m(1 - m)\gamma^2 + \frac{-\gamma + 2m(1 - m)\gamma^2}{\gamma/(1 + 2\gamma)} = 2\gamma(1 - m)^2 \geqslant 0.$$

Кроме того, легко показывается, что условие (2) леммы 8 выполнено во всех разобранных случаях.

Пусть теперь $2\pi < a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, и выполнено неравенство (2.6). Найдем, при каких $\mathcal{T}$ величина Δ, определенная равенством (2.4), неотрицательна при всех $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τ_1, τ_2, c, d, удовлетворяющих условиям (1.6).

Принимая во внимание равенства (1.9)–(1.10), получаем, что при $a\omega > 2\pi$

$$\max_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{1}{2a|\sin\frac{a\omega}{2}|}, \quad \min_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{-1}{2a|\sin\frac{a\omega}{2}|},$$

и легко показать, что минимальное значение Δ неотрицательно, причем и в случае $a\omega < 2\pi$, когда $\min_{t,s\in[0,\omega]} G(t,s) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{2}}{2a}$.

Применение леммы 8 теперь завершает доказательство, так как и в этом случае легко показывается, что условие (2) этой леммы выполнено. □

Следующее утверждение о знаке функции Грина легко доказывается с помощью применения принципа сжимающих отображений.

Теорема 4. *Пусть $a > 0$ и задано неотрицательное число $\mathcal{T}$. Периодическая задача* (2.1)–(2.2) *однозначно разрешима и ее функция Грина неотрицательна при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ с нормой $\|T\| = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда*

$$a\omega \in (0, \pi], \quad \mathcal{T} \leqslant 2a \sin\frac{a\omega}{2}.$$

§ 3. Отрицательный оператор с поточечными ограничениями

Рассмотрим периодическую краевую задачу (0.1)–(0.2) при всех положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, удовлетворяющих условию

$$(T\mathbf{1})(t) = \mathcal{T}, \quad t \in [0, \omega],$$

при заданном неотрицательном числе $\mathcal{T}$. Насколько нам известно, неулучшаемые условия разрешимости периодической краевой задачи при таких ограничениях еще не получены.

Используем следующее общее утверждение:

Лемма 9 (см. [9, 10]). *Пусть p^+, $p^- \in \mathbf{L}$ — неотрицательные функции. Для того чтобы задача*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2 x(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [0, \omega], \\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases}$$

имела только тривиальное решение при всех линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, удовлетворяющих равенствам $T^+\mathbf{1} = p^+$, $T^-\mathbf{1} = p^-$, необходимо и достаточно, чтобы при каждой такой функции $p_2 \in \mathbf{L}$, что $-p^- \leqslant p_2 \leqslant p^+$, и при всех таких точках τ_1, $\tau_2 \in [0, \omega]$, что $\tau_1 < \tau_2$, задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2 x(t) = (p^+(t) - p^-(t) - p_2(t))\, x(\tau_1) + p_2(t)\, x(\tau_2), \ t \in [0, \omega], \\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть функции p^+, $p^- \in \mathbf{L}$ определены равенствами

$$p^+ = 0, \quad p^- = \mathcal{T}^- \mathbf{1}\,.$$

Задача (3.1) имеет только нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет только нетривиальное решение уравнение

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s) \left((-\mathcal{T}^- - p_2(s))x(t_1) + p_2(s)x(t_2) \right) ds, \quad t \in [a, b].$$

Это уравнение имеет только нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет только нетривиальное решение система

$$\begin{cases} x(t_1) = \displaystyle\int_0^\omega G(t_1,s)\left((-\mathcal{T}^- - p_2(s))x(t_1) + p_2(s)x(t_2)\right)\,ds, \\ x(t_2) = \displaystyle\int_0^\omega G(t_2,s)\left((-\mathcal{T}^- - p_2(s))x(t_1) + p_2(s)x(t_2)\right)\,ds, \end{cases} \tag{3.2}$$

