УДК 519.651 + 517.518.823

© *В. И. Родионов, Н. В. Родионова*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В предыдущей работе авторов определено параметрическое семейство конечномерных пространств специальных квадратичных сплайнов лагранжевого типа. В каждом пространстве в качестве решения начально-граничной задачи для простейшего уравнения теплопроводности предложен оптимальный сплайн, дающий наименьшую невязку. Для коэффициентов этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от исходных конечных разностей. Формула для невязки представляет собой положительно определенную квадратичную форму от этих же величин, однако из-за своей громоздкости она плохо приспособлена для анализа качества аппроксимации исходной задачи при варьировании параметрами.

Получено альтернативное представление для невязки, представляющее собой сумму двух положительно определенных квадратичных форм от новых конечных разностей, заданных на границе. Матрица первой формы имеет второй порядок и очевидный спектр. Элементы второй матрицы порядка $N+1$ выражаются через многочлены Чебышева, матрица обратима и такова, что обратная матрица имеет трехдиагональный вид. Эта особенность позволяет получить для спектра матрицы верхние и нижние оценки, не зависящие от размерности N. Данное обстоятельство позволяет провести исследование на качество аппроксимации для разных размерностей N и весовых коэффициентов $\omega \in [-1,1]$. Показано, что наилучшее приближение дает параметр $\omega = 0$, а невязка стремится к нулю с ростом N.

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимирующий сплайн, многочлены Чебышева.

Введение

Работа продолжает исследования [1]: при фиксированных $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ в качестве приближенного решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad u(0,\xi)=\phi(\xi),\ \xi\in[0,1], \quad u(t,0)=\rho_0(t),\ u(t,1)=\rho_1(t),\ t\in[0,2\tau],$$

предлагается использовать оптимальный аппроксимирующий сплайн задачи

$$J \doteq \Big\|\, \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\, \Big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \quad u \in \sigma_\omega(\Pi). \tag{0.1}$$

Предполагается выполненным условие сопряжения: $\phi(0) = \rho_0(0)$, $\phi(1) = \rho_1(0)$. По сравнению с постановкой (0.2) в [1] используем новые обозначения: ξ, ρ_0, ρ_1 вместо x, α, β соответственно.

При фиксированном $\omega \in [-1,1]$ через $\sigma_\omega(\Pi)$ обозначено конечномерное пространство, состоящее из сплайнов (см. [1]), зависящих от коэффициентов u^i_j, $i = 1,2$, $j = 1,\ldots,2N-1$ (где N — это параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы) и определенных в прямоугольнике $\Pi \doteq [0,2\tau]\times[0,1]$. Применяем обозначения $\lambda \doteq (1+\omega)/2$ и $\mu \doteq (1-\omega)/2$. В работе [1] для параметризации мы использовали параметр λ, а не ω, и применяли обозначение Ω вместо Π. Заметим еще, что в [1] для коэффициентов u^i_j использовалось обозначение u_{ij}.

Пусть, далее, $n \doteq N-1$, $h \doteq \frac{1}{2N}$, $\theta \doteq \gamma^2 \frac{\tau}{h^2}$, $u^i_0 \doteq \rho^i_0 \doteq \rho_0(i\tau)$, $u^i_{2N} \doteq \rho^i_1 \doteq \rho_1(i\tau)$, $i = 0,1,2$,

$$u^0_j \doteq \phi_j \doteq \phi(jh), \quad x_j \doteq u^2_j - \phi_j, \quad y_j \doteq u^2_j - 2\,u^1_j + \phi_j, \quad j = 0,1,\ldots,2N, \tag{0.2}$$

$$Z_k \doteq \phi_{2k-2} - 2\,\phi_{2k-1} + \phi_{2k}, \quad z_k \doteq 2\theta Z_k, \quad k = 1,\ldots,N.$$

Используем также обозначения: $r(\lambda) \doteq 1+2\theta+2\theta\lambda$, $r(\mu) \doteq 1+2\theta+2\theta\mu$, $r \doteq r(\frac{1}{2}) = 1+3\theta$,

$$P \doteq 2r\,\theta\,\omega, \quad R \doteq \tfrac{7}{8}+4\theta+6\theta^2 + \left(\tfrac{1}{8}+2\theta^2\right)\omega^2 > 0, \quad Q \doteq 3R-2r^2 > 0, \quad S \doteq R-2\theta^2\omega^2 > 0,$$

$$x \doteq \frac{31+30\omega^2+3\omega^4}{(1-\omega^2)(1+3\omega^2)} \geqslant 15+8\sqrt{3}, \quad y \doteq \frac{Q+S}{Q-S} < -1, \quad \alpha \doteq \frac{Q+S-2P}{Q-S} < 0, \quad \beta \doteq \frac{Q+S+2P}{Q-S} < 0.$$

По сравнению с работой [1] появились новые числа α и β и изменилось определение числа x (в [1, с. 165] это число определялось через λ и μ.) Остальные обозначения сохранены. Выражение для x имеет смысл при $\omega \neq \pm 1$. Заметим еще, что $Q-S<0$, $\alpha+\beta=2y$ и $\alpha\beta>1$.

Анализ функционала (0.1) породил в [1] уравнения (5.1) – (5.4) итоговой разностной схемы. В свете новых обозначений в случае $\omega \neq \pm 1$ (то есть при $\lambda\mu \neq 0$) схема принимает вид

$$\lambda\mu\, y_{2k-2} + 2\,(1-\lambda\mu)\, y_{2k-1} + \lambda\mu\, y_{2k} = 2\theta\,(1-\lambda\mu)\,(x_{2k-2} - 2\,x_{2k-1} + x_{2k}), \quad k=1,\ldots,N, \tag{0.3}$$

$$[\,r(\mu)-R\,]\, x_{2k-2} + 2R\, x_{2k-1} + [\,r(\lambda)-R\,]\, x_{2k} = 2r z_k, \quad k=1,\ldots,N, \tag{0.4}$$

$$y_{2k-2} + 2x\, y_{2k} + y_{2k+2} = 0, \quad k=1,\ldots,n, \tag{0.5}$$

$$x_{2k-2} + 2y\, x_{2k} + x_{2k+2} = (1+\alpha)\, z_k + (1+\beta)\, z_{k+1}, \quad k=1,\ldots,n. \tag{0.6}$$

В случае $\omega = \pm 1$ изменяются уравнения (0.5), принимающие вид $y_{2k}=0$, и упрощаются уравнения (0.3), принимающие вид $y_{2k-1} = \theta\,(x_{2k-2} - 2\,x_{2k-1} + x_{2k})$. Приведение формулы (5.4) из [1] к виду (0.6) требует определенных усилий (следует воспользоваться формулой (7.2) из [1]).

§ 1. Вспомогательные утверждения о многочленах Чебышева

1.1. Зафиксируем числа $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и составим матрицу $A(x) = \big(A_{ij}(x)\big)$ порядка n такую, что $A_{ij}(x) = \delta_{i,j+1} + 2x\,\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. В работе [1] доказано равенство $\det A(x) = U_n(x)$. Совокупность $\{\,U_n(x),\, x \in \mathbb{R}\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$, состоящую из многочленов Чебышева 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x) \doteq 0$, $U_0(x) \doteq 1$, $U_{n-1}(x) + U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x)$ (рекурсия в оба направления: и при $n \to \infty$, и при $n \to -\infty$). Для любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $U_{-n}(x) = -U_{n-2}(x)$. При $x \in (-1,1)$ имеет место представление $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin\Theta}$, $\cos\Theta = x$.

В силу элементарного тригонометрического тождества

$$\sin(m+1)\Theta\, \sin(n+1)\Theta - \sin m\Theta\, \sin n\Theta = \sin(m+n+1)\Theta\, \sin\Theta$$

для всех $m,n \in \mathbb{Z}$ справедливо его аналитическое продолжение

$$U_m(x)\,U_n(x) - U_{m-1}(x)\,U_{n-1}(x) = U_{m+n}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

а в силу легко проверяемых тождеств

$$2\,(1+\cos\Theta)\sum_{k=m}^{n}(-1)^k \sin(\ell+k+1)\,\Theta =$$
$$= (-1)^m\big[\,\sin(\ell+m)\,\Theta + \sin(\ell+m+1)\,\Theta\,\big] + (-1)^n\big[\,\sin(\ell+n+1)\,\Theta + \sin(\ell+n+2)\,\Theta\,\big],$$
$$2\,(1+\cos\Theta)\sum_{k=m}^{n}(-1)^k \sin(\ell-k+1)\,\Theta =$$
$$= (-1)^m\big[\,\sin(\ell-m+1)\,\Theta + \sin(\ell-m+2)\,\Theta\,\big] + (-1)^n\big[\,\sin(\ell-n)\,\Theta + \sin(\ell-n+1)\,\Theta\,\big]$$

для всех $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$ таких, что $m \leqslant n$, имеют место тождества ($x \in \mathbb{R}$)

$$2\,(1+x)\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\, U_{\ell+k}(x) = (-1)^m\big[\,U_{\ell+m-1}(x) + U_{\ell+m}(x)\,\big] + (-1)^n\big[\,U_{\ell+n}(x) + U_{\ell+n+1}(x)\,\big], \tag{1.2}$$

$$2\,(1+x)\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\, U_{\ell-k}(x) = (-1)^m\big[\,U_{\ell-m}(x) + U_{\ell-m+1}(x)\,\big] + (-1)^n\big[\,U_{\ell-n-1}(x) + U_{\ell-n}(x)\,\big]. \tag{1.3}$$

Составим, далее, симметрическую матрицу $B(x) = \big(B_{ij}(x)\big)$ порядка n такую, что

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j}\begin{cases} U_{n-i}(x)\,U_{j-1}(x), & \text{если } j \leqslant i,\\ U_{i-1}(x)\,U_{n-j}(x), & \text{если } j \geqslant i. \end{cases} \tag{1.4}$$

Теорема 1 (см. [1]). *Справедливы равенства* $A(x)\,B(x) = U_n(x)\,E_n = B(x)\,A(x)$, *где* E_n *— единичная матрица порядка* $n \geqslant 1$.

1.2. Числа $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha+\beta = 2x$, порождают две совокупности чисел

$$P_n \doteq P_n(x) \doteq U_n(x) - \beta\, U_{n-1}(x), \quad Q_n \doteq Q_n(x) \doteq U_n(x) - \alpha\, U_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $P_{-n} = U_{-n} - \beta\, U_{-n-1} = -U_{n-2} + (\,2x-\alpha\,)\, U_{n-1} = U_n - \alpha\, U_{n-1} = Q_n$, то эти совокупности совпадают. (Здесь и далее полагаем $U_k \doteq U_k(x)$.) Равенства $P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) = 2x\, P_n(x)$ и $Q_{n-1}(x) + Q_{n+1}(x) = 2x\, Q_n(x)$ также очевидны. Зафиксируем натуральное число N, пусть $n \doteq N-1$, и составим две матрицы $\overline{A}(x) = \big(\overline{A}_{ij}(x)\big)$ и $\overline{B}(x) = \big(\overline{B}_{ij}(x)\big)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, порядка N (указываем зависимость только от параметра x) такие, что

$$\overline{A}_{ij} \doteq \overline{A}_{ij}(x) \doteq \begin{cases} \alpha, & \text{если } (i,j) = (0,0), \\ \delta_{i,j+1} + 2x\, \delta_{ij} + \delta_{i,j-1}, & \text{если } (i,j) \neq (0,0), \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\overline{B}_{ij} \doteq \overline{B}_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{n-i}(x)\, P_j(x), & \text{если } j \leqslant i, \\ P_i(x)\, U_{n-j}(x), & \text{если } j \geqslant i. \end{cases} \tag{1.6}$$

