УДК 539.3

© *А. А. Юдаков*

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ КРЕЙГА–БЭМПТОНА И ИХ ПРАКТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Приводится вывод уравнений динамики упругих тел, подверженных большому движению в составе многокомпонентной механической системы и малым деформациям. При выводе используется метод конечных элементов (МКЭ) и метод Крейга–Бэмптона для редукции матриц МКЭ-модели тела. Никаких дополнительных приближений не вводится, тем самым получаются наиболее общие уравнения в рассматриваемой постановке. Проводится анализ трудностей, возникающих на практике при использовании выведенных общих уравнений движения, предлагаются пути их преодоления. Представляется вывод модифицированных уравнений с использованием приближения, более общего по сравнению с общепринятым в литературе. Приводится пример программной реализации выведенных уравнений движения упругих конструкций.

Ключевые слова: упругое тело, метод конечных элементов, модель Крейга–Бэмптона, модальная матрица, уравнения динамики, уравнения связей, многокомпонентная механическая система.

Введение

В настоящее время разработано и исследовано множество широко известных подходов к моделированию движения деформируемых конструкций. Точные методы решения данной задачи, такие как методы сопротивления материалов и строительной механики, применимы лишь к телам простой конфигурации и часто оказываются бессильными, когда требуется провести анализ сложной реальной конструкции. Среди разнообразных методов приближенного решения проблемы выделяется метод конечных элементов (МКЭ). Это простой и в то же время очень мощный метод, допускающий множество различных формулировок, ориентированных на различные области применения. Классический линейный метод конечных элементов разработан в середине прошлого столетия и на данный момент хорошо исследован и широко применяется на практике [1–3]. Он ориентирован на статические и квазидинамические задачи, в которых упругие конструкции подвержены лишь малым деформациям и не участвуют в произвольном пространственном движении. С другой стороны, формулировка МКЭ в терминах абсолютных координат [4], одна из последних разработок в области расчета динамики упругих тел, учитывает как большие упругие деформации, так и произвольное движение тела как целого. Эта формулировка наиболее полная, она охватывает весь спектр возможных задач в рассматриваемой области, однако она и очень сложна как для её исследования, так и для проведения практических расчетов. Поэтому применение данного подхода в задачах, в которых упругие тела участвуют в большом движении, но подвержены лишь малым деформациям, оказывается неоправданным с точки зрения эффективности.

А подобные задачи возникают в абсолютном большинстве реальных, практических важных примеров в таких областях, как автомобилестроение, авиация, ракетно-космическая техника, машиностроение и многих других. В задачах такого рода оказывается необходимым учитывать инерционную связь между большими перемещениями тела и упругими деформациями. Количество публикаций по данной тематике до сих пор крайне невелико [5–8]. Все подходы к решению подобных задач основаны на применении классического МКЭ на первичном этапе подготовки данных, что позволяет использовать весь накопленный теоретический и практический опыт. Кроме того, при подготовке данных оказываются доступными всевозможные методы редукции модели, применение которых ведет к колоссальному ускорению основных динамических расчетов и, как следствие, существенному сокращению всего времени моделирования. Общепризнанно, что наиболее эффективным методом редукции модели является метод Крейга–Бэмптона [9], широко известный под именем динамической редукции или метода связанных подструктур. При этом исторически [5, 6] при выводе уравнений динамики упругих тел, подверженных большому движению и малым деформациям, вводится следующее дополнительное приближение: инерция упругой конструкции сосредоточена в узлах её МКЭ-модели. Данное приближение позволяет достаточно просто вывести уравнения динамики, и сами эти уравнения оказываются несложными. Однако, как и любое приближение, оно вносит дополнительную погрешность, влияние которой на динамику полноценно исследовано не было. В частности, если для формирования матрицы масс МКЭ-модели тела была использована согласованная формулировка (в общем случае — наиболее корректная [1]), то рассматриваемое приближение может внести существенную неточность в массово-инерционные характеристики всего тела, что приведет к серьезному искажению динамического поведения тела.

В статье [7] впервые опубликованы общие уравнения движения упругих тел, основанные на использовании МКЭ и редукции модели методом Крейга–Бэмптона, свободные от каких-либо дополнительных приближений. В настоящей статье систематизируются принципы построения общих уравнений, планомерно излагается техника, использованная при выводе. Кроме того, проводится анализ проблем, возникающих на практике при использовании широко известных МКЭ-пакетов на этапе подготовки данных, а также трудностей применения выведенных общих уравнений, предлагаются возможные пути их преодоления. Представлен вывод важных модифицированных уравнений движения упругих тел, полученных с использованием приближения, более общего по сравнению с общепринятым. Впервые эти уравнения в неполном виде опубликованы в статье [8]. В настоящей статье показывается, что применение данных модифицированных уравнений на практике позволяет достаточно простым способом решить все рассматриваемые проблемы и ведет к существенному ускорению предварительных расчетов по сравнению с общим подходом. Также для демонстрации совместимости выведенных общих и модифицированных уравнений упругих тел с общепринятым подходом показано, что в предельном случае выведенные уравнения переходят в простые уравнения, полученные на основе общепринятого приближения.