относительно скалярных переменных $x(t_1)$, $x(t_2)$. Система (3.2) имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \displaystyle\int_0^\omega G(t_1,s)(-\mathcal{T}^- - p_2(s))\,ds & -\displaystyle\int_0^\omega G(t_1,s)p_2(s)\,ds \\ -\displaystyle\int_0^\omega G(t_2,s)(-\mathcal{T}^- - p_2(s))\,ds & 1 - \displaystyle\int_0^\omega G(t_2,s)p_2(s)\,ds \end{vmatrix} \neq 0.$$

Учитывая, что $\displaystyle\int_0^\omega G(t,s)\,ds = 1/a^2$ при всех $t \in [0,\omega]$, имеем

$$\Delta = (1 + \mathcal{T}^-/a^2)\,(1 + \int_0^\omega (G(\tau_1,s) - G(\tau_2,s))p_2(s)\,ds).$$

Учитывая равенство $\displaystyle\int_0^\omega (G(\tau_1,s) - G(\tau_2,s))\,ds = 0$ при всех $\tau_1,\tau_2 \in [0,\omega]$, получаем, что при всех $p_2 \in \mathbf{L}$, удовлетворяющих условию $-\mathcal{T}^- \leqslant p_2(s) \leqslant 0$, $s \in [0,\omega]$, величина Δ отлична от нуля тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}^- \max_{0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant\omega} \int_0^\omega g^+_{\tau_1,\tau_2}(s)\,ds = \mathcal{T}^- \max_{0\leqslant\tau_2\leqslant\omega} \int_0^\omega g^+_{0,\tau_2}(s)\,ds =$$
$$= \mathcal{T}^- \max_{0\leqslant\tau_2\leqslant\omega} \int_0^\omega \frac{1}{2}|G(0,s) - G(\tau_2,s)|\,ds < 1,$$

где

$$g^+_{\tau_1,\tau_2}(s) \equiv \begin{cases} G(\tau_1,s) - G(\tau_2,s), & \text{если } G(\tau_1,s) \geqslant G(\tau_2,s), \\ 0, \quad \text{если } G(\tau_1,s) < G(\tau_2,s). \end{cases}$$

Таким образом, для того чтобы задача (0.1)–(0.2) была однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, удовлетворяющих условию $T\mathbf{1} = \mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$\mathcal{T} < \frac{1}{\displaystyle\max_{0\leqslant\tau_2\leqslant\omega} \int_0^\omega \frac{1}{2}|G(0,s) - G(\tau_2,s)|\,ds}. \tag{3.3}$$

Если линейный положительный оператор $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ таков, что $T\mathbf{1} \leqslant \mathcal{T}$, и задача (0.1)–(0.2) не является однозначно разрешимой, то однородная задача (0.1)–(0.2) имеет нетривиальное решение. Это решение меняет знак, так как в противном случае решение однородной задачи имело бы вторую производную одного знака и не удовлетворяло периодическим краевым условиям. Так как нетривиальное решение однородной задачи (0.1)–(0.2) имеет нуль, то при любой такой неотрицательной функции $p \in \mathbf{L}$, что $p \geqslant T\mathbf{1}$, найдется такой линейный положительный оператор $\widetilde{T} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, что $T\mathbf{1} = p$ и задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a^2x(t) = -(\widetilde{T}x)(t), & t \in [0,\omega], \\ x(0) = x(\omega), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда следуют необходимые и достаточные условия разрешимости:

Теорема 5. *Пусть* $0 < a\omega \neq 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, *и задано неотрицательное число* $\mathcal{T}$. *Для того чтобы задача* (0.1)–(0.2) *была однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\omega]}(T\mathbf{1})(t) \leqslant \mathcal{T}, \tag{3.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство (3.3).