Теорема 2. *Имеют место равенства $\overline{A}(x)\,\overline{B}(x) = P_N(x)\, E_n^0 = \overline{B}(x)\,\overline{A}(x)$, где E_n^0 — единичная матрица порядка N с элементами $(E_n^0)_{ij} \doteq \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать обозначения: $a_{ij} \doteq \overline{A}_{ij}$, $b_{ij} \doteq \overline{B}_{ij}$. Для элементов $c_{ij} \doteq c_{ij}(x)$ матрицы $c(x) \doteq a(x)\, b(x) = \overline{A}(x)\,\overline{B}(x)$ справедливо

$$c_{0j} = \sum_{k=0}^{n} a_{0k}\, b_{kj} = a_{00}\, b_{0j} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{0,k+1}\, b_{kj} + 2x \sum_{k=1}^{n} \delta_{0k}\, b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{0,k-1}\, b_{kj} = \alpha\, b_{0j} + b_{1j},$$

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k+1}\, b_{kj} + 2x \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\, b_{kj} + \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k-1}\, b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

1. Если $i = j = 0$, то $c_{00} = \alpha\, U_n - U_{n-1} = U_N - \beta\, U_n = P_N$.
2. Если $j > i = 0$, то $c_{0j} = \alpha\, (-1)^j\, U_{n-j} + (-1)^{1+j}\, P_1\, U_{n-j} = (-1)^j\, (\,\alpha - 2x + \beta\,)\, U_{n-j} = 0$.
3. Если $i = j = n$, то $c_{nn} = b_{n-1,n} + 2x\, b_{nn} = -P_{n-1} + 2x\, P_n = P_N$.
4. Если $j < i = n$, то $c_{nj} = b_{n-1,j} + 2x\, b_{nj} = (-1)^{n-1+j}\, U_1\, P_j + 2x\, (-1)^{n+j}\, P_j = 0$.
5. Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $i < j$, то

$$c_{ij} = b_{i-1,j} + 2x\, b_{ij} + b_{i+1,j} = (-1)^{i-1+j}\, P_{i-1}\, U_{n-j} + 2x\, (-1)^{i+j}\, P_i\, U_{n-j} + (-1)^{i+1+j}\, P_{i+1}\, U_{n-j} =$$
$$= (-1)^{i+j}\, [-P_{i-1} + 2x\, P_i - P_{i+1}\,]\, U_{n-j} = 0.$$

6. Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $i > j$, то

$$c_{ij} = b_{i-1,j} + 2x\, b_{ij} + b_{i+1,j} = (-1)^{i-1+j}\, U_{n-i+1}\, P_j + 2x\, (-1)^{i+j}\, U_{n-i}\, P_j + (-1)^{i+1+j}\, U_{n-i-1}\, P_j =$$
$$= (-1)^{i+j}\, [-U_{n-i+1} + 2x\, U_{n-i} - U_{n-i-1}\,]\, P_j = 0.$$

7. Пусть, наконец, $1 \leqslant i = j \leqslant n-1$. Тогда в силу (1.1) имеет место цепочка равенств

$$c_{ii} = b_{i-1,i} + 2x\, b_{ii} + b_{i+1,i} = -P_{i-1}\, U_{n-i} + 2x\, P_i\, U_{n-i} - U_{n-i-1}\, P_i = P_{i+1}\, U_{n-i} - P_i\, U_{n-i-1} =$$
$$= [\, U_{i+1}\, U_{n-i} - U_i\, U_{n-i-1}\,] - \beta\, [\, U_i\, U_{n-i} - U_{i-1}\, U_{n-i-1}\,] = U_{n+1} - \beta\, U_n = P_N.$$

Итак, $c_{ij} = P_N\, \delta_{ij}$ для всех $i, j = 0, 1, \ldots, n$, поэтому $\overline{A}(x)\,\overline{B}(x) = a(x)\, b(x) = P_N(x)\, E_n^0$. Равенство $\overline{B}(x)\,\overline{A}(x) = P_N(x)\, E_n^0$ следует из общей теории ассоциативных колец.

1.3. Пусть $\Lambda \in \mathbb{C}$, $N > 2$. Разложив определитель $\det\big(\overline{A}(x) - \Lambda E_n^0\big)$ по элементам нулевой строки, получим $\det\big(\overline{A}(x) - \Lambda E_n^0\big) = (\,\alpha - \Lambda\,)\, \det\big(A_{(n)}(x) - \Lambda E_n\big) - \det\big(A_{(n-1)}(x) - \Lambda E_{n-1}\big)$, где через $A_{(n-1)}(x)$ и $A_{(n)}(x)$ обозначены матрицы порядка $n-1$ и n соответственно, определенные в пункте 1.1. Следовательно,

$$\det\big(\overline{A}(x) - \Lambda E_n^0\big) = (\,\alpha - \Lambda\,)\, \det A_{(n)}(x - \Lambda/2) - \det A_{(n-1)}(x - \Lambda/2) =$$
$$= \big(-\beta + 2\,(x - \Lambda/2)\big)\, U_n(x - \Lambda/2) - U_{n-1}(x - \Lambda/2) = -\beta\, U_n(x - \Lambda/2) + U_{n+1}(x - \Lambda/2) = P_N(x - \Lambda/2).$$

Легко проверить, что эта формула справедлива и при $N = 1, 2$.

Замечание 1. Положив $\Lambda = 0$, получим равенство $\det\overline{A}(x) = P_{N}(x)$. В силу теоремы 2 справедливо равенство $\det\overline{A}(x)\cdot\det\overline{B}(x) = P_{N}^{\,n+1}(x)$, следовательно, $\det\overline{B}(x) = P_{N}^{\,n}(x)$.

Замечание 2. Все собственные значения матрицы $\overline{A}(x)$ вещественные и различные. Утверждение следует из общей теории матриц Якоби (см., например, [2, с. 42]). Более того, корни любых двух соседних полиномов (от переменной Λ) из семейства $P_1(x-\Lambda/2),\ldots,P_{N}(x-\Lambda/2)$ перемежаются. Здесь $P_{k+1}(x-\Lambda/2) = \det\big(\overline{A}_{(k)}(x)-\Lambda E_k^0\big)$, $k=0,1,\ldots,n$, — главные миноры матрицы $\overline{A}(x)-\Lambda E_n^0$, а $\overline{A}_{(k)}(x)$ — это матрицы вида (1.5), где n заменено на k. Если α,β,x таковы, что $\beta=0$, то хорошо известно, что все нули многочленов $P_m(x-\Lambda/2) = U_m(x-\Lambda/2)$ находятся в диапазоне $(\,-2+2x,\,2+2x\,) = (\,-2+\alpha,\,2+\alpha\,)$ (см., например, [3, с. 96]).

Лемма 1. *Пусть числа* $\alpha,\beta,x,\Lambda\in\mathbb{R}$ *таковы, что* $\alpha+\beta=2x$.
1. *Если* $\beta>0$ *и* $\Lambda\geqslant 2+2x$, *то* $(-1)^kP_k(x-\Lambda/2)>0$ *для любого* $k=0,1,\ldots$.
2. *Если* $\beta>0$ *и* $\Lambda\leqslant\alpha-\beta^{-1}$, *то* $P_k(x-\Lambda/2)>0$ *для любого* $k=0,1,\ldots$.
3. *Если* $\beta<0$ *и* $\Lambda\leqslant -2+2x$, *то* $P_k(x-\Lambda/2)>0$ *для любого* $k=0,1,\ldots$.
4. *Если* $\beta<0$ *и* $\Lambda\geqslant\alpha-\beta^{-1}$, *то* $(-1)^kP_k(x-\Lambda/2)>0$ *для любого* $k=0,1,\ldots$.

Доказательство. При $k=0$ утверждения тривиальны. Пусть $k\in\mathbb{N}$, $z\doteq x-\Lambda/2$, $\alpha^*\doteq-\alpha$, $\beta^*\doteq-\beta$, $x^*\doteq-x$, $\Lambda^*\doteq-\Lambda$, $z^*\doteq-z=x^*-\Lambda^*/2$, $P_m^*(\cdot)\doteq U_m(\cdot)-\beta^*U_{m-1}(\cdot)$. Так как для любого $m=0,1,\ldots$ справедливо $U_m(-z)=(-1)^mU_m(z)$, то $U_m(z)=(-1)^mU_m(z^*)$ и

$$P_m(x-\Lambda/2) = U_m(z)-\beta\,U_{m-1}(z) = (-1)^m\left[\,U_m(z^*)-\beta^*\,U_{m-1}(z^*)\,\right] = (-1)^mP_m^*(x^*-\Lambda^*/2). \quad (1.7)$$

1. Очевидно, $z\leqslant-1$, а так как $(-1)^kU_k(z)>0$ и $(-1)^{k-1}U_{k-1}(z)>0$, то

$$(-1)^kP_k(z) = (-1)^k\left[\,U_k(z)-\beta\,U_{k-1}(z)\,\right] = \left[\,(-1)^kU_k(z)\,\right]+\beta\left[\,(-1)^{k-1}U_{k-1}(z)\,\right]>0.$$

2. Легко убедиться, что $z\geqslant(\,\beta+\beta^{-1})/2$, то есть $2\beta z-1-\beta^2\geqslant0$. Базой индукции являются соотношения $P_1(z)=2z-\beta\geqslant\beta^{-1}>0$. Предположим, что все $P_m(z)>0$, $m=1,\ldots,k$. Тогда

$$[\,\beta\,P_{m+1}(z)-P_m(z)\,]-\beta\,[\,\beta\,P_m(z)-P_{m-1}(z)\,] = (\,2\beta z-1-\beta^2\,)\,P_m(z)\geqslant0,\quad m=1,\ldots,k,$$

$$[\,\beta\,P_{k+1}(z)-P_k(z)\,]\geqslant\beta^k\,[\,\beta\,P_1(z)-P_0(z)\,]=\beta^k\,[\,2\beta z-\beta^2-1\,]\geqslant0 \ \text{ и } \ P_{k+1}(z)\geqslant\beta^{-1}P_k(z)>0.$$

3. Очевидно, $\beta^*>0$ и $\Lambda^*\geqslant2+2x^*$, следовательно, $(-1)^kP_k^*(x^*-\Lambda^*/2)>0$ (в силу первого пункта леммы), а в силу (1.7) имеем $P_k(x-\Lambda/2)>0$.

4. Справедливо $\beta^*>0$ и $\Lambda^*\leqslant\alpha^*-(\beta^*)^{-1}$, следовательно, $P_k^*(x^*-\Lambda^*/2)>0$ (в силу второго пункта леммы), а в силу (1.7) имеем $(-1)^kP_k(x-\Lambda/2)>0$.

Следствие 1. *Многочлен* $\Lambda\to P_n(x-\Lambda/2)$, $n\in\mathbb{N}$, *имеет только вещественные простые корни* $\Lambda_0<\Lambda_1<\ldots<\Lambda_n$. *При* $\beta<0$ *справедливы оценки* $-2+2x<\Lambda_0$ *и* $\Lambda_n<\alpha-\beta^{-1}$, *а при* $\beta>0$ *имеем* $\alpha-\beta^{-1}<\Lambda_0$ *и* $\Lambda_n<2+2x$.

Замечание 3. При $\beta=0$ справедливы оценки $-2+2x<\Lambda_0$ и $\Lambda_n<2+2x$. Оказывается, эти же оценки справедливы при любом $\beta\in[-1,1]$, что доказывает следующая

Лемма 2. *Пусть числа* $\alpha,\beta,x,\Lambda\in\mathbb{R}$ *таковы, что* $\alpha+\beta=2x$.
1. *Если* $\beta\in(0,1]$ *и* $\Lambda\leqslant-2+2x$, *то* $P_k(x-\Lambda/2)>0$ *для любого* $k=0,1,\ldots$.
2. *Если* $\beta\in[-1,0)$ *и* $\Lambda\geqslant2+2x$, *то* $(-1)^kP_k(x-\Lambda/2)>0$ *для любого* $k=0,1,\ldots$.

Доказательство. При $k=0$ утверждения тривиальны. Пусть $k\in\mathbb{N}$. Воспользуемся обозначениями леммы 1.