§ 1. Основы вывода общих уравнений движения упругих тел

Вывод общих уравнений динамики упругих конструкций, подверженных произвольному пространственному движению и малым упругим деформациям, базируется на использовании классического метода конечных элементов и редукции модели методом Крейга–Бэмптона. Никаких дополнительных приближений не вводится, тем самым получаются уравнения движения упругих тел в составе системы, наиболее общие в рассматриваемой постановке.

Метод Крейга–Бэмптона (*связанных подструктур*) впервые опубликован в статье [9]. Это метод редуцирования системы уравнений движения деформируемого тела, получаемых на основе МКЭ, путём аппроксимации малых упругих перемещений тела набором допустимых форм. Он состоит из пяти этапов:

1) деление узлов на *интерфейсные* (узлы воздействия силовых элементов и шарниров и узлы, приближенное представление движения которых нежелательно) и *внутренние*;

2) расчет *статических форм* от единичных смещений по всем степеням свободы интерфейсных узлов;

3) расчет *собственных форм колебаний* при зажатых интерфейсных узлах;

4) построение *модальной матрицы* $\mathbf{H}_F$, *редуцированных матриц масс и жесткости*: $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{H}_F^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{H}_F$, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{H}_F^T \mathbf{C}_{FEM} \mathbf{H}_F$, где $\mathbf{M}_{FEM}$, $\mathbf{C}_{FEM}$ — полные матрицы масс и жесткости МКЭ-модели тела; при этом малые упругие перемещения тела аппроксимируются набором допустимых форм: $\mathbf{x}_n = \mathbf{H}_F \mathbf{w}$, где $\mathbf{x}_n$ — координаты всех узлов МКЭ-модели в *собственной системе координат тела*, $\mathbf{w}$ — набор модальных координат размера H, где H — полное количество используемых форм;

5) ортонормализация базиса модального пространства на основе решения $\overline{\mathbf{Y}}$ обобщенной проблемы собственных значений для редуцированных матриц: $\left(\overline{\mathbf{C}} - \lambda\overline{\mathbf{M}}\right)\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$; получение модальной матрицы $\mathbf{H}_R$, ортонормальной относительно полных матриц модели: $\mathbf{H}_R = \mathbf{H}_F\overline{\mathbf{Y}}$, тогда: $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{H}_R^T\mathbf{M}_{FEM}\mathbf{H}_R$ — единичная, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{H}_R^T\mathbf{C}_{FEM}\mathbf{H}_R$ — диагональная. При этом $\mathbf{x}_n = \mathbf{H}_R\mathbf{w}$.

Упомянутая собственная система координат тела, в которой упругие перемещения аппроксимируются набором допустимых форм, — это так называемая присоединенная система координат (ПСК) тела, одно из основополагающих понятий, на которых базируется вывод уравнений упругих тел. Это система координат, связанная с телом. Если тело не совершает упругих колебаний (условно говоря, заморожено), то всё движение тела определяется движением ПСК. Именно относительно ПСК рассматривается понятие малости упругих перемещений $\mathbf{x}_n$ в методе Крейга–Бэмптона. Для краткости базовую инерциальную систему координат будем называть СК0.

Основным результатом метода Крейга–Бэмптона является построение модальной матрицы ($\mathbf{H}_F$ или $\mathbf{H}_R$). Вообще говоря, в качестве модальной матрицы может быть выбрана любая матрица, составленная из допустимых форм тела. В предельном случае набор модальных координат может совпадать с набором реальных координат всех узлов, что соответствует нередуцированной МКЭ-модели тела. В остальных случаях количество модальных координат меньше, а чаще всего — сильно меньше, количества реальных, вследствие чего матрицы системы уравнений оказываются сравнительно небольшими. Таким образом, с одной стороны, мы получаем всю мощь классического МКЭ с возможностью достаточно подробного разбиения тела на элементы и, с другой стороны, малую размерность системы уравнений динамики упругого тела, что ведет к быстрому расчету движения тела без существенной потери точности при адекватном выборе используемых допустимых форм тела. В реальных примерах иногда мы получаем даже лучшую картину — точность моделирования деформируемых конструкций при редуцировании модели растет. В основном это объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, в модальную матрицу чаще всего не включаются высокочастотные формы колебаний, которые в реальных системах быстро гасятся внутренним демпфированием. Тем самым из рассмотрения исключаются самые жесткие формы, которые дают основную ошибку при реальных расчетах, и, кроме того, это уменьшает общую жесткость системы, что позволяет использовать больший шаг интегрирования для достижения той же точности. И, во-вторых, значительное уменьшение порядка уравнений ведет к серьезному уменьшению количества арифметических операций на одном шаге интегрирования и, как следствие, к уменьшению накапливаемой погрешности машинных расчетов.