Решим уравнение

$$G(\tau_2, s) = G(0, s) \tag{3.5}$$

при заданном $\tau_2 \in [0, \omega]$. Имеем

$$G(\tau_2, s) - G(0, s) = \frac{1}{a \sin\frac{a\omega}{2}} \begin{cases} \sin(\frac{a}{2}(2s - \tau_2 - \omega)) \sin(\frac{a\tau_2}{2}), & s \geqslant t_2, \\ \sin(\frac{a}{2}(\omega - \tau_2)) \sin(\frac{a}{2}(\tau_2 - 2s)), & s < t_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$s = \begin{cases} \frac{\tau_2+\omega}{2} + \frac{\pi k}{a}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ если } s \in [\tau_2, \omega], \\ \frac{\tau_2}{2} - \frac{\pi k}{a}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ если } s \in [0, \tau_2). \end{cases}$$

При $a < 2\pi$ и при любом $\tau_2 \in (0, \omega]$ на каждом из отрезков $[0, \tau_2]$ и $[\tau_2, \omega]$ находится один корень уравнения (3.5): $\tau_2/2$ и $(\tau_2+\omega)/2$ соответственно. Поэтому после элементарных преобразований получаем, что при $0 < a < 2\pi$

$$\int_0^\omega \max_{t_2\in[0,\omega]} g^+_{0,\tau_2}(s)\, ds = \max_{t_2\in[0,\omega]} \frac{\sin\frac{a(\omega-\tau_2)}{2} + \sin\frac{a\tau_2}{2} - \sin\frac{a\omega}{2}}{a^2 \sin\frac{a\omega}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{a\omega}{8}}{a^2(1 - 2\sin^2\frac{a\omega}{8})}.$$

Таким образом, для того чтобы при $0 < a\omega < 2\pi$ задача (0.1)–(0.2) была однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, удовлетворяющих условию $T\mathbf{1} = \mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$\mathcal{T} < \frac{a^2(1 - 2\sin^2\frac{a\omega}{8})}{2\sin^2\frac{a\omega}{8}}. \tag{3.6}$$

Отсюда следуют необходимые и достаточные условия разрешимости при $0 < a\omega < 2\pi$:

Теорема 6. *Пусть* $0 < a\omega < 2\pi$ *и задано неотрицательное число* $\mathcal{T}$. *Для того чтобы задача* (0.1)–(0.2) *была однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что выполнено неравенство* (3.4), *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство* (3.6).

Теорему 6 можно переформулировать эквивалентным образом. Введем обозначения $\mathcal{T}_1(a) \equiv \dfrac{a^2}{2\sin^2\frac{a\omega}{8}}$, $Ix = x : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ — оператор вложения.

Теорема 7. *Пусть* $0 < a\omega < 2\pi$ *и задано неотрицательное число* $\mathcal{T}$. *Для того чтобы задача*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -(Tx)(t) + f(t), & t \in [0, \omega], \\ x(0) = x(\omega), & \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases}$$

была однозначно разрешима при всех таких линейных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что оператор* $T - a^2 I : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ *положителен и выполнено неравенство* (3.4), *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство*

$$\mathcal{T} < \mathcal{T}_1(a).$$

Отметим, что $\lim\limits_{a\to 0+}\mathcal{T}_1(a)=\dfrac{32}{\omega^2}$, $\lim\limits_{a\to 2\pi}\mathcal{T}_1(a)=\dfrac{4\pi^2}{\omega^2}$. Как и следовало ожидать, $\dfrac{4\pi^2}{\omega^2}$ — первое ненулевое собственное число периодической краевой задачи на отрезке $[0,\omega]$ для оператора $x\to-\ddot{x}$.