1. Справедливо $z\geqslant1$, а так как $\beta\leqslant1$, то получаем базу индукции: $P_1(z)=2z-\beta\geqslant1>0$. Предположим, что $P_m(z)>0$ для всех $m=1,\ldots,k$. Тогда

$$[\,P_{m+1}(z)-P_m(z)\,]-[\,P_m(z)-P_{m-1}(z)\,]=2\,(\,z-1\,)\,P_m(z)\geqslant0,\quad m=1,\ldots,k,$$

$$[\,P_{k+1}(z)-P_k(z)\,]\geqslant[\,P_1(z)-P_0(z)\,]=2z-\beta-1\geqslant0 \ \text{ и, следовательно, } \ P_{k+1}(z)\geqslant P_k(z)>0.$$

2. Очевидно, $\beta^*\in(0,1]$ и $\Lambda^*\leqslant-2+2x^*$, следовательно, $P_k^*(x^*-\Lambda^*/2)>0$ (в силу первого пункта леммы), а в силу (1.7) имеем $(-1)^kP_k(x-\Lambda/2)>0$.

Зафиксируем $c \in \mathbb{R}$, и пусть $\overline{A}^{c}_{(k)}(x) \doteq c\,\overline{A}_{(k)}(x)$ для любого $k = 0, 1, \ldots$.

Следствие 2. *Матрицы* $\{\,\overline{A}^{c}_{(k)}(x)\,\}_{k=0}^{\infty}$ *имеют вещественный простой равномерно ограниченный* (*по* k) *спектр такой, что*

$$c<0 \implies \left|\begin{array}{lll} \beta<-1 & \Longrightarrow & c\,(\,\alpha-\beta^{-1}\,) < \Lambda_0^c < \Lambda_1^c < \ldots < \Lambda_k^c < c\,(-2+2x\,), \\ \beta\in[-1,1] & \Longrightarrow & c\,(\,2+2x\,) < \Lambda_0^c < \Lambda_1^c < \ldots < \Lambda_k^c < c\,(-2+2x\,), \\ \beta>1 & \Longrightarrow & c\,(\,2+2x\,) < \Lambda_0^c < \Lambda_1^c < \ldots < \Lambda_k^c < c\,(\,\alpha-\beta^{-1}\,), \end{array}\right.$$

$$c>0 \implies \left|\begin{array}{lll} \beta<-1 & \Longrightarrow & c\,(-2+2x\,) < \Lambda_0^c < \Lambda_1^c < \ldots < \Lambda_k^c < c\,(\,\alpha-\beta^{-1}\,), \\ \beta\in[-1,1] & \Longrightarrow & c\,(-2+2x\,) < \Lambda_0^c < \Lambda_1^c < \ldots < \Lambda_k^c < c\,(\,2+2x\,), \\ \beta>1 & \Longrightarrow & c\,(\,\alpha-\beta^{-1}\,) < \Lambda_0^c < \Lambda_1^c < \ldots < \Lambda_k^c < c\,(\,2+2x\,). \end{array}\right.$$

Следствие 3. *При фиксированном* $\beta \in \mathbb{R}$ *многочлен* $z \to P_k(z) \doteq U_k(z) - \beta\,U_{k-1}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, *имеет только вещественные простые корни такие, что*

$$\begin{array}{lll} \beta<-1 & \Longrightarrow & (\,\beta+\beta^{-1})/2 < z_0 < z_1 < \ldots < z_k < 1, \\ \beta\in[-1,1] & \Longrightarrow & -1 < z_0 < z_1 < \ldots < z_k < 1, \\ \beta>1 & \Longrightarrow & -1 < z_0 < z_1 < \ldots < z_k < (\,\beta+\beta^{-1})/2. \end{array}$$

1.4. Произвольные числа $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha+\beta = 2x$ и $N \geqslant 2$ порождают две матрицы $\widetilde{A}(x) = \big(\widetilde{A}_{ij}(x)\big)$ и $\widetilde{B}(x) = \big(\widetilde{B}_{ij}(x)\big)$, $i, j = 0, 1, \ldots, N$, порядка $N+1$ (так же как и в случае с матрицами $\overline{A}(x)$ и $\overline{B}(x)$ указываем зависимость только от параметра x) такие, что

$$\widetilde{A}_{ij} \doteq \widetilde{A}_{ij}(x) \doteq \begin{cases} \alpha, & \text{если } (i,j) = (0,0), \\ \delta_{i,j+1} + 2x\,\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}, & \text{если } (0,0) \neq (i,j) \neq (N,N), \\ \beta, & \text{если } (i,j) = (N,N), \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\widetilde{B}_{ij} \doteq \widetilde{B}_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} Q_{N-i}(x)\,P_j(x), & \text{если } j \leqslant i, \\ P_i(x)\,Q_{N-j}(x), & \text{если } j \geqslant i. \end{cases} \tag{1.9}$$

Теорема 3. *Имеют место равенства* $\widetilde{A}(x)\,\widetilde{B}(x) = (\,\alpha\beta-1\,)\,U_n(x)\,E^0_N = \widetilde{B}(x)\,\widetilde{A}(x)$, *где* E^0_N — *единичная матрица порядка* $N+1$ *с элементами* $(E^0_N)_{ij} \doteq \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем обозначения $a_{ij} \doteq \widetilde{A}_{ij}$, $b_{ij} \doteq \widetilde{B}_{ij}$ и напомним, что $U_k \doteq U_k(x)$. Для элементов $c_{ij} \doteq c_{ij}(x)$ матрицы $c(x) \doteq a(x)\,b(x) = \widetilde{A}(x)\,\widetilde{B}(x)$ справедливо

$$c_{0j} = \sum_{k=0}^{N} a_{0k}\,b_{kj} = a_{00}\,b_{0j} + \sum_{k=1}^{N} \delta_{0,k+1}\,b_{kj} + 2x \sum_{k=1}^{N} \delta_{0k}\,b_{kj} + \sum_{k=1}^{N} \delta_{0,k-1}\,b_{kj} = \alpha\,b_{0j} + b_{1j},$$

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{N} a_{ik}\,b_{kj} = \sum_{k=0}^{N} \delta_{i,k+1}\,b_{kj} + 2x \sum_{k=0}^{N} \delta_{ik}\,b_{kj} + \sum_{k=0}^{N} \delta_{i,k-1}\,b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$c_{Nj} = \sum_{k=0}^{N} a_{Nk}\,b_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{N,k+1}\,b_{kj} + 2x \sum_{k=0}^{n} \delta_{Nk}\,b_{kj} + \sum_{k=0}^{n} \delta_{N,k-1}\,b_{kj} + a_{NN}\,b_{Nj} = b_{nj} + \beta\,b_{Nj}.$$

1. Если $i = j = 0$, то

$$c_{00} = \alpha\,Q_N - Q_n = \alpha\,U_N - \alpha^2\,U_n - U_n + \alpha\,U_{n-1} = (\,2\alpha x - \alpha^2 - 1\,)\,U_n = (\,\alpha\beta-1\,)\,U_n.$$

2. Если $j > i = 0$, то $c_{0j} = \alpha\,(-1)^j\,Q_{N-j} + (-1)^{1+j}\,P_1\,Q_{N-j} = (-1)^j\,(\,\alpha - 2x + \beta\,)\,Q_{N-j} = 0$.
3. Если $i = j = N$, то

$$c_{NN} = -P_n + \beta\,P_N = -\,U_n + \beta\,U_{n-1} + \beta\,U_N - \beta^2\,U_n = (-1+2\beta x-\beta^2\,)\,U_n = (\,\alpha\beta-1\,)\,U_n.$$

4. Если $j < i = N$, то $c_{Nj} = (-1)^{n+j}\,Q_1 P_j + \beta\,(-1)^{N+j}\,P_j = (-1)^{n+j}\,(\,2x - \alpha - \beta\,)\,P_j = 0$.

5. Если $1 \leqslant i \leqslant n$ и $i < j$, то

$$c_{ij} = b_{i-1,j} + 2x\, b_{ij} + b_{i+1,j} = (-1)^{i-1+j}\, P_{i-1}\, Q_{N-j} + 2x\,(-1)^{i+j}\, P_i\, Q_{N-j} + (-1)^{i+1+j}\, P_{i+1}\, Q_{N-j} =$$
$$= (-1)^{i+j}\,[-P_{i-1} + 2x\, P_i - P_{i+1}]\, Q_{N-j} = 0.$$

6. Если $1 \leqslant i \leqslant n$ и $i > j$, то

$$c_{ij} = b_{i-1,j} + 2x\, b_{ij} + b_{i+1,j} = (-1)^{i-1+j}\, Q_{N-i+1}\, P_j + 2x\,(-1)^{i+j}\, Q_{N-i}\, P_j + (-1)^{i+1+j}\, Q_{N-i-1}\, P_j =$$
$$= (-1)^{i+j}\,[-\, Q_{N-i+1} + 2x\, Q_{N-i} - Q_{N-i-1}]\, P_j = 0.$$

7. Пусть, наконец, $1 \leqslant i = j \leqslant n$. Тогда в силу (1.1) справедлива цепочка равенств

$$c_{ii} = b_{i-1,i} + 2x\, b_{ii} + b_{i+1,i} = -P_{i-1}\, Q_{N-i} + 2x\, P_i\, Q_{N-i} - Q_{n-i}P_i \ = P_{i+1}\, Q_{N-i} - P_i\, Q_{n-i} =$$
$$= (\, U_{i+1} - \beta\, U_i\,)\,(\, U_{N-i} - \alpha\, U_{n-i}\,) - (\, U_i - \beta\, U_{i-1}\,)\,(\, U_{n-i} - \alpha\, U_{n-i-1}\,) = [\, U_{i+1}\, U_{N-i} - U_i\, U_{n-i}\,] -$$
$$-\alpha\,[\, U_{i+1}\, U_{n-i} - U_i\, U_{n-i-1}\,] - \beta\,[\, U_i\, U_{N-i} - U_{i-1}\, U_{n-i}\,] + \alpha\beta\,[\, U_i\, U_{n-i} - U_{i-1}\, U_{n-i-1}\,] =$$
$$= U_{N+1} - \alpha\, U_N - \beta\, U_N + \alpha\beta\, U_n = U_{N+1} - 2x\, U_N + \alpha\beta\, U_n = -\, U_n + \alpha\beta\, U_n = (\,\alpha\beta - 1\,)\, U_n.$$

Итак, $c_{ij} = (\,\alpha\beta-1\,)\, U_n\, \delta_{ij}$ для всех $i, j = 0, 1, \ldots, N$, поэтому $\widetilde{A}(x)\,\widetilde{B}(x) = (\,\alpha\beta-1\,)\, U_n(x)\, E^0_N$. Равенство $\widetilde{B}(x)\,\widetilde{A}(x) = (\,\alpha\beta-1\,)\, U_n(x)\, E^0_N$ следует из общей теории ассоциативных колец.