Везде далее под модальной матрицей $\mathbf{H}$, вообще говоря, подразумевается *произвольная* матрица допустимых форм, при этом вектор модальных координат $\mathbf{w}$ выбирается таким образом, что

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{H}\mathbf{w}. \tag{1}$$

Тем самым достигается общая независимость от используемого метода редукции. В частности, это может быть матрица $\mathbf{H}_F$ или $\mathbf{H}_R$ из модели Крейга–Бэмптона. Нужно отметить, однако, что для обеспечения корректности дальнейших выкладок линейная зависимость между допустимыми и твердотельными формами тела должна быть исключена каким-либо способом. Этого можно достичь, если, например, при ортонормализации модального подпространства в методе Крейга–Бэмптона не включать формы колебаний с нулевой частотой в модальную матрицу $\mathbf{H}_R$.

Уравнения динамики упругих тел выводятся из уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{s}, \tag{2}$$

где T — кинетическая энергия, U — потенциальная, $\mathbf{q}$ — вектор обобщенных координат тела, $\mathbf{s}$ — вектор обобщенных сил. В качестве $\mathbf{q}$ выберем совокупность двух векторов: шестимерного вектора $(\mathbf{r}, \varphi)$, характеризующего положение ПСК относительно СК0, и вектора модальных координат $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{r}, \varphi, \mathbf{w}).$$

Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... обозначим через $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots)$ их объединение в общий вектор. Для удобства записи формул и их анализа примем в качестве $\mathbf{r}$ и φ такие вектора, что

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\varphi} = \omega,$$

где $\mathbf{v}$, ω — линейная и угловая скорости ПСК относительно СК0. Пусть $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, $\varepsilon = \dot{\omega}$ — линейное и угловое ускорения ПСК относительно СК0, $\xi = \dot{\mathbf{w}}$, $\zeta = \ddot{\mathbf{w}}$.

Пусть N — число всех узлов МКЭ-модели тела, тогда число степеней свободы модели равно $6N$, размер модальной матрицы $\mathbf{H}$ равен $6N \times H$, где H — количество используемых форм. Индекс r соответствует поступательным перемещениям, φ — вращательным, w — упругим; индексы k и l — индексы узлов, $k, l = \overline{1, N}$, i и j — индексы форм, $i, j = \overline{1, H}$. Обозначим через $\mathbf{x}_{n,k}$ шестимерный вектор положения k-го узла в ПСК, $\mathbf{H}_k$ — часть модальной матрицы, относящуюся к этому узлу:

$$\mathbf{x}_{n,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \mathbf{H}_k \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^r \\ \mathbf{H}_k^\varphi \end{bmatrix} \mathbf{w}.$$

Пусть $\mathbf{h}_{k,i}$ — i-й столбец матрицы $\mathbf{H}_k$: $\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{k,1} & \cdots & \mathbf{h}_{k,H} \end{bmatrix}$; $\mathbf{h}_{k,i} = \left(\mathbf{h}_{k,i}^r, \mathbf{h}_{k,i}^\varphi\right)$. Обозначим через ρ_k вектор начального положения центра k-го узла относительно ПСК. Тогда с учетом (1) положение центра k-го узла относительно СК0 в любой момент времени можно записать в виде:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r} + \rho_k + \mathbf{H}_k^r \mathbf{w}. \tag{3}$$

§ 2. Общие уравнения движения упругих тел

Суть вывода уравнений упругих конструкций заключается в записи формул для расчета всех членов уравнения Лагранжа (2). Из теории классического метода конечных элементов известно уравнение для расчета кинетической энергии МКЭ-модели тела:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v}_n^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{v}_n, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}_n$ — скорости всех узлов МКЭ-модели тела, $\mathbf{M}_{FEM}$ — полная матрица масс. В классическом МКЭ предполагается, что тело не подвержено большому движению как целое, поэтому и скорости, и матрица масс записываются относительно базовой инерциальной СК. Основная идея применения этой формулы в рассматриваемой в настоящей статье постановке заключается в следующем: полная матрица масс постоянна в собственной СК тела, то есть в ПСК. Это утверждение очевидно из определения присоединенной системы координат, поскольку движение ПСК определяет движение тела как целого, и относительно ПСК рассматриваются все упругие перемещения точек тела.