Пусть теперь $a\omega\in(2\pi,4\pi)$. Для применения теоремы 5 вычислим:

$$g(t)\equiv\int_0^\omega\frac{1}{2}|G(0,s)-G(\tau,s)|\,ds=\begin{cases}\dfrac{|\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}-3\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } 0\leqslant\tau\leqslant\omega-\dfrac{2\pi}{a},\\ \dfrac{|\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}+\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } \omega-\dfrac{2\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\dfrac{2\pi}{a},\\ \dfrac{|-3\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}+\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } \dfrac{2\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\omega.\end{cases}$$

Имеем

$$\max_{\omega-\frac{2\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\frac{2\pi}{a}}g(t)=g(\omega/2)=\frac{\sin\frac{a\omega}{2}-2\sin\frac{a\omega}{4}}{a^2\sin\frac{a\omega}{2}}=\frac{\cos\frac{a\omega}{4}-1}{a^2\cos\frac{a\omega}{4}}=\frac{-2\sin^2\frac{a\omega}{8}}{a^2(1-2\sin^2\frac{a\omega}{8})}\equiv g_1,$$

$$\max_{\tau\in[0,\omega-\frac{2\pi}{a}]\cup[\frac{2\pi}{a},\omega]}g(t)=\frac{-\sin\frac{a\omega}{2}-\sqrt{10+6\cos\frac{a\omega}{2}}}{a^2\sin\frac{a\omega}{2}}\equiv g_2.$$

Легко показать, что при $a\in(\dfrac{2\pi}{\omega},\dfrac{4\pi}{\omega})$ неравенство $g_1\geqslant g_2$ выполнено тогда и только тогда, когда $a\leqslant a_0\approx\frac{9.7}{\omega}$, где a_0 — единственное решение уравнения $\operatorname{tg}^2\dfrac{a_0\omega}{4}+\cos\dfrac{a_0\omega}{4}=0$ на промежутке $(\dfrac{2\pi}{\omega},\dfrac{4\pi}{\omega})$. Пусть

$$\mathcal{T}_2(a)\equiv\begin{cases}a^2\Big(1-\dfrac{1}{2\sin^2\frac{a\omega}{8}}\Big), & \text{если } a\in(\dfrac{2\pi}{\omega},a_0],\\ a^2\dfrac{1}{-1-\frac{\sqrt{10+6\cos\frac{a\omega}{2}}}{\sin\frac{a\omega}{2}}}, & \text{если } a\in(a_0,\dfrac{2\pi}{\omega}).\end{cases}$$

Используя только что введенные обозначения, сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости.

Теорема 8. *Пусть $2\pi<a\omega<4\pi$ и задано неотрицательное число $\mathcal{T}$. Для того чтобы задача* (0.1)–(0.2) *была однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах $T:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$, что выполнено неравенство* (3.4)*, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство*

$$\mathcal{T}<\mathcal{T}_2(a). \tag{3.7}$$

Пусть теперь $a\omega\in(4\pi,6\pi)$, в этом случае

$$g(t)\equiv\int_0^\omega\frac{1}{2}|G(0,s)-G(\tau,s)|\,ds=\begin{cases}\dfrac{|\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}+5\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } 0\leqslant\tau\leqslant\omega-\dfrac{4\pi}{a},\\ \dfrac{|\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}-3\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } \omega-\dfrac{4\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\dfrac{2\pi}{a},\\ \dfrac{|-3\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}-3\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } \dfrac{2\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\omega-\dfrac{2\pi}{a},\\ \dfrac{|-3\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}+\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } \omega-\dfrac{2\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\dfrac{4\pi}{a},\\ \dfrac{|5\sin\frac{a(\omega-\tau)}{2}+\sin\frac{a\tau}{2}-\sin\frac{a\omega}{2}|}{a^2|\sin\frac{a\omega}{2}|}, & \text{если } \dfrac{4\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\omega.\end{cases}$$