1.5. Для любого $\Lambda \in \mathbb{C}$ имеет место цепочка равенств

$$\det\big(\,\widetilde{A}(x) - \Lambda E^0_N\,\big) = (\,\beta - \Lambda\,)\,\det\big(\,\overline{A}_{(n)}(x) - \Lambda E^0_n\,\big) - \det\big(\,\overline{A}_{(n-1)}(x) - \Lambda E^0_{n-1}\,\big) =$$
$$= (\,\beta - \Lambda\,)\, P_N(x - \Lambda/2) - P_n(x - \Lambda/2) = -\Lambda\, U_N(x - \Lambda/2) + \sigma,$$

где $\sigma \doteq \Lambda\,\beta\, U_n(x-\Lambda/2) + \beta\, P_N(x-\Lambda/2) - P_n(x-\Lambda/2)$. Мы разложили определитель по элементам последней строки. Пусть $z \doteq x - \Lambda/2$, тогда

$$\sigma = \Lambda\,\beta\, U_n(z) + \beta\, U_N(z) - \beta^2\, U_n(z) - U_n(z) + \beta\, U_{n-1}(z) = \Lambda\,\beta\, U_n(z) + (\, 2\beta z - \beta^2 - 1\,)\, U_n(z) =$$
$$= (\, 2\beta x - \beta^2 - 1\,)\, U_n(z) = (\,\alpha\beta - 1\,)\, U_n(x - \Lambda/2),$$
$$\det\big(\,\widetilde{A}(x) - \Lambda E^0_N\,\big) = (\,\alpha\beta - 1\,)\, U_n(x - \Lambda/2) - \Lambda\, U_N(x - \Lambda/2). \tag{1.10}$$

Определим полиномы степени $m+1$ (числа со звездочкой такие же, как в лемме 1)

$$\widetilde{P}_{m+1}(\cdot) \doteq U_{m+1}(\cdot) - 2x\, U_m(\cdot) + \alpha\beta\, U_{m-1}(\cdot), \qquad \widetilde{P}^*_{m+1}(\cdot) \doteq U_{m+1}(\cdot) - 2x^*\, U_m(\cdot) + \alpha^*\beta^*\, U_{m-1}(\cdot).$$

Имеют место аналог формулы (1.7) и иная формула для определителя (1.10):

$$\widetilde{P}_{m+1}(x - \Lambda/2) = U_{m+1}(z) - 2x\, U_m(z) + \alpha\beta\, U_{m-1}(z) =$$
$$= (-1)^{m+1}\,\big[\, U_{m+1}(z^*) - 2x^*\, U_m(z^*) + \alpha^*\beta^*\, U_{m-1}(z^*)\,\big] = (-1)^{m+1}\,\widetilde{P}^*_{m+1}(x^* - \Lambda^*/2), \tag{1.11}$$
$$\det\big(\,\widetilde{A}(x) - \Lambda E^0_N\,\big) = (\,\alpha\beta - 1\,)\, U_n(z) - (\, 2x - 2z\,)\, U_N(z) = \tag{1.12}$$
$$= \alpha\beta\, U_n(z) - 2x\, U_N(z) - U_n(z) + 2z\, U_N(z) = \alpha\beta\, U_n(z) - 2x\, U_N(z) + U_{N+1}(z) = \widetilde{P}_{N+1}(x - \Lambda/2).$$

Замечание 4. Положив в (1.10) $\Lambda = 0$, получим равенство $\det \widetilde{A}(x) = (\,\alpha\beta-1\,)\, U_n(x)$. Так как $\det \widetilde{A}(x) \cdot \det \widetilde{B}(x) = [\,(\,\alpha\beta-1\,)\, U_n(x)\,]^{N+1}$, то $\det \widetilde{B}(x) = [\,(\,\alpha\beta-1\,)\, U_n(x)\,]^{N}$.

Из общей теории матриц Якоби [2, с. 42] следует, что все собственные значения матрицы $\widetilde{A}(x)$ вещественные и различные. Более того, корни любых двух соседних полиномов из семейства главных миноров $\{\,\det\big(\,\widehat{A}_{(k)}(x) - \Lambda E^0_k\,\big)\,\}_{k=0}^{N}$ матрицы $\widetilde{A}(x) - \Lambda E^0_N$, равных соответственно

$$P_1(x - \Lambda/2), \ldots, P_N(x - \Lambda/2),\ \widetilde{P}_{N+1}(x - \Lambda/2), \quad \Lambda \in \mathbb{R},$$

перемежаются. (Здесь $\widehat{A}_{(k)}(x) \doteq \overline{A}_{(k)}(x)$ — матрицы вида (1.5) для всех $k < N$, $\widehat{A}_{(N)}(x) \doteq \widetilde{A}(x)$.)

Лемма 3. *Пусть числа* $\alpha, \beta, x, \Lambda \in \mathbb{R}$ *таковы, что* $\alpha+\beta = 2x$ *и* $\alpha\beta > 1$.

1. *Если* $\beta > 0$ *и* $\Lambda = \alpha - \beta^{-1}$, *то* $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) = -\Lambda\beta^{-k} < 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Если* $\beta > 0$, *то* $x > 1$. *Если* $\Lambda \leqslant (\alpha\beta-1)/2x$, *то* $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.
3. *Если* $\beta > 0$ *и* $\Lambda \geqslant 2+2x$, *то* $(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.
4. *Если* $\beta < 0$ *и* $\Lambda = \alpha - \beta^{-1}$, *то* $(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) = \Lambda(-\beta)^{-k} < 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.
5. *Если* $\beta < 0$, *то* $x < -1$. *Если* $\Lambda \geqslant (\alpha\beta-1)/2x$, *то* $(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.
6. *Если* $\beta < 0$ *и* $\Lambda \leqslant -2+2x$, *то* $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $z \doteq x-\Lambda/2 = (\beta+\beta^{-1})/2$. Цепочка равенств

$$\beta P_k(z) - P_{k-1}(z) = \beta U_k(z) - \beta^2 U_{k-1}(z) - U_{k-1}(z) + \beta U_{k-2}(z) = (2\beta z - \beta^2 - 1)\, U_{k-1}(z) = 0$$

порождает равенство $P_k(z) = \beta^{-k}$ (поскольку $P_0(z) = 1$). Так как $\alpha\beta - 1 = \Lambda\beta$, то $\Lambda > 0$, а в силу (1.10) и (1.12) справедливо $\widetilde{P}_{k+1}(z) = \Lambda\beta U_{k-1}(z) - \Lambda U_k(z) = -\Lambda P_k(z) = -\Lambda\beta^{-k} < 0$.

2. Очевидно, $x = (\alpha+\beta)/2 > (\beta^{-1}+\beta)/2 \geqslant 1$. Пусть $\widetilde{\Lambda} \doteq (\alpha\beta-1)/2x$ и $z \doteq x - \widetilde{\Lambda}/2$. Тогда $z-1 = x-1-(\alpha\beta-1)/4x = [2\beta(x-1)+\sigma]/4x$, где $\sigma \doteq 2\alpha(x-1) - \alpha\beta + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geqslant 0$, поэтому $z > 1$ и, следовательно, $U_m(z) > 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$. Поскольку $\alpha\beta - 1 = 2\widetilde{\Lambda}\, x$, то

$$\widetilde{\Lambda}^{-1}\widetilde{P}_{k+1}(z) = 2x\, U_{k-1}(z) - U_k(z) = \widetilde{\Lambda}\, U_{k-1}(z) + 2z\, U_{k-1}(z) - U_k(z) = \widetilde{\Lambda}\, U_{k-1}(z) + U_{k-2}(z) > 0,$$

поэтому $\widetilde{P}_{k+1}(z) > 0$. Так как $\alpha > \beta^{-1} > 0$, то $(\alpha\beta-1)/2x < \alpha - \beta^{-1}$. В силу первого пункта замечаем, что многочлен $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2)$ (как функция переменной Λ) принимает значения разных знаков на концах интервала $\big((\alpha\beta-1)/2x, \alpha-\beta^{-1}\big)$, поэтому он имеет там хотя бы один корень. С другой стороны, нули многочленов $P_k(x-\Lambda/2)$ и $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2)$ перемежаются, причем все корни многочлена $P_k(x-\Lambda/2)$ лежат правее точки $\alpha - \beta^{-1}$, следовательно, левее этой точки может быть не более одного корня многочлена $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2)$. Значит, наименьший корень многочлена $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2)$ находится в интервале $\big((\alpha\beta-1)/2x, \alpha-\beta^{-1}\big)$. В частности, это означает, что для любого $\Lambda \leqslant (\alpha\beta-1)/2x$ справедлива оценка $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$.

3. Очевидно, $\Lambda \geqslant 2+\alpha+\beta > 2+\beta^{-1}+\beta > 0$ и $z \doteq x-\Lambda/2 \leqslant -1$, поэтому $(-1)^m U_m(z) > 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$. Следовательно, $(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k+1}(z) = (-1)^{k+1}(\alpha\beta-1)\, U_{k-1}(z) - (-1)^{k+1}\Lambda\, U_k(z) = (\alpha\beta-1)\big[(-1)^{k-1}U_{k-1}(z)\big] + \Lambda\big[(-1)^k U_k(z)\big] > 0$.

Далее применяем обозначения и схемы доказательств пунктов 3 и 4 леммы 1.

4. Очевидно, $\beta^* > 0$ и $\Lambda^* = \alpha^* - (\beta^*)^{-1}$, поэтому $\widetilde{P}^*_{k+1}(x^*-\Lambda^*/2) = -\Lambda^*(\beta^*)^{-k} < 0$ (в силу первого пункта леммы), а в силу (1.11) имеем $(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) = \Lambda(-\beta)^{-k} < 0$.

5. Воспользуемся пунктом 2 леммы. Справедливо $\beta^* > 0$, следовательно, $x^* > 1$, или $x < -1$. Неравенство $\Lambda \geqslant (\alpha\beta-1)/2x$ принимает вид $\Lambda^* \leqslant (\alpha^*\beta^*-1)/2x^*$, поэтому $\widetilde{P}^*_{k+1}(x^*-\Lambda^*/2) > 0$, а в силу (1.11) справедлива оценка $(-1)^{k+1}\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$.

6. Очевидно, $\beta^* > 0$ и $\Lambda^* \geqslant 2+2x^*$, поэтому $(-1)^{k+1}\widetilde{P}^*_{k+1}(x^*-\Lambda^*/2) > 0$ (в силу третьего пункта леммы), а в силу (1.11) имеем $\widetilde{P}_{k+1}(x-\Lambda/2) > 0$.

Следствие 4. *Пусть числа* $\alpha, \beta, x, c \in \mathbb{R}$ *таковы, что* $\alpha+\beta = 2x$ *и* $\alpha\beta > 1$. *Для матрицы* (1.8) *введем обозначение* $\widetilde{A}_{(N)}(x)$, *подчеркивающее ее размерность. Матрицы* $\{c\widetilde{A}_{(N)}(x)\}_{N=2}^{\infty}$ *имеют вещественный простой равномерно ограниченный (по* N*) спектр такой, что*

$$c<0 \implies \left|\begin{array}{l} \beta<0 \implies 0 < c(\alpha\beta-1)/2x < \widetilde{\Lambda}^c_0 < c(\alpha-\beta^{-1}) < \widetilde{\Lambda}^c_1 < \ldots < \widetilde{\Lambda}^c_N < c(-2+2x), \\ \beta>0 \implies c(2+2x) < \widetilde{\Lambda}^c_0 < \ldots < \widetilde{\Lambda}^c_{N-1} < c(\alpha-\beta^{-1}) < \widetilde{\Lambda}^c_N < c(\alpha\beta-1)/2x < 0, \end{array}\right.$$

$$c>0 \implies \left|\begin{array}{l} \beta<0 \implies c(-2+2x) < \widetilde{\Lambda}^c_0 < \ldots < \widetilde{\Lambda}^c_{N-1} < c(\alpha-\beta^{-1}) < \widetilde{\Lambda}^c_N < c(\alpha\beta-1)/2x < 0, \\ \beta>0 \implies 0 < c(\alpha\beta-1)/2x < \widetilde{\Lambda}^c_0 < c(\alpha-\beta^{-1}) < \widetilde{\Lambda}^c_1 < \ldots < \widetilde{\Lambda}^c_N < c(2+2x). \end{array}\right.$$

§ 2. Точные формулы для решений системы линейных уравнений (0.3) – (0.6) и для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

2.1. Для нового представления решений системы (0.3) – (0.6) введем обозначения

$$\xi_0 \doteq x_0 - z_1 = 2\tau \Big[\frac{u_0^2 - u_0^0}{2\tau} - \gamma^2 \frac{u_0^0 - 2u_1^0 + u_2^0}{h^2} \Big] = 2\tau \Big[\frac{\rho_0^2 - \rho_0^0}{2\tau} - \gamma^2 \frac{\phi_0 - 2\phi_1 + \phi_2}{h^2} \Big],$$

$$\xi_i \doteq z_i - z_{i+1} = 2\tau\gamma^2 \Big[\frac{u_{2i-2}^0 - 2u_{2i-1}^0 + u_{2i}^0}{h^2} - \frac{u_{2i}^0 - 2u_{2i+1}^0 + u_{2i+2}^0}{h^2} \Big] =$$
$$= 2\tau\gamma^2 \Big[\frac{\phi_{2i-2} - 2\phi_{2i-1} + \phi_{2i}}{h^2} - \frac{\phi_{2i} - 2\phi_{2i+1} + \phi_{2i+2}}{h^2} \Big], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\xi_{N} \doteq z_{N} - x_{2N} = 2\tau \Big[\gamma^2 \frac{u_{2N-2}^0 - 2u_{2N-1}^0 + u_{2N}^0}{h^2} - \frac{u_{2N}^2 - u_{2N}^0}{2\tau} \Big] = 2\tau \Big[\gamma^2 \frac{\phi_{2N-2} - 2\phi_{2N-1} + \phi_{2N}}{h^2} - \frac{\rho_1^2 - \rho_1^0}{2\tau} \Big],$$

$$\eta_0 \doteq y_0 = u_0^2 - 2u_0^1 + u_0^0 = \rho_0^2 - 2\rho_0^1 + \rho_0^0, \qquad \eta_1 \doteq y_{2N} = u_{2N}^2 - 2u_{2N}^1 + u_{2N}^0 = \rho_1^2 - 2\rho_1^1 + \rho_1^0.$$