Все физические величины в рамках одной формулы, естественно, должны выражаться в одной системе координат. В формуле (4) вектор скоростей $\mathbf{v}_n$ удобно выразить в ПСК, поскольку матрица масс постоянна в ПСК. При этом, конечно же, скорости записываются относительно базовой СК0. Вектор $\mathbf{v}_n$ равен: $\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \omega_1, \ldots, \mathbf{v}_N, \omega_N)$, где $\mathbf{v}_k$, ω_k — линейная и угловая скорости k-го узла относительно СК0. С учетом формулы (3) можно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\widetilde{(\rho_k + \mathbf{H}_k^r \mathbf{w})} & \mathbf{H}_k^r \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \\ \omega_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H}_k^\varphi \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Знак «$\sim$» над трехмерным вектором обозначает операцию взятия кососимметрической матрицы для этого вектора; знак «$\sim$» над открывающей скобкой применяется к результату выражения в скобках.

Если ввести матрицы $\mathbf{I}_k^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathrm{P}_k = \begin{bmatrix} -\widetilde{(}\rho_k + \mathbf{H}_k^r \mathbf{w}) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^0 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N^0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{P}_N \end{bmatrix}$, то вектор скоростей можно выразить в виде:

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^0 & \mathrm{P} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \tag{5}$$

Пусть полная матрица масс имеет произвольный вид:

$$\mathbf{M}_{FEM} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FEM,11} & \cdots & \mathbf{M}_{FEM,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{FEM,N1} & \cdots & \mathbf{M}_{FEM,NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{FEM,kl} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr,kl} & \mathbf{m}_{r\varphi,kl} \\ \mathbf{m}_{\varphi r,kl} & \mathbf{m}_{\varphi\varphi,kl} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{m}_{rr,kl}$, $\mathbf{m}_{r\varphi,kl}$, $\mathbf{m}_{\varphi r,kl}$, $\mathbf{m}_{\varphi\varphi,kl}$ — блоки размера 3×3, $k, l = \overline{1, N}$. Подставив формулы (5) и (6) в формулу (4), выражение для расчета кинетической энергии можно записать в виде:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — обобщенная матрица масс. Чтобы выписать формулы для расчета ее блоков, нужно ввести 18 матриц, представленных в таблице 1. Каждая сумма здесь — это сумма по индексам k, l от 1 до N, то есть двойная сумма по всем узлам тела. Все эти матрицы постоянны в ПСК. Формулы для расчета блоков матрицы масс можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{rr} &= \mathbf{I}_{rr}, \\
\mathbf{J}_{r\varphi} &= \mathbf{I}_{r\varphi} - \left(\mathbf{I}_{rr,\,\rho} + \sum_{i=1}^{H} \mathbf{I}_{rr,\,h_i} w_i \right), \\
\mathbf{J}_{rw} &= \mathbf{I}_{rr,\,H} + \mathbf{I}_{r\varphi,\,H}, \\
\mathbf{J}_{\varphi\varphi} &= \mathbf{I}_{\varphi\varphi} - \left\{ \mathbf{I}_{rr,\,\rho\rho} + \mathbf{I}_{\varphi r,\,\rho} + \mathbf{I}_{\varphi r,\,\rho}^T + \sum_{i=1}^{H} \left(\mathbf{I}_{rr,\,\rho h_i} + \mathbf{I}_{rr,\,\rho h_i}^T + \mathbf{I}_{\varphi r,\,h_i} + \mathbf{I}_{\varphi r,\,h_i}^T \right) w_i + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,\,j=1}^{H} \mathbf{I}_{rr,\,h_i h_j} w_i w_j \right\}, \\
\mathbf{J}_{\varphi w} &= \mathbf{I}_{rr,\,\rho H} + \mathbf{I}_{r\varphi,\,\rho H} + \mathbf{I}_{\varphi r,\,H} + \mathbf{I}_{\varphi\varphi,\,H} + \sum_{i=1}^{H} \left(\mathbf{I}_{rr,\,h_i H} + \mathbf{I}_{r\varphi,\,h_i H} \right) w_i, \\
\mathbf{J}_{ww} &= \mathbf{H}^T \mathbf{M}_{FEM} \mathbf{H} = \overline{\mathbf{M}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Таблица 1. Компоненты обобщенной матрицы масс