Имеем

$$g_1 \equiv \max_{\tau\in[0,\omega-\frac{4\pi}{a}]\cup[\frac{4\pi}{a},\omega]} g(t) = \begin{cases} \dfrac{-\sin\frac{a\omega}{2}+\sqrt{26-10\cos\frac{a\omega}{2}}}{a^2\sin\frac{a\omega}{2}}, & a \geqslant \dfrac{2\arccos(1/5)+4\pi}{\omega}, \\ \dfrac{4}{a^2}, \quad a < \dfrac{2\arccos(1/5)+4\pi}{\omega} \approx \dfrac{4.87\pi}{\omega}, \end{cases}$$

$$g_2 \equiv \max_{\tau\in[\omega-\frac{4\pi}{a},\frac{2\pi}{a}]\cup[\omega-\frac{2\pi}{a},\frac{4\pi}{a}]} g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{a\omega}{2}+\sqrt{10+6\cos\frac{a\omega}{2}}}{a^2\sin\frac{a\omega}{2}}, & a \leqslant \dfrac{2\arccos(-1/3)+4\pi}{\omega}, \\ \dfrac{4}{a^2}, \quad a > \dfrac{2\arccos(-1/3)+4\pi}{\omega} \approx \dfrac{5.2\pi}{\omega}, \end{cases}$$

$$\max_{\frac{2\pi}{a}\leqslant\tau\leqslant\omega-\frac{2\pi}{a}} g(t) = g(\omega/2) = -\frac{\cos\frac{a\omega}{4}+3}{a^2\cos\frac{a\omega}{4}} \equiv g_3.$$

Легко показать, что при $a \in (\frac{4\pi}{\omega}, \frac{6\pi}{\omega})$ выполнено неравенство $g_1 \geqslant g_3$, кроме того, $g_1 \leqslant g_2$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant a_3 \approx \frac{15.8}{\omega} \approx \frac{5.02\pi}{\omega}$, где a_3 — единственное решение уравнения $1/\cos\frac{a_3\omega}{2} = 1 - 32/\sin^2\frac{a_3\omega}{2}$.

Пусть $\mathcal{T}_3(a) \equiv \begin{cases} \dfrac{a^2\sin\frac{a\omega}{2}}{\sin\frac{a\omega}{2}+\sqrt{10+6\cos\frac{a\omega}{2}}}, \text{ если } a \in (a_3, \frac{6\pi}{\omega}), \\ \dfrac{a^2\sin\frac{a\omega}{2}}{-\sin\frac{a\omega}{2}+\sqrt{26-10\cos\frac{a\omega}{2}}}, \text{ если } a \in (\frac{4\pi}{\omega}, a_3]. \end{cases}$

Используя только что введенные обозначения, сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости.

Теорема 9. *Пусть* $4\pi < a\omega < 6\pi$ *и задано неотрицательное число* $\mathcal{T}$. *Для того чтобы задача* (0.1)–(0.2) *была однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что выполнено неравенство* (3.4), *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство*

$$\mathcal{T} < \mathcal{T}_3(a). \tag{3.8}$$

§ 4. Положительный оператор с поточечными ограничениями

Теперь получим условия однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.2) при всех положительных операторах $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, удовлетворяющих условию $T\mathbf{1} = \mathcal{T}\mathbf{1}$ при заданном неотрицательном числе $\mathcal{T}$. Опять используем общее утверждение 9, где положим $p^+ = \mathcal{T}$, $p^- = 0$.

Тогда задача (3.1) имеет только нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет только нетривиальное решение уравнение

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s)\left((\mathcal{T} - p_2(s))x(t_1) + p_2(s)x(t_2)\right) ds, \quad t \in [a,b].$$

Это уравнение имеет только нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет только нетривиальное решение система

$$\begin{cases} x(t_1) = \displaystyle\int_0^\omega G(t_1,s)\left((\mathcal{T} - p_2(s))x(t_1) + p_2(s)x(t_2)\right) ds, \\ x(t_2) = \displaystyle\int_0^\omega G(t_2,s)\left((\mathcal{T} - p_2(s))x(t_1) + p_2(s)x(t_2)\right) ds, \end{cases} \tag{4.1}$$