Эти числа мы называем «граничными элементами». Для решений системы (0.5) в работе [1] получена формула (7.1), принимающая в терминах новых обозначений вид

$$y_{2k} = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{U_{n-k}(x)}{U_n(x)} \eta_0 - (-1)^{k+n} \dfrac{U_{k-1}(x)}{U_n(x)} \eta_1, & \text{если} \quad \omega \neq \pm 1, \\ 0, & \text{если} \quad \omega = \pm 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Что касается формул (7.3) и (7.4) из [1], каждая из которых описывает решение системы (0.6), то легко показать, что они трансформируются в формулу

$$x_{2k} = \frac{1}{U_n} \Big[(-1)^k U_{n-k}\, x_0 - (-1)^{k+n} U_{k-1}\, x_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{kj} \big((1+\alpha)\, z_j + (1+\beta)\, z_{j+1} \big) \Big], \tag{2.2}$$

где используем обозначения: $U_n \doteq U_n(y)$ и $B_{kj} \doteq B_{kj}(y)$ — числа, определенные формулой (1.4).

Для любого $k = 1, \ldots, n$ справедливо $\sum\limits_{i=k}^{n} \xi_i = \sum\limits_{i=k}^{n} z_i - \sum\limits_{i=k}^{n} z_{i+1} = z_k - z_{N}$, следовательно, если обозначить $\Delta \doteq z_{N}$, то $z_k = \Delta + \sum\limits_{i=k}^{n} \xi_i$ для всех $k = 1, \ldots, N$,

$$(1+\alpha)\, z_j + (1+\beta)\, z_{j+1} = 2\,(1+y) \Big[\Delta + \sum_{i=j}^{n} \xi_i \Big] - (1+\beta)\, \xi_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

2.2. Таким образом, формула (2.2) (приведем ее к итоговому виду (2.6)) принимает вид

$$(-1)^k U_n\, x_{2k} = U_{n-k} \Big[\xi_0 + \Delta + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Big] - (-1)^n U_{k-1} \Big[\Delta - \xi_{N} \Big] +$$
$$+ U_{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j U_{j-1} \Big[2\,(1+y) \Big(\Delta + \sum_{i=j}^{n} \xi_i \Big) - (1+\beta)\, \xi_j \Big] +$$
$$+ U_{k-1} \sum_{j=k}^{n} (-1)^j U_{n-j} \Big[2\,(1+y) \Big(\Delta + \sum_{i=j}^{n} \xi_i \Big) - (1+\beta)\, \xi_j \Big]. \tag{2.4}$$

(Так как $U_{-1} = 0$, то первое суммирование по j мы можем осуществлять, начиная с нуля.) Для коэффициента (обозначим его σ), стоящего перед Δ, справедливо $\sigma = U_{n-k}\, \sigma_1 + U_{k-1}\, \sigma_2$, где

$$\sigma_1 \doteq 1 + 2\,(1+y) \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j U_{j-1}, \qquad \sigma_2 \doteq -(-1)^n + 2\,(1+y) \sum_{j=k}^{n} (-1)^j U_{n-j}.$$

В силу формул (1.2) и (1.3) имеем $\sigma_2 = (-1)^k\, (U_{n-k} + U_{N-k})$,

$$\sigma_1 = 1 + (U_{-2} + U_{-1}) + (-1)^{k-1} (U_{k-2} + U_{k-1}) = -(-1)^k (U_{k-2} + U_{k-1}),$$
$$(-1)^k \sigma = -(U_{k-2} + U_{k-1})\, U_{n-k} + U_{k-1} (U_{n-k} + U_{N-k}) = -U_{k-2}U_{n-k} + U_{k-1}U_{N-k} = U_n. \tag{2.5}$$

Воспользовались формулой (1.1). Таким образом, формула (2.4) принимает вид

$$(-1)^k\, U_n\, [\, x_{2k} - \Delta\,] = U_{n-k} \sum_{i=0}^{n} \xi_i + (-1)^n\, U_{k-1}\, \xi_{\scriptscriptstyle N} +$$

$$+ U_{n-k}\, \Sigma_1 - (\, 1+\beta\,)\, U_{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, U_{j-1}\, \xi_j + U_{k-1}\, \Sigma_2 - (\, 1+\beta\,)\, U_{k-1} \sum_{j=k}^{n} (-1)^j\, U_{n-j}\, \xi_j,$$

где

$$\Sigma_1 \doteq \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, U_{j-1} \Big[\, 2\, (\, 1+y\,) \sum_{i=j}^{n} \xi_i \Big],$$

$$\Sigma_2 \doteq \sum_{j=k}^{n} (-1)^j\, U_{n-j} \Big[\, 2\, (\, 1+y\,) \sum_{i=j}^{n} \xi_i \Big] = \sum_{i=k}^{n} \Big[\, 2\, (\, 1+y\,) \sum_{j=k}^{i} (-1)^j\, U_{n-j} \Big]\, \xi_i =$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \Big[\, (-1)^k \big(\, U_{n-k} + U_{\scriptscriptstyle N-k}\, \big) + (-1)^i \big(\, U_{n-i-1} + U_{n-i}\, \big) \Big]\, \xi_i.$$

Применили формулу (1.3). Пусть $\delta_{ij}^{\geqslant}$ — символ Кронекера такой, что $\delta_{ij}^{\geqslant} = 1$ при $i \geqslant j$ и $\delta_{ij}^{\geqslant} = 0$ при $i < j$. В соответствии с формулой (1.2) имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{j=0}^{n} \delta_{k-1,\, j}^{\geqslant}\, (-1)^j\, U_{j-1} \Big[\, 2\, (\, 1+y\,) \sum_{i=0}^{n} \delta_{ij}^{\geqslant}\, \xi_i \Big] = \sum_{i=0}^{n} \Big[\, 2\, (\, 1+y\,) \sum_{j=0}^{n} \delta_{k-1,\, j}^{\geqslant}\, \delta_{ij}^{\geqslant}\, (-1)^j\, U_{j-1} \Big]\, \xi_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_i \Big[\, 2\, (\, 1+y\,) \sum_{j=0}^{m} (-1)^j\, U_{j-1} \Big]_{m=\min\{k-1,\, i\}} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \Big[-1 + (-1)^m \big(\, U_{m-1} + U_m\, \big) \Big]_{m=\min\{k-1,\, i\}} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n} \xi_i + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \big(\, U_{i-1} + U_i\, \big)\, \xi_i + (-1)^{k-1} \big(\, U_{k-2} + U_{k-1}\, \big) \sum_{i=k}^{n} \xi_i.$$

Значит,

$$(-1)^k\, U_n\, [\, x_{2k} - \Delta\,] = (-1)^n\, U_{k-1}\, \xi_{\scriptscriptstyle N} + U_{n-k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \big(\, U_{i-1} + U_i\, \big)\, \xi_i +$$

$$+ (-1)^k \Big[-\big(\, U_{k-2} + U_{k-1}\, \big)\, U_{n-k} + U_{k-1} \big(\, U_{n-k} + U_{\scriptscriptstyle N-k}\, \big) \Big] \sum_{i=k}^{n} \xi_i + U_{k-1} \sum_{i=k}^{n} (-1)^i \big(\, U_{n-i-1} + U_{n-i}\, \big)\, \xi_i -$$

$$- (\, 1+\beta\,)\, U_{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, U_{j-1}\, \xi_j - (\, 1+\beta\,)\, U_{k-1} \sum_{j=k}^{n} (-1)^j\, U_{n-j}\, \xi_j.$$

Выражение в квадратных скобках равно U_n (см. (2.5)). Если $\Sigma \doteq (-1)^k\, U_n\, [\, x_{2k} - z_k\,]$, то

$$\Sigma = (-1)^k\, U_n \Big[\, x_{2k} - \Delta - \sum_{i=k}^{n} \xi_i \Big] = (-1)^n\, U_{k-1}\, \xi_{\scriptscriptstyle N} + U_{n-k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \big(\, U_{i-1} + U_i\, \big)\, \xi_i +$$

$$+ U_{k-1} \sum_{i=k}^{n} (-1)^i \big(\, U_{n-i-1} + U_{n-i}\, \big)\, \xi_i - (\, 1+\beta\,)\, U_{n-k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i\, U_{i-1}\, \xi_i - (\, 1+\beta\,)\, U_{k-1} \sum_{i=k}^{n} (-1)^i\, U_{n-i}\, \xi_i.$$

Приведя подобные члены, получаем, что

$$\Sigma = U_{n-k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \big(\, U_i - \beta\, U_{i-1}\, \big)\, \xi_i + U_{k-1} \sum_{i=k}^{n} (-1)^i \big(\, U_{n-i-1} - \beta\, U_{n-i}\, \big)\, \xi_i + (-1)^n\, U_{k-1}\, \xi_{\scriptscriptstyle N} =$$

$$= U_{n-k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \big(\, U_i - \beta\, U_{i-1}\, \big)\, \xi_i - U_{k-1} \sum_{i=k}^{N} (-1)^i \big(\, U_{\scriptscriptstyle N-i} - \alpha\, U_{n-i}\, \big)\, \xi_i,$$

$$x_{2k} = z_k + \frac{U_{n-k}(y)}{U_n(y)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i} P_i(y)\, \xi_i - \frac{U_{k-1}(y)}{U_n(y)} \sum_{i=k}^{N} (-1)^{k+i} Q_{N-i}(y)\, \xi_i. \tag{2.6}$$

2.3. Таким образом, в терминах введенных в работе обозначений справедлива

Теорема 4. *Система уравнений* (0.3) – (0.6) *имеет единственное решение, и оно допускает явное представление через граничные элементы* z_k, $k = 1, \ldots, n$, ξ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, η_0, η_1. *Для переменных, входящих в систему* (0.6), *имеет место равенство* (2.6). *Для переменных, входящих в систему* (0.5), *имеет место равенство* (2.1). *Данные представления позволяют сначала явно вычислить из уравнений* (0.4) *величины* x_{2k-1}, *затем из уравнений* (0.3) *— величины* y_{2k-1}, *и, наконец, из уравнений* (0.2) *— коэффициенты* u_j^2 *и* u_j^1 *оптимального аппроксимирующего сплайна задачи* (0.1).