$\mathbf{I}_{rr} = \sum \mathbf{m}_{rr,kl}$	$\mathbf{I}_{\varphi r,\,h_i} = \sum \mathbf{m}_{\varphi r,kl} \widetilde{\mathbf{h}}_{l,\,i}^r$	$\mathbf{I}_{rr,\,\rho h_i} = \sum \widetilde{\rho}_k \mathbf{m}_{rr,kl} \widetilde{\mathbf{h}}_{l,\,i}^r$
$\mathbf{I}_{r\varphi} = \sum \mathbf{m}_{r\varphi,kl}$	$\mathbf{I}_{rr,\,H} = \sum \mathbf{m}_{rr,kl} \mathbf{H}_l^r$	$\mathbf{I}_{rr,\,\rho H} = \sum \widetilde{\rho}_k \mathbf{m}_{rr,kl} \mathbf{H}_l^r$
$\mathbf{I}_{\varphi\varphi} = \sum \mathbf{m}_{\varphi\varphi,kl}$	$\mathbf{I}_{r\varphi,\,H} = \sum \mathbf{m}_{r\varphi,kl} \mathbf{H}_l^\varphi$	$\mathbf{I}_{r\varphi,\,\rho H} = \sum \widetilde{\rho}_k \mathbf{m}_{r\varphi,kl} \mathbf{H}_l^\varphi$
$\mathbf{I}_{rr,\,\rho} = \sum \mathbf{m}_{rr,kl} \widetilde{\rho}_l$	$\mathbf{I}_{\varphi r,\,H} = \sum \mathbf{m}_{\varphi r,kl} \mathbf{H}_l^r$	$\mathbf{I}_{rr,\,h_i h_j} = \sum \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,i}^r \mathbf{m}_{rr,kl} \widetilde{\mathbf{h}}_{l,\,j}^r$
$\mathbf{I}_{\varphi r,\,\rho} = \sum \mathbf{m}_{\varphi r,kl} \widetilde{\rho}_l$	$\mathbf{I}_{\varphi\varphi,\,H} = \sum \mathbf{m}_{\varphi\varphi,kl} \mathbf{H}_l^\varphi$	$\mathbf{I}_{rr,\,h_i H} = \sum \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,i}^r \mathbf{m}_{rr,kl} \mathbf{H}_l^r$
$\mathbf{I}_{rr,\,h_i} = \sum \mathbf{m}_{rr,kl} \widetilde{\mathbf{h}}_{l,\,i}^r$	$\mathbf{I}_{rr,\,\rho\rho} = \sum \widetilde{\rho}_k \mathbf{m}_{rr,kl} \widetilde{\rho}_l$	$\mathbf{I}_{r\varphi,\,h_i H} = \sum \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,i}^r \mathbf{m}_{r\varphi,kl} \mathbf{H}_l^\varphi$

Видно, что $\mathbf{J}_{rr}$, $\mathbf{J}_{rw}$, $\mathbf{J}_{ww}$ — постоянны в ПСК, $\mathbf{J}_{r\varphi}$, $\mathbf{J}_{\varphi w}$ — линейно зависят от $\mathbf{w}$, а $\mathbf{J}_{\varphi\varphi}$ — квадратично. Матрица масс $\mathbf{M}$ в ПСК имеет простой вид:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{rr} & \mathbf{J}_{r\varphi} & \mathbf{J}_{rw} \\ \mathbf{J}_{r\varphi}^T & \mathbf{J}_{\varphi\varphi} & \mathbf{J}_{\varphi w} \\ \mathbf{J}_{rw}^T & \mathbf{J}_{\varphi w}^T & \mathbf{J}_{ww} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, что $\mathbf{M}$ симметрична. Из сопоставления формул (4) и (7) для расчета кинетической энергии легко получить, что если $\mathbf{M}_{FEM}$ положительно определена, то и $\mathbf{M}$ также положительно определена.

Итак, получены окончательные формулы для расчета обобщенной матрицы масс. Подставив формулы (7) и (9) в уравнение Лагранжа (2), можно показать, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{k},$$

где $\mathbf{k}$ — вектор обобщенных сил инерции, который в ПСК можно записать в виде:

$$\mathbf{k} = -\left(\overline{\mathbf{k}}_{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{k}}_{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}}\right). \tag{10}$$

Если ввести вектора $\mathbf{k}_{w,r\varphi}, \mathbf{k}_{w,\varphi\varphi}, \mathbf{k}_{w,\varphi w}$, компоненты которых равны:

$$\begin{aligned} k_{w,r\varphi,i} &= -\omega^T \left(\partial \mathbf{J}_{r\varphi}^T / \partial w_i\right) \mathbf{v}, \\ k_{w,\varphi\varphi,i} &= -\frac{1}{2}\omega^T \left(\partial \mathbf{J}_{\varphi\varphi} / \partial w_i\right) \omega, \\ k_{w,\varphi w,i} &= -\omega^T \left(\partial \mathbf{J}_{\varphi w} / \partial w_i\right) \xi, \end{aligned}$$