относительно скалярных переменных $x(t_1)$, $x(t_2)$. Система (4.1) имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\int_0^\omega G(t_1,s)(\mathcal{T}-p_2(s))\,ds & -\int_0^\omega G(t_1,s)p_2(s)\,ds \\ -\int_0^\omega G(t_2,s)(\mathcal{T}-p_2(s))\,ds & 1-\int_0^\omega G(t_2,s)p_2(s)\,ds \end{vmatrix} \neq 0.$$

Учитывая, что $\int_0^\omega G(t,s)\,ds = 1/a^2$ при всех $t\in[0,\omega]$, имеем

$$\Delta = (1-\mathcal{T}/a^2)\,(1+\int_0^\omega (G(\tau_1,s)-G(\tau_2,s))p_2(s)\,ds).$$

Учитывая равенство $\int_0^\omega (G(\tau_1,s)-G(\tau_2,s))\,ds = 0$ при всех $\tau_1,\tau_2\in[0,\omega]$, получаем, что при всех $p_2\in\mathbf{L}$, удовлетворяющих условию $0\leqslant p_2(s)\leqslant\mathcal{T}$, $s\in[0,\omega]$, величина Δ отлична от нуля тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}\neq a^2$ и

$$\mathcal{T}\max_{0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant\omega}\int_0^\omega g^+_{\tau_1,\tau_2}(s)\,ds = \mathcal{T}\max_{0\leqslant\tau_2\leqslant\omega}\int_0^\omega g^+_{0,\tau_2}(s)\,ds = \mathcal{T}\max_{0\leqslant\tau_2\leqslant\omega}\int_0^\omega \frac{1}{2}|G(0,s)-G(\tau_2,s)|\,ds < 1,$$

где

$$g^+_{\tau_1,\tau_2}(s)\equiv\begin{cases} G(\tau_1,s)-G(\tau_2,s), & \text{если } G(\tau_1,s)\geqslant G(\tau_2,s),\\ 0, & \text{если } G(\tau_1,s)<G(\tau_2,s).\end{cases}$$

Таким образом, для того чтобы задача (2.1)–(2.2) была однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах $T:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$, удовлетворяющих условию $T\mathbf{1}=\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{T}\neq a^2$ и было выполнено неравенство (3.3).

Если линейный положительный оператор $T:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$ таков, что $T\mathbf{1}\leqslant\mathcal{T}$, оператор $T-a^2I$ положителен и задача (2.1)–(2.2) не является однозначно разрешимой, то однородная задача (2.1)–(2.2) имеет нетривиальное решение, которое меняет знак, так как в противном случае решение однородной задачи имело бы вторую производную одного знака и не удовлетворяло периодическим краевым условиям. Так как нетривиальное решение однородной задачи (2.1)–(2.2) имеет нуль, то при любой такой неотрицательной функции $p\in\mathbf{L}$, что $p\geqslant T\mathbf{1}$, найдется такой линейный положительный оператор $\widetilde{T}:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$, что $\widetilde{T}\mathbf{1}=p$ и задача

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)+a^2x(t)=(\widetilde{T}x)(t), & t\in[0,\omega],\\ x(0)=x(\omega), & \dot{x}(0)=\dot{x}(\omega),\end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия разрешимости в этом случае не отличаются от условий разрешимости для задачи с отрицательным оператором.