§ 3. Точная формула для невязки оптимального аппроксимирующего сплайна

3.1. Через $J^*(\omega)$ обозначим минимум функционала (0.1) в пространстве $\sigma_\omega(\Pi)$. В соответствии с теоремой 3 работы [1] справедливо равенство $J^*(\omega) = \frac{\nu}{24}\,(\,\sigma_y + \sigma_x\,)$, где величины σ_y и σ_x вычислимы по формулам (8.1) и (8.2) [1] соответственно, а $\nu \doteq \frac{h}{3\tau}$. В свете новых обозначений для формулы (8.1) справедливо представление $\sigma_y = 24\,\varkappa(\omega)$, где

$$\varkappa(\omega) \doteq \begin{cases} \dfrac{31+30\omega^2+3\omega^4}{16\,(3+\omega^2)}\, \dfrac{1}{x\,U_n(x)} \left\langle \begin{bmatrix} T_N(x) & (-1)^n \\ (-1)^n & T_N(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \right\rangle, & \text{если } \omega \neq \pm 1, \\ \eta_0^2 + \eta_1^2\,, & \text{если } \omega = \pm 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Многочлены Чебышева 1-го рода определяем равенством $T_N(x) \doteq x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)$. Напомним также, что $x = \dfrac{31+30\omega^2+3\omega^4}{(\,1-\omega^2)\,(\,1+3\omega^2)} \geqslant 15+8\sqrt{3}$ (см. введение). Что касается формулы (8.2) для величины σ_x (представляющей собой положительно определенную квадратичную форму от исходных конечных разностей), то она плохо приспособлена для анализа качества оптимизации задачи (0.1) при варьировании параметрами N и ω. Этот недостаток вынуждает нас искать альтернативное представление для σ_x. На странице 168 [1] имеет место формула

$$\frac{R}{6}\,\sigma_x = (\,Q+S+2P\,)\,x_0^2 + (\,Q+S-2P\,)\,x_{2N}^2 + (\,Q-S\,)\,(\,x_0x_2 + x_{2n}x_{2N}\,) -$$
$$-4\,(\,Q+P\,)\,x_0 z_1 - 4\,(\,Q-P\,)\,x_{2N} z_N - 2Q \sum_{k=1}^{n} x_{2k} w_k + 4Q \sum_{k=1}^{N} z_k^2 \tag{3.2}$$

(величина w_k определена в [1, с. 165], а остальные выражения определены во введении), и мы замечаем, что правая часть (3.2) зависит от величин $x_2, x_4, \ldots, x_{2n}$ линейно. Остается лишь воспользоваться формулой (2.6) и сгруппировать слагаемые.

3.2. Данные вычисления составляют оставшуюся часть параграфа.

Лемма 4. *Для любых* $k, m = 0, 1, \ldots$ *справедливы равенства*

$$P_k\, U_m + U_{k-1} Q_{m+1} = U_{k+m}, \qquad P_k\, U_{m-1} + U_k Q_{m+1} = \beta\, U_{k+m}. \tag{3.3}$$

Действительно, в силу (1.1) справедливы две цепочки равенств

$$P_k\, U_m + U_{k-1} Q_{m+1} = (\,U_k - \beta\, U_{k-1}\,)\, U_m + U_{k-1}\,(\,U_{m+1} - \alpha\, U_m\,) =$$
$$= U_k U_m - 2x\, U_{k-1} U_m + U_{k-1} U_{m+1} = U_k U_m - U_{k-1} U_{m-1} = U_{k+m},$$
$$P_k\, U_{m-1} + U_k Q_{m+1} = (\,U_k - \beta\, U_{k-1}\,)\, U_{m-1} + U_k\,(\,U_{m+1} - \alpha\, U_m\,) =$$
$$= (\,U_k - \beta\, U_{k-1}\,)\, U_{m-1} + U_k\,(\,\beta\, U_m - U_{m-1}\,) = \beta\,(\,U_k U_m - U_{k-1} U_{m-1}\,) = \beta\, U_{k+m}.$$

Для любого $k = 0, 1, \ldots, N+1$ определим числа (слагаемые формулы (2.6))

$$g_k(y) \doteq g_k \doteq \frac{U_{n-k}}{U_n} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i} P_i\, \xi_i, \qquad h_k(y) \doteq h_k \doteq -\frac{U_{k-1}}{U_n} \sum_{i=k}^{N} (-1)^{k+i} Q_{N-i}\, \xi_i.$$

Очевидно, $g_0 = h_0 = g_N = h_{N+1} = 0$, $h_N = -\xi_N$. Пусть, далее, $f_k \doteq g_k + h_k$.

Лемма 5. *Для любого* $\ell = 0, 1, \ldots, N$ *имеет место равенство*

$$2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{\ell} f_k = f_1 + f_\ell - f_{\ell+1} + \beta\,\xi_0 + \xi_\ell - (\,1{+}\beta\,)\sum_{k=0}^{\ell}\xi_k. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\ell = 0$ утверждение очевидно. Пусть $\ell > 0$. Так как $g_0 = 0$, то

$$2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{\ell} g_k = 2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=1}^{\ell}\frac{U_{n-k}}{U_n}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}P_i\,\xi_i = \sum_{i=0}^{\ell-1}\Big[\,2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=i+1}^{\ell}(-1)^k U_{n-k}\Big](-1)^i\,\frac{P_i}{U_n}\,\xi_i.$$

В силу (1.3) для выражения, стоящего в квадратных скобках, справедливо равенство

$$2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=i+1}^{\ell}(-1)^k\,U_{n-k} = (-1)^{i+1}(\,U_{n-i-1}{+}\,U_{n-i}\,) + (-1)^{\ell}(\,U_{n-\ell-1}{+}\,U_{n-\ell}\,),$$

поэтому

$$\begin{aligned}2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{\ell} g_k &= \sum_{i=0}^{\ell-1}\Big[\,(-1)^{i+1}(\,U_{n-i-1}{+}\,U_{n-i}\,) + (-1)^{\ell}(\,U_{n-\ell-1}{+}\,U_{n-\ell}\,)\Big](-1)^i\,\frac{P_i}{U_n}\,\xi_i = \\ &= \sum_{i=0}^{\ell}\Big[\,(-1)^{i+1}(\,U_{n-i-1}{+}\,U_{n-i}\,) + (-1)^{\ell}(\,U_{n-\ell-1}{+}\,U_{n-\ell}\,)\Big](-1)^i\,\frac{P_i}{U_n}\,\xi_i = \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$= -\sum_{i=0}^{\ell}(\,U_{n-i-1}+U_{n-i}\,)\,\frac{P_i}{U_n}\,\xi_i + \sigma_1 + \sigma_2 = -\sum_{i=0}^{\ell}(\,U_{n-i-1}+U_{n-i}\,)\,\frac{P_i}{U_n}\,\xi_i\; - \;g_{\ell+1} + \frac{U_{n-\ell}}{U_n}\,P_\ell\,\xi_\ell\; + \;g_\ell,$$

где $\sigma_1 \doteq \dfrac{U_{n-\ell-1}}{U_n}\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^{\ell+i}\,P_i\,\xi_i = -g_{\ell+1}$, $\sigma_2 \doteq \dfrac{U_{n-\ell}}{U_n}\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^{\ell+i}\,P_i\,\xi_i = \dfrac{U_{n-\ell}}{U_n}\,P_\ell\,\xi_\ell + g_\ell$.

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{\ell} h_k &= 2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{N}\delta^{\geqslant}_{\ell k}\,h_k = -2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{N}\delta^{\geqslant}_{\ell k}\,\frac{U_{k-1}}{U_n}\sum_{i=0}^{N}\delta^{\geqslant}_{ik}\,(-1)^{k+i}\,Q_{N-i}\,\xi_i = \\ &= -\sum_{i=0}^{N}\Big[\,2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{N}\delta^{\geqslant}_{\ell k}\,\delta^{\geqslant}_{ik}\,(-1)^k\,U_{k-1}\Big](-1)^i\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i = \\ &= -\sum_{i=0}^{N}\Big[\,2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,U_{k-1}\Big]_{m=\min\{\,\ell,\,i\,\}}(-1)^i\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i.\end{aligned}$$

В силу формулы (1.2) имеет место продолжение

$$2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{\ell} h_k = -\sum_{i=0}^{N}\Big[-1 + (-1)^m(\,U_{m-1}{+}\,U_m\,)\Big]_{m=\min\{\,\ell,\,i\,\}}(-1)^i\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i - \sum_{i=0}^{\ell}(\,U_{i-1}{+}\,U_i\,)\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i - \sum_{i=\ell+1}^{N}(-1)^{\ell+i}\,(\,U_{\ell-1}{+}\,U_\ell\,)\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i.$$

Поскольку $Q_N = U_N - \alpha U_n = \beta\,U_n - U_{n-1}$, то справедливо равенство

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i = \frac{Q_N}{U_n}\,\xi_0 + h_1 = \Big(\beta - \frac{U_{n-1}}{U_n}\Big)\,\xi_0 + h_1 = \beta\,\xi_0 + g_1 + h_1 = \beta\,\xi_0 + f_1,$$

а так как $\dfrac{U_{\ell-1}}{U_n}\displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{N}(-1)^{\ell+i}\,Q_{N-i}\,\xi_i = -h_\ell - \dfrac{U_{\ell-1}}{U_n}\,Q_{N-\ell}\,\xi_\ell$, $\dfrac{U_\ell}{U_n}\displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{N}(-1)^{\ell+i}\,Q_{N-i}\,\xi_i = h_{\ell+1}$, то

$$2\,(\,1{+}y\,)\sum_{k=0}^{\ell} h_k = \beta\,\xi_0 + f_1 - \sum_{i=0}^{\ell}(\,U_{i-1}{+}\,U_i\,)\,\frac{Q_{N-i}}{U_n}\,\xi_i + h_\ell + \frac{U_{\ell-1}}{U_n}\,Q_{N-\ell}\,\xi_\ell - h_{\ell+1}. \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) и (3.6) порождают итоговую цепочку равенств

$$2\,(1+y)\sum_{k=0}^{\ell} f_k = 2\,(1+y)\sum_{k=0}^{\ell}(\,g_k + h_k\,) = f_1 + f_\ell - f_{\ell+1} + \beta\,\xi_0 +$$

$$+\frac{1}{U_n}\,(\,P_\ell\,U_{n-\ell} + U_{\ell-1}Q_{N-\ell}\,)\,\xi_\ell - \frac{1}{U_n}\sum_{i=0}^{\ell}\Big[\,(\,P_i\,U_{n-i} + U_{i-1}Q_{N-i}\,) + (\,P_i\,U_{n-i-1} + U_i\,Q_{N-i}\,)\Big]\,\xi_i =$$

$$= f_1 + f_\ell - f_{\ell+1} + \beta\,\xi_0 + \xi_\ell - (\,1+\beta\,)\sum_{i=0}^{\ell}\xi_i,$$

завершающуюся ссылкой на формулы (3.3). □

3.3. Для величин, входящих в фомулу (3.2), справедливы следующие равенства:

$$Q+S+2P = \beta\,(\,Q-S\,),\quad Q+S-2P = \alpha\,(\,Q-S\,),\quad 2\,(\,Q+P\,) = (\,1+\beta\,)\,(\,Q-S\,),$$

$$2\,(\,Q-P\,) = (\,1+\alpha\,)\,(\,Q-S\,),\quad 2Q = (\,1+y\,)\,(\,Q-S\,),\quad (\,1+y\,)\,w_k = (\,1+\alpha\,)\,z_k + (\,1+\beta\,)\,z_{k+1}$$

(вывод лишь последней формулы требует определенных усилий). Следовательно, формула (3.2) принимает вид

$$\frac{R}{6\,(\,S-Q\,)}\,\sigma_x = -\beta\,x_0^2 - \alpha\,x_{2N}^2 - x_0x_2 - x_{2n}x_{2N} +$$

$$+\,2\,(\,1+\beta\,)\,x_0z_1 + 2\,(\,1+\alpha\,)\,x_{2N}\,z_N + \sum_{k=1}^{n} x_{2k}\,\big(\,(\,1+\alpha\,)\,z_k + (\,1+\beta\,)\,z_{k+1}\,\big) - 2\,(\,1+y\,)\sum_{k=1}^{N} z_k^2 \qquad (3.7)$$

(во введении мы отмечали, что $Q-S<0$). В силу формулы (2.6) для любого $k=1,\ldots,n$ имеет место представление $x_{2k} = z_k + f_k = \Delta + \sum\limits_{i=k}^{n}\xi_i + f_k$ (напомним, что $\Delta \doteq z_N$), поэтому

$$\frac{R}{6\,(\,S-Q\,)}\,\sigma_x = -\beta\Big(\xi_0+\Delta+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big)^2 - \alpha\,(\,\Delta-\xi_N\,)^2 - \Big(\xi_0+\Delta+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big)\Big(\Delta+\sum_{i=1}^{n}\xi_i + f_1\Big) -$$

$$-(\,\Delta+\xi_n+f_n\,)\,(\,\Delta-\xi_N\,) + 2\,(\,1+\beta\,)\Big(\xi_0+\Delta+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big)\Big(\Delta+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big) + 2\,(\,1+\alpha\,)\,(\,\Delta-\xi_N\,)\,\Delta +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Big(\Delta+\sum_{i=k}^{n}\xi_i+f_k\Big)\Big(2\,(\,1+y\,)\,\Delta+2\,(\,1+y\,)\sum_{i=k}^{n}\xi_i-(\,1+\beta\,)\,\xi_k\Big)-2\,(\,1+y\,)\sum_{k=1}^{N}\Big(\Delta+\sum_{i=k}^{n}\xi_i\Big)^2 \qquad (3.8)$$