то формулы для расчета компонент вектора обобщенных сил инерции запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{k}}_r &= (\widetilde{\omega}\mathbf{J}_{rr} - \mathbf{J}_{rr}\widetilde{\omega})\,\mathbf{v} + \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{r\varphi}\omega + \dot{\mathbf{J}}_{r\varphi}\omega + \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{rw}\xi, \\ \overline{\mathbf{k}}_\varphi &= \widetilde{\mathbf{v}}\mathbf{J}_{rr}\mathbf{v} + \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{\varphi\varphi}\omega + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi}\omega + \left(\dot{\mathbf{J}}_{r\varphi}^T + \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{r\varphi}^T - \mathbf{J}_{r\varphi}^T\widetilde{\omega} - \widetilde{(\mathbf{J}_{r\varphi}\omega)}\right)\mathbf{v} + \\ &\quad + \left(\widetilde{\mathbf{v}}\mathbf{J}_{rw} + \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{\varphi w} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}\right)\xi, \\ \overline{\mathbf{k}}_w &= \mathbf{k}_{w,r\varphi} + \mathbf{k}_{w,\varphi\varphi} + \mathbf{k}_{w,\varphi w} - \mathbf{J}_{rw}^T\widetilde{\omega}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее остальные члены уравнения Лагранжа (2). Полная потенциальная энергия тела равна: $U = U_C + U_g$, где U_C — потенциальная энергия упругих деформаций, U_g — потенциальная энергия гравитации. Используя формулу для расчета энергии упругих деформаций МКЭ-модели тела

$$U_C = \frac{1}{2}\mathbf{x}_n^T \mathbf{C}_{FEM} \mathbf{x}_n$$

и учитывая, что полная матрица жесткости постоянна в ПСК (по аналогии с матрицей масс), можно показать, что $\partial U_C / \partial \mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{q}$, где $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{C}} \end{bmatrix}$ — обобщенная матрица жесткости, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{H}^T \mathbf{C}_{FEM} \mathbf{H}$ — редуцированная матрица жесткости. Значит, обобщенная сила упругости равна

$$\mathbf{s}_C = -\mathbf{C}\mathbf{q}.$$

Если обозначить через $\mathbf{g}_r$ — вектор ускорения свободного падения, можно показать, что $\partial U_g / \partial \mathbf{q} = -\mathbf{M}\mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_r; \mathbf{0}; \mathbf{0})$. Поэтому обобщенная сила гравитации равна

$$\mathbf{s}_g = \mathbf{M}\mathbf{g}.$$

Математическая модель демпфирования строится известными методами на основе диссипативной функции Рэлея: $R = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$, где $\mathbf{D}$ — обобщенная матрица демпфирования:

$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{D}}\end{bmatrix}$. Редуцированная матрица демпфирования $\overline{\mathbf{D}}$ получается либо методом Рэлея $\overline{\mathbf{D}}=\alpha\overline{\mathbf{C}}+\beta\overline{\mathbf{M}}$, где α и β — некоторые константы, либо на основе представления свободных колебаний тела набором независимых уравнений движения с одной степенью свободы, тогда $\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{diag}\,(d_1;\ldots;d_H)$, где $d_k=2\gamma_k\omega_k$, γ_k — критический коэффициент затухания соответствующей формы, ω_k — ее собственная частота колебаний. Обобщенная сила демпфирования при этом равна

$$\mathbf{s}_D=-\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}.$$

Пусть к k-му интерфейсному узлу приложены сила $\mathbf{f}_k$ и момент $\mathbf{m}_k$ в точке, отстоящей от этого узла на вектор $\rho_{f,k}$, тогда $\mathbf{s}_{n,\,k}=\left(\mathbf{s}^r_{n,\,k},\mathbf{s}^\varphi_{n,\,k}\right)=(\mathbf{f}_k,\mathbf{m}_k+\widetilde{\rho}_{f,k}\mathbf{f}_k)$ — приложенная сила, приведенная к центру узла. Из условия равенства виртуальных работ на возможных перемещениях по обобщенным координатам получим (суммирование ведется по всем узлам тела, к которым приложены силы):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s}_a=\sum_k(\mathbf{s}_{r,\,k},\mathbf{s}_{\varphi,\,k},\mathbf{s}_{w,\,k}),\\
&\mathbf{s}_{r,\,k}=\mathbf{s}^r_{n,\,k},\\
&\mathbf{s}_{\varphi,\,k}=\mathbf{s}^\varphi_{n,\,k}+\widetilde{(\rho_k+\mathbf{H}^r_k\mathbf{w})}\cdot\mathbf{s}^r_{n,\,k},\\
&\mathbf{s}_{w,\,k}=\mathbf{H}^T_k\cdot\mathbf{s}_{n,\,k}.
\end{aligned}$$