Теорема 10. *Пусть $0<a\omega\neq 2\pi k$, $k=1,2,\ldots$, и задано неотрицательное число $\mathcal{T}>a^2$. Для того чтобы задача (2.1)–(2.2) была однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах $T:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$, что оператор $T-a^2I$ положителен и выполнено неравенство (3.4), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство (3.3).*

Теорема 11. *Пусть задано неотрицательное число $\mathcal{T}>a^2$. Для того чтобы задача (2.1)–(2.2) была однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах $T:\mathbf{C}\to\mathbf{L}$, что оператор $T-a^2I$ положителен и выполнено неравенство (3.4), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство (3.6) при $a\omega\in(0,2\pi)$, неравенство (3.7) при $a\omega\in(2\pi,4\pi)$ и неравенство (3.8) при $a\omega\in(4\pi,6\pi)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lasota A., Opial Z. Sur les solutions periodiques des equations differentielles ordinaires // Ann. Polon. Math. 1964. Vol. 16. № 1. P. 69–94.
2. Комленко Ю.В., Тонков Е.Л. Периодическая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Доклады АН СССР. 1968. Т. 179. № 1. С. 17–19.
3. Cabada A., Cid J.A. On the sign of the Green's function associated to Hill's equation with an indefinite potential // Appl. Math. Comput. 2008. Vol. 205. № 1. P. 303–308.
4. Hakl R., Torres P.J. Maximum and antimaximum principles for a second order differential operator with variable coefficients of indefinite sign // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 217. № 19. P. 7599–7611.
5. Lomtatidze A., Mukhigulashvili S. On periodic solutions of second order functional differential equations // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1995. Vol. 5. P. 125–126.
6. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
7. Hakl R., Mukhigulashvili S. A periodic boundary value problem for functional differential equations of higher order // Georgian Math. J. 2009. Vol. 16. № 4. P. 651–665.
8. Бравый Е.И. О наилучших константах в условиях разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 773–780.
9. Бравый Е.И. Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: РХД, 2011. 372 с.
10. Бравый Е.И. О разрешимости периодической краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 12–24.

Поступила в редакцию 15.06.2013

Бравый Евгений Ильич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29.
E-mail: bravyi@perm.ru

E. I. Bravyi

On unimprovable conditions of the solvability of the periodic problem for second order functional differential equations

Keywords: linear equations with delay, periodic boundary value problem, periodic solutions, functional differential equations.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K10, 34K13

Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the periodic boundary value problem for all linear second order functional differential equations with the given norm of the functional operators.

REFERENCES

1. Lasota A., Opial Z. Sur les solutions periodiques des equations differentielles ordinaires, *Ann. Polon. Math.*, 1964, vol. 16, no. 1, pp. 69–94.

2. Komlenko Yu.V., Tonkov E.L. The periodic boundary value problem for a second order ordinary differential equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1968, vol. 179, no. 1, pp. 17–19.

3. Cabada A., Cid J.A. On the sign of the Green's function associated to Hill's equation with an indefinite potential, *Appl. Math. Comput.*, 2008, vol. 205, no. 1, pp. 303–308.

4. Hakl R., Torres P.J. Maximum and antimaximum principles for a second order differential operator with variable coefficients of indefinite sign, *Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 217, no. 19, pp. 7599–7611.

5. Lomtatidze A., Mukhigulashvili S. On periodic solutions of second order functional differential equations, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 1995, vol. 5, pp. 125–126.

6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of functional differential equations), Moscow: Nauka, 1991, 280 p.

7. Hakl R., Mukhigulashvili S. A periodic boundary value problem for functional differential equations of higher order, *Georgian Math. J.*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 651–665.

8. Bravyi E.I. On the best constants in the solvability conditions for the periodic boundary value problem for higher-order functional differential equations, *Differ. Uravn.*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 773–780.

9. Bravyi E.I. *Razreshimost' kraevykh zadach dlya lineinykh funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (The solvability of boundary value problems for linear functional differential equations), Moscow–Izhevsk: Regular & Chaotic Dynamics, 2011, 372 p.

10. Bravyi E.I. On the solvability of the periodic boundary value problem for a linear functional differential equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 12–24.

Received 15.06.2013

Bravyi Evgenii Il'ich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics, Perm State National Research Polytechnical University, Komsomol'sky pr., 29, Perm, 614990, Russia.
E-mail: bravyi@perm.ru