(заменили выражение $(\,1+\alpha\,)\,z_k + (\,1+\beta\,)\,z_{k+1}$ в соответствии с (2.3)). Обозначим правую часть формулы (3.8), являющуюся квадратным трехчленом от переменной Δ, через $F(\Delta)$. Тогда

$$\frac{1}{2}\,F''(\Delta) = -\beta - \alpha - 1 - 1 + 2\,(\,1+\beta\,) + 2\,(\,1+\alpha\,) + 2n\,(\,1+y\,) - 2N\,(\,1+y\,) = 0$$

и имеет место цепочка равенств

$$F'(0) = -2\,\beta\sum_{i=0}^{n}\xi_i + 2\,\alpha\,\xi_N - \sum_{i=0}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\xi_i - f_1 - \xi_n - f_n + \xi_N + 2\,(\,1+\beta\,)\Big[\sum_{i=0}^{n}\xi_i + \sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big] -$$

$$-2\,(\,1+\alpha\,)\,\xi_N + \sum_{k=1}^{n}\Big[2\,(\,1+y\,)\sum_{i=k}^{n}\xi_i - (\,1+\beta\,)\,\xi_k + 2\,(\,1+y\,)\sum_{i=k}^{n}\xi_i + 2\,(\,1+y\,)\,f_k\Big] - 4\,(\,1+y\,)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\xi_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\xi_i - \xi_N + (\,1+2\beta\,)\sum_{i=1}^{n}\xi_i - f_1 - \xi_n - f_n - (\,1+\beta\,)\sum_{k=1}^{n}\xi_k + 2\,(\,1+y\,)\sum_{k=1}^{n} f_k =$$

$$= (\,1+\beta\,)\sum_{i=0}^{n}\xi_i - \beta\,\xi_0 + f_N - f_1 - \xi_n - f_n + 2\,(\,1+y\,)\sum_{k=0}^{n} f_k = 0.$$

Воспользовались равенствами $f_N=-\xi_N$, $f_0=0$ и леммой 5. Таким образом, $F(\Delta)=F(0)$ для любого Δ, следовательно, формула (3.8) (а вместе с ней и формула (3.2)) принимает вид

$$\frac{R}{6\,(S-Q)}\,\sigma_x=-\beta\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)^2-\alpha\,\xi_N^2-\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i+f_1\Big)+$$
$$+(\xi_n+f_n)\,\xi_N+2\,(1+\beta)\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=k}^{n}\xi_i+f_k\Big)\Big(2\,(1+y)\sum_{i=k}^{n}\xi_i-(1+\beta)\,\xi_k\Big)-2\,(1+y)\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=k}^{n}\xi_i\Big)^2=$$
$$=-\beta\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)^2-\alpha\,\xi_N^2-\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)\xi_0-\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)f_1+$$
$$+(\xi_n+f_n)\,\xi_N+2\,(1+\beta)\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)^2-2\,(1+\beta)\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)\xi_0+$$
$$+\Big\{2\,(1+y)\sum_{k=0}^{n}f_k\sum_{i=k}^{n}\xi_i\Big\}-(1+\beta)\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=k}^{n}\xi_i\Big)\xi_k+(1+\beta)\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)\xi_0-(1+\beta)\sum_{k=0}^{n}f_k\,\xi_k.$$

Подвели к виду, в котором все суммирования идут с нуля (напомним, что $f_0=0$). Следовательно, приведя подобные члены, получаем

$$\frac{R}{6\,(S-Q)}\,\sigma_x=(1+\beta)\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)^2-\alpha\,\xi_N^2-\beta\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)\xi_0-\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)f_1+(\xi_n+f_n)\,\xi_N+$$
$$+\Sigma-(1+\beta)\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}\xi_j\Big)\xi_i-(1+\beta)\sum_{k=0}^{n}f_k\,\xi_k,$$

где Σ — это выражение, стоящее в фигурных скобках. В силу (3.4) имеет место равенство

$$\Sigma\doteq\sum_{i=0}^{n}\Big[2\,(1+y)\sum_{k=0}^{i}f_k\Big]\xi_i=\sum_{i=0}^{n}\Big[f_1+f_i-f_{i+1}+\beta\,\xi_0+\xi_i-(1+\beta)\sum_{j=0}^{i}\xi_j\Big]\xi_i.$$

Приведя еще раз подобные члены, получаем

$$\frac{R}{6\,(S-Q)}\,\sigma_x=(1+\beta)\Big(\sum_{i=0}^{n}\xi_i\Big)^2-\alpha\,\xi_N^2+(\xi_n+f_n)\,\xi_N-\beta\sum_{i=0}^{n}f_i\,\xi_i-\sum_{i=0}^{n}f_{i+1}\,\xi_i+\sum_{i=0}^{n}\xi_i^2-$$
$$-(1+\beta)\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i}\xi_j\Big)\xi_i-(1+\beta)\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}\xi_j\Big)\xi_i=$$
$$=(1+\beta)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\xi_i\,\xi_j-\alpha\,\xi_N^2+(\xi_n+f_n)\,\xi_N-\sum_{i=0}^{n}\big(\beta\,f_i+f_{i+1}\big)\,\xi_i+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ij}\,\xi_i\,\xi_j-$$
$$-(1+\beta)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ij}^{\geqslant}\,\xi_i\,\xi_j-(1+\beta)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ji}^{\geqslant}\,\xi_i\,\xi_j.$$

Так как $\delta_{ij}^{\geqslant}+\delta_{ji}^{\geqslant}=1+\delta_{ij}$, то

$$\frac{R}{6\,(S-Q)}\,\sigma_x=-\beta\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ij}\,\xi_i\,\xi_j-\alpha\,\xi_N^2+(\xi_n+f_n)\,\xi_N-\sum_{i=0}^{n}\big(\beta\,f_i+f_{i+1}\big)\,\xi_i=$$
$$=-\beta\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\,\xi_i\,\xi_j+\beta\,\xi_N^2-\alpha\,\xi_N^2+(\xi_n+f_n)\,\xi_N-\sum_{i=0}^{N}\big(\beta\,f_i+f_{i+1}\big)\,\xi_i+\big(\beta\,f_N+f_{N+1}\big)\,\xi_N=$$
$$=-\beta\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\,\xi_i\,\xi_j-\sum_{i=0}^{N}\big(\beta\,f_i+f_{i+1}\big)\,\xi_i+\sigma\,\xi_N,$$

где

$$\sigma \doteq \beta\,\xi_{N} - \alpha\,\xi_{N} + \xi_n + f_n + \beta\, f_{N} + f_{N+1} =$$

$$= \beta\,\xi_{N} - \alpha\,\xi_{N} + \xi_n + \frac{1}{U_n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i}P_i\,\xi_i - \frac{U_{n-1}}{U_n}\sum_{i=n}^{N}(-1)^{n+i}Q_{N-i}\,\xi_i - \beta\,\xi_{N} + \frac{U_{-2}}{U_n}\sum_{i=0}^{N}(-1)^{n+i}P_i\,\xi_i.$$

Так как $U_{-2} = -1$, то произойдут массовые сокращения, и мы получим, что

$$U_n\,\sigma = -\alpha\,U_n\,\xi_{N} + U_n\,\xi_n - U_{n-1}\big(\,Q_1\,\xi_n - Q_0\,\xi_{N}\big) - \big(\,P_n\,\xi_n - P_{N}\,\xi_{N}\big) =$$

$$= \big(\,U_n - \beta\,U_{n-1} - P_n\,\big)\,\xi_n + \big(-\alpha\,U_n + U_{n-1} + P_{N}\,\big)\,\xi_{N} = \big(-\alpha\,U_n + U_{n-1} + U_{N} - \beta\,U_n\,\big)\,\xi_{N} = 0.$$

Значит, $\dfrac{R}{6\,(\,S-Q\,)}\,\sigma_x = -\beta\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\,\xi_i\,\xi_j - \sum_{i=0}^{N}\big(\,\beta\, f_i + f_{i+1}\big)\,\xi_i$. Для любого $i = 0,1,\ldots,N+1$ имеет место представление $f_i = \dfrac{U_{n-i}}{U_n}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\delta^{\geqslant}_{i-1,\,j}\,(-1)^{i+j}P_j\,\xi_j - \dfrac{U_{i-1}}{U_n}\sum_{j=0}^{N}\delta^{\geqslant}_{ji}\,(-1)^{i+j}Q_{N-j}\,\xi_j$, следовательно,

$$\frac{R}{6\,(\,S-Q\,)}\,\sigma_x = \frac{1}{U_n}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\Theta_{ij}\,\xi_i\,\xi_j,$$

где

$$\Theta_{ij} \doteq -\beta\,U_n\,\delta_{ij} - \beta\,U_{n-i}\,\delta^{\geqslant}_{i-1,\,j}\,(-1)^{i+j}P_j + \beta\,U_{i-1}\,\delta^{\geqslant}_{ji}\,(-1)^{i+j}Q_{N-j} -$$
$$-U_{n-i-1}\,\delta^{\geqslant}_{ij}\,(-1)^{i+1+j}P_j + U_i\,\delta^{\geqslant}_{j,\,i+1}\,(-1)^{i+1+j}Q_{N-j}.$$

Если $j < i$, то $\delta_{ij} = \delta^{\geqslant}_{ji} = \delta^{\geqslant}_{j,\,i+1} = 0$, поэтому

$$\Theta_{ij} = (-1)^{i+j}\big(-\beta\,U_{n-i} + U_{n-i-1}\big)\,P_j = (-1)^{i+j}\big(\,\alpha\,U_{n-i} - U_{N-i}\big)\,P_j = -(-1)^{i+j}Q_{N-i}\,P_j.$$

Если $j > i$, то $\delta_{ij} = \delta^{\geqslant}_{i-1,\,j} = \delta^{\geqslant}_{ij} = 0$ и $\Theta_{ij} = (-1)^{i+j}\big(\,\beta\,U_{i-1} - U_i\,\big)\,Q_{N-j} = -(-1)^{i+j}P_i\,Q_{N-j}$. Так как $\beta\,U_{i-1} = -P_i + U_i$, то в силу (3.3) справедлива цепочка равенств

$$\Theta_{ii} = -\beta\,U_n + \beta\,U_{i-1}\,Q_{N-i} + U_{n-i-1}\,P_i = -P_i\,Q_{N-i} + \big(-\beta\,U_n + U_i\,Q_{N-i} + U_{n-i-1}\,P_i\,\big) = -P_i\,Q_{N-i}.$$

Таким образом, $\Theta_{ij} = -\widetilde{B}_{ij} = -\widetilde{B}_{ij}(y)$ для всех $i,j = 0,1,\ldots,N$ (см. (1.9)), следовательно,

$$\frac{R}{6\,(\,S-Q\,)}\,\sigma_x = -\frac{1}{U_n(y)}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\widetilde{B}_{ij}(y)\,\xi_i\,\xi_j = -\frac{1}{U_n(y)}\big\langle\,\widetilde{B}(y)\,\xi,\xi\,\big\rangle = -(\,\alpha\beta-1\,)\big\langle\,\widetilde{A}^{-1}(y)\,\xi,\xi\,\big\rangle \tag{3.9}$$

(воспользовались теоремой 3 и обозначением $\xi \doteq (\,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{N})'$).