Двусторонние связи, накладываемые на упругое тело, моделируются аналогично связям на твердые тела. Подробно принципы построения уравнений связи рассмотрены в статье [8]; здесь приведем их коротко. Общий вид уравнения связи:

$$g(\mathbf{a}\varepsilon_c,\mathbf{v}\omega_c,\mathbf{r}\varphi_c,t)=0,$$

где $\mathbf{a}\varepsilon_c$, $\mathbf{v}\omega_c$, $\mathbf{r}\varphi_c$ — ускорения, скорости и положения i-й локальной системы координат (ЛСК) связи относительно СК0. Продифференцировав, можно получить уравнение для расчета ускорений в связи (суммирование ведется по всем ЛСК данной связи):

$$\sum_i\mathbf{Gc}_i\cdot\mathbf{a}\varepsilon_{c,i}=\mathbf{h}_c,$$

где $\mathbf{Gc}_i=(\mathbf{Gc}_{r,i},\mathbf{Gc}_{\varphi,i})$ — матрица производных невязок связи по движениям i-й ЛСК связи, $\mathbf{h}_c$ — вектор невязки ускорения связи, определяемый в зависимости от типа связи. Выразив параметры ЛСК, которая связана с твердым или упругим телом, через параметры этого тела, получаем

$$\sum_i\mathbf{G}_i\ddot{\mathbf{q}}_i=\mathbf{h}_c+\mathbf{h}_a,$$

где $\mathbf{h}_a=\sum\limits_i\mathbf{h}_{a,i}$, $\mathbf{G}_i$ — матрица производных невязок i-й ЛСК связи по обобщенным координатам соответствующего тела (обобщенный якобиан связи). Если i-я ЛСК связи относится к k-му интерфейсному узлу тела и отстоит от него на вектор ρ_c, то опуская индекс i, можно записать:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G}=(\mathbf{G}_r,\mathbf{G}_\varphi,\mathbf{G}_w)\,,\\
&\mathbf{G}_r=\mathbf{Gc}_r,\\
&\mathbf{G}_\varphi=\mathbf{Gc}_\varphi-\mathbf{Gc}_r\cdot\widetilde{(\rho_k+\mathbf{H}^r_k\mathbf{w}+\rho_c)},\\
&\mathbf{G}_w=\mathbf{Gc}_r\cdot\mathbf{H}^r_k+(-\mathbf{Gc}_r\cdot\widetilde{\rho}_c+\mathbf{Gc}_\varphi)\cdot\mathbf{H}^\varphi_k,\\
&\mathbf{h}_a=-\mathbf{Gc}_r\cdot\left[\widetilde{\omega}\cdot\widetilde{\omega}\cdot(\rho_k+\mathbf{H}^r_k\mathbf{w}+\rho_c)+2\widetilde{\omega}\cdot\mathbf{H}^r_k\xi+\widetilde{(2\omega+\mathbf{H}^\varphi_k\xi)}\cdot\widetilde{(\mathbf{H}^\varphi_k\xi)}\cdot\rho_c\right].
\end{aligned}$$

Обобщенные силы реакции связей можно выразить формулой (смотрите [8]):

$$\mathbf{R}=\mathbf{G}^T\lambda,$$

где λ — силовые факторы в связях.

Таким образом, рассмотрены все члены уравнения Лагранжа (2). Сводя их воедино, получаем уравнение для расчета движения деформируемого тела в общей постановке:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{s}_g + \mathbf{s}_a - \mathbf{C}\mathbf{q} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} + \mathbf{R}, \tag{11}$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ — обобщенные матрицы масс, жесткости и демпфирования, $\mathbf{k}$ — вектор сил инерции, $\mathbf{s}_g$ — обобщенная сила гравитации, $\mathbf{s}_a$ — обобщенные активные силы, $\mathbf{R}$ — силы реакций связей. Уравнение (11) можно записать в виде:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{s} + \mathbf{k} + \mathbf{R},$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{s}_g + \mathbf{s}_a - \mathbf{C}\mathbf{q} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$ — сумма обобщенных сил упругости, демпфирования, гравитации и активных сосредоточенных сил. Оно имеет вид такой же, как и обобщенное уравнение движения твердого тела. Тем самым оказывается возможным моделировать динамику упругой конструкции в составе многокомпонентной механической системы.

Итак, получено уравнение движения деформируемого тела, которое подвержено большому движению в составе системы и малым упругим деформациям. Это уравнение максимально общее в рамках использования метода конечных элементов и произвольного метода редукции, свободное от каких-либо допущений или приближений. Но кроме важного теоретического значения данные результаты имеют и существенную практическую пользу. В отличие от уравнений движения упругих тел, встречающихся в литературе, которые выводятся в приближении, что инерция тела сосредоточена в узлах МКЭ-модели тела, данные общие уравнения позволяют работать не только с диагональной формулировкой матрицы масс тела, получаемой из МКЭ-пакета, но и с согласованной ее формой, которая имеет известные преимущества [1]. В частности, известно, что любая новая модель упругого тела сложной структуры, примерное поведение которой под нагрузками неизвестно, должна быть сначала просчитана с согласованной матрицей масс. На первичном этапе исследования модели это позволяет выявить простейшие ее недостатки. Тем самым при применении полученных в данной статье результатов появляется новый важный инструмент проверки и тестирования модели.

§ 3. Уравнения движения упругих тел, полученные методом «смещенных твердых тел»

К сожалению, на практике при использовании для получения матриц масс и жесткости упругих тел широко-распространенных МКЭ-пакетов (например, ПК MSC.NASTRAN) периодически возникают хорошо известные проблемы. Самыми значимыми из них оказываются следующие две: наличие нулевых массово-инерционных характеристик по некоторым степеням свободы и неадекватное описание поведения всего тела как твердого. Первая проблема проявляется, например, при моделировании трехмерных тел, поскольку почти все трехмерные элементы не имеют масс по вращательным степеням свободы. Матрица масс, получаемая из МКЭ-программы (смотрите формулу (6)), в этом случае состоит из блоков размера 6×6 следующего общего вида: $\mathbf{M}_{FEM,kl} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr,kl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, что делает невозможным прямое использование предложенных выше общих уравнений движения, поскольку обобщенная матрица масс не является положительно определенной. Традиционно эту проблему решают следующим способом: каждый момент, который прилагается к точкам тела, разбивается на некоторую совокупность сил, прилагаемых к соседним точкам. При этом для адекватного поведения конструкции необходимо очень подробное разбиение тела на элементы, что зачастую является неоправданным. Это одна из причин, из-за которой трехмерные элементы очень редко используются на практике. Проблема неадекватного описания поведения всего тела как твердого проявляется куда как более часто, но проиллюстрировать ее можно на том же примере, так как тензор инерции всего тела в данном случае рассчитывается лишь по распределению поступательных масс без учета локальных вращательных, что дает тем большую ошибку, чем менее подробно тело разбито на элементы.

С другой стороны, в некоторых практических случаях использование предложенного общего метода расчета оказывается просто неэффективным, поскольку требует большого количества арифметических операций для предварительных расчетов. Так, обобщенная матрица масс выражается через 18 компонентов, каждый из которых представляет собой двойную сумму по всем узлам модели произведений некоторых матриц размера 3×3. А поскольку число узлов тела может достигать значений 10^5–10^6, то, очевидно, что число операций крайне велико. После того, как проведена первичная проверка новой модели общим методом с согласованной формулировкой матрицы масс, часто оказывается целесообразным работать с блочно-диагональной формой этой матрицы. При этом можно получить значительно более простые формулы для расчета обобщенных матриц и обобщенных сил инерции. Однако необходимо отметить, что данное ускорение достигается только на этапе подготовки данных, поскольку позволяет при доводке модели быстро переходить от этапа моделирования к этапу тестирования. Когда же модель готова, это ускорение оказывается практически несущественным, поскольку обобщенные матрицы, в любом случае, получаются одинакового размера и структуры.

Ранее упоминалось приближение, которое исторически принимается в литературе при выводе уравнений движения упругих тел и состоит в том, что инерция упругой конструкции сосредоточена в узлах её МКЭ-модели. В общем случае, при котором возможно применение данного допущения, матрица масс должна иметь блочно-диагональный вид, а каждый диагональный блок должен быть равен

$$\mathbf{M}_{FEM,kk} = \begin{bmatrix} m_k\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_k \end{bmatrix},$$

где m_k и $\mathbf{J}_k$ — масса и тензор инерции, сосредоточенные в k-м узле. Но существуют важные с практической точки зрения случаи, когда данный подход неприменим даже при диагональной формулировке матрицы масс. Самым важным из них является жесткое скрепление нескольких узлов тела на этапе разработки модели тела в МКЭ-пакете. Часто при реальных расчетах оказывается необходимым жестко скрепить множество узлов тела в некоторой его области. Поскольку количество скрепляемых узлов бывает велико, оказывается крайне эффективным произвести это скрепление на самом первом этапе, еще до расчета матриц модели. Это серьезно сокращает как дальнейшие расчеты, так и объемы информации, которыми обмениваются МКЭ-пакеты и программные комплексы моделирования движения многокомпонентных систем. Но при этом уменьшенная матрица масс тела получаемая из МКЭ-пакета, оказывается блочно-диагональной, где каждый диагональный блок имеет, вообще говоря, следующий вид, совпадающий с обобщенной матрицей масс твердого тела:

$$\mathbf{M}_{FEM,kk} = \begin{bmatrix} m_k\mathbf{I} & -m_k\widetilde{\rho}_{mc,k} \\ m_k\widetilde{\rho}_{mc,k} & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

Поэтому были разработаны уравнения движения упругих тел при следующем приближении: инерция упругой конструкции сосредоточена в точках, отстоящих от узлов её модели на некоторые известные вектора $\rho_{mc,k}$. То есть *в массово-инерционном смысле* упругое тело заменяется набором твердых тел с центрами масс в точках, смещенных относительно соответствующих узлов тела на некоторые известные вектора. Очевидно, этот подход включает как частный и общепринятый в литературе метод. Далее будем называть его методом «смещенных твердых тел», в отличие от общепринятого, который назовем методом «несмещенных твердых тел».

Стоит