3.4. В итоге мы получаем равенство $\sigma_x = 12\,\big\langle\,[\,c\,\widetilde{A}(y)\,]^{-1}\xi,\xi\,\big\rangle$, где

$$c \doteq c\,(\omega) \doteq -2R\,\big[\,(\,S-Q\,)\,(\,\alpha\beta-1\,)\,\big]^{-1} < 0, \tag{3.10}$$

и, следовательно, в терминах введенных в работе обозначений справедлива

Теорема 5. *Минимум $J^*(\omega)$ функционала* (0.1) *достигается на решении системы уравнений* (0.3) – (0.6), *и для него имеет место представление $J^*(\omega) = \frac{h}{6\tau}\big(\,2\,\varkappa(\omega) + \big\langle\,[\,c\,\widetilde{A}(y)\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle\big)$ через граничные элементы $\eta_0,\,\eta_1,\ \xi_i,\ i = 0,1,\ldots,N$. Величины $\varkappa(\omega)$ и $c \doteq c\,(\omega)$ вычислимы по формулам* (3.1) *и* (3.10) *соответственно, а матрица $\widetilde{A}(y) \doteq \widetilde{A}(y(\omega))$ задана формулой* (1.8).

§ 4. О параметрах наилучшей аппроксимации

4.1. Теорема 5 позволяет провести исследование на качество аппроксимации при разных N и ω. В соответствии со следствием 4 для спектра матрицы $[\,c\,\widetilde{A}(y)\,]^{-1}$ справедливо

$$0 < [\,c\,(-2+2y\,)\,]^{-1} < [\,\widetilde{\Lambda}^{c}_{N}\,]^{-1} < \ldots < [\,\widetilde{\Lambda}^{c}_{1}\,]^{-1} < [\,c\,(\,\alpha-\beta^{-1})\,]^{-1} < [\,\widetilde{\Lambda}^{c}_{0}\,]^{-1} < [\,c\,(\,\alpha\beta-1\,)/2y\,]^{-1}$$

(имеем $c < 0$ и $\beta < 0$), следовательно, при любом N имеют место оценки

$$[\,c\,(-2+2y\,)\,]^{-1}\|\,\xi\,\|^2_{N} < \big\langle\,[\,c\,\widetilde{A}(y)\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle < [\,c\,(\,\alpha\beta-1\,)/2y\,]^{-1}\|\,\xi\,\|^2_{N},$$

и нам остается лишь найти те $\omega \in [-1,1]$, которые доставляют $\min\,[\,c\,(\,\alpha\beta-1\,)/2y\,]^{-1}$.

Справедлива цепочка равенств

$$[\,c\,(\,\alpha\beta-1\,)/2y\,]^{-1}=\Big[\,\frac{2R}{(\,Q-S\,)\,(\,\alpha\beta-1\,)}\;\frac{\alpha\beta-1}{2y}\,\Big]^{-1}=\frac{(\,Q-S\,)\,y}{R}=\frac{Q+S}{R}=2\,\Big[\,2-\frac{r^2+\theta^2\omega^2}{R}\,\Big],$$

и легко убедиться, что минимум достигается при $\omega=0$ и равен $\Lambda^*\doteq 1+5\,(7+32\,\theta+48\,\theta^2\,)^{-1}$.

4.2. Исследуем на сходимость последовательность $\{\,\|\,\xi\,\|_N^2\,\}_{N=2}^{\infty}$, которая порождена функциями $\phi\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$ и $\rho_0,\rho_1:\ [0,2\tau]\to\mathbb{R}$. Очевидно, $\|\,\xi\,\|_N^2=\xi_0^2+S_n+\xi_N^2$, где $S_n\doteq\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$ — величина, зависящая исключительно от функции ϕ. Для упрощения изложения полагаем, что $\phi\in\mathrm{C}^3[\,0,1]$. В силу формулы Тейлора для любого $i=1,\ldots,n$ имеют место равенства

$$\phi_{2i-2}=\phi\big((2i-2)h\big)=\sum_{k=0}^{2}\frac{\phi^{(k)}(2ih)}{k!}\,(-2h\,)^k+\frac{\phi^{(3)}(\vartheta_{-2})}{6}\,(-2h\,)^3,\qquad \vartheta_{-2}\in[\,(2i-2)h,2ih\,],$$

$$\phi_{2i-1}=\phi\big((2i-1)h\big)=\sum_{k=0}^{2}\frac{\phi^{(k)}(2ih)}{k!}\,(-h\,)^k+\frac{\phi^{(3)}(\vartheta_{-1})}{6}\,(-h\,)^3,\qquad \vartheta_{-1}\in[\,(2i-1)h,2ih\,],$$

$$\phi_{2i+1}=\phi\big((2i+1)h\big)=\sum_{k=0}^{2}\frac{\phi^{(k)}(2ih)}{k!}\,h^k+\frac{\phi^{(3)}(\vartheta_{+1})}{6}\,h^3,\qquad \vartheta_{+1}\in[\,2ih,(2i+1)h\,],$$

$$\phi_{2i+2}=\phi\big((2i+2)h\big)=\sum_{k=0}^{2}\frac{\phi^{(k)}(2ih)}{k!}\,(2h\,)^k+\frac{\phi^{(3)}(\vartheta_{+2})}{6}\,(2h\,)^3,\qquad \vartheta_{+2}\in[\,2ih,(2i+2)h\,],$$

$$\xi_i=2\tau\gamma^2h^{-2}\,[\,\phi_{2i-2}-2\,\phi_{2i-1}+2\,\phi_{2i+1}-\phi_{2i+2}\,]=$$
$$=\tfrac{1}{3}\,\tau\gamma^2h\,\big[\,-8\,\phi^{(3)}(\vartheta_{-2})+2\,\phi^{(3)}(\vartheta_{-1})+2\,\phi^{(3)}(\vartheta_{+1})-8\,\phi^{(3)}(\vartheta_{+2})\,\big],$$
$$|\,\xi_i\,|\leqslant\tfrac{20}{3}\,\tau\gamma^2h\,M=\tfrac{10}{3N}\,\tau\gamma^2M,\quad\text{где}\quad M\doteq\max_{[\,0,1]}\,|\,\phi^{(3)}(\cdot)\,|.$$

Таким образом, $S_n<\frac{100}{9N}\,\tau^2\gamma^4M^2\to 0$ при $N\to\infty$.

Предположим, что $\rho_0,\rho_1\in\mathrm{C}^2[\,0,2\tau]$. Легко показать, что $\xi_0^2\leqslant 4\tau^2m_0^2(h)$, $\xi_N^2\leqslant 4\tau^2m_1^2(h)$, где $m_0(h)\doteq\max\limits_{[0,2\tau]}|\,\rho_0'(\cdot)\,|+\gamma^2\max\limits_{[0,2h]}|\,\phi''(\cdot)\,|$, $m_1(h)\doteq\max\limits_{[0,2\tau]}|\,\rho_1'(\cdot)\,|+\gamma^2\max\limits_{[1-2h,1]}|\,\phi''(\cdot)\,|$, следовательно,

$$\tfrac{h}{6\tau}\,\big\langle\,[\,c\,\widetilde{A}(y)\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle<\Lambda^*\tfrac{\tau}{3N}\,\big(\,m_0^2(h)+\tfrac{25}{9N}\,\gamma^4M^2+m_1^2(h)\,\big)\to 0.$$

(Заметим, что $\omega=0$ и $\Lambda^*\to 1$, $m_0(h)\to m_0(0)$, $m_1(h)\to m_1(0)$ при $N\to\infty$.) Что касается слагаемого $\frac{h}{3\tau}\,\varkappa(\omega)$ в теореме 5, то, вычислив собственные значения матрицы (3.1), получим

$$\kappa(\omega)\,\frac{T_N(x)-1}{x\,U_n(x)}\,\big(\,\eta_0^2+\eta_1^2\,\big)\leqslant\varkappa(\omega)\leqslant\kappa(\omega)\,\frac{T_N(x)+1}{x\,U_n(x)}\,\big(\,\eta_0^2+\eta_1^2\,\big),$$

где $\kappa(\omega)\doteq\dfrac{31+30\omega^2+3\omega^4}{16\,(\,3+\omega^2)}$. Также легко проверить, что $\varkappa(\omega)<\kappa(\omega)\,\big(\,\eta_0^2+\eta_1^2\,\big)$, а минимум $\kappa(\omega)$ достигается при $\omega=0$ и равен $\frac{31}{48}$. Если $\ell_0\doteq\max\limits_{[0,2\tau]}|\,\rho_0''(\cdot)\,|$ и $\ell_1\doteq\max\limits_{[0,2\tau]}|\,\rho_1''(\cdot)\,|$, то $\eta_0^2\leqslant\tau^4\ell_0^2$ и $\eta_1^2\leqslant\tau^4\ell_1^2$, следовательно, $\frac{h}{3\tau}\,\varkappa(0)<\frac{31}{288N}\,\tau^3\big(\,\ell_0^2+\ell_1^2\,\big)\to 0$. Таким образом, если $\{\,J_N\,\}$ — это последовательность, в которой $J_N\doteq J^*(0)$ — минимальное значение функционала (0.1), вычисленное при $\omega=0$ и заданном N, то имеет место предельное соотношение $J_N\to 0$. Аналогичный предел имеет место при любом $\omega\in[-1,1]$, однако в свете предложенных оценок для спектров входящих в выражение для $J^*(\omega)$ матриц целесообразно использовать параметр $\omega=0$.

4.3. Пусть в исходной задаче $t\in[\,0,T]$, где T — произвольное значение. Пусть, далее, $\rho_0\equiv 0$ и $\rho_1\equiv 0$, тогда $\eta_0=\eta_1=0$, $\varkappa(\omega)=0$ и $J^*(\omega)=\frac{1}{6NT}\,\big\langle\,[\,c\,\widetilde{A}(y)\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle$. Решив неравенство $J^*(\omega)<\varepsilon^2$ (где $\varepsilon>0$ — заданная точность), найдем априори достаточное число N узлов сетки, заданной в области $\Pi_T\doteq[\,0,T\,]\times[\,0,1]$. Решение системы (0.3) – (0.6) обладает следующим важным свойством: сплайн, построенный по полученным значениям, обращается в ноль на границе $\xi=0$, $\xi=1$, то есть полностью совпадает с граничным условием $\rho_0\equiv 0$, $\rho_1\equiv 0$. Таким образом, в предложенном методе отпадает потребность послойных (итеративных) вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 154–171.
2. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. 3-е изд. СПб.: Лань, 2002. 736 с.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.

Поступила в редакцию 24.05.2012

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru
Родионова Надежда Витальевна, старший преподаватель, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

V. I. Rodionov, N. V. Rodionova

Exact solution of optimization task generated by simplest heat conduction equation

Keywords: interpolation, approximate spline, Chebyshev's polynomials.

Mathematical Subject Classifications: 41A15

In the previous paper of the authors the parameter family of finite-dimensional spaces of special quadratic splines of Lagrange's type has been defined. In each space, as a solution to the initial-boundary problem for the simplest heat conduction equation, we have proposed the optimal spline, which gives the smallest residual. We have obtained exact formulas for coefficients of this spline and its residual. The formula for coefficients of this spline is a linear form of initial finite differences. The formula for the residual is a positive definite quadratic form of these quantities, but because of its bulkiness it is ill-suited for analyzing of the approximation quality of the input problem at the variation with the parameters.

For the purposes of the present paper, we have obtained an alternative representation for the residual, which is the sum of two positive definite quadratic forms of the new finite differences defined on the boundary. The matrix of the first form has second order and the apparent spectrum. The elements of the second matrix of order $N+1$ are expressed in terms of Chebyshev's polynomials, the matrix is invertible and the inverse matrix has a tridiagonal form. This feature allows us to obtain, for the spectrum of the matrix, upper and lower bounds that are independent of the dimension N. Said fact allows us to make a study of the quality of approximation for different dimensions N and weights $\omega \in [-1, 1]$. It is shown that the parameter $\omega = 0$ gives the best approximation and the residual tends to zero as N increasing.

REFERENCES

1. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 154–171.
2. Fadeev D.K., Fadeeva V.N. *Vychislitel'nye metody lineinoi algebry* (Computing methods of linear algebra), St. Petersburg: Lan', 2002, 736 p.
3. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* (Classical orthogonal polynomials), Moscow: Nauka, 1976, 328 p.

Received 24.05.2012

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Dean, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru
Rodionova Nadezhda Vital'evna, Lecturer, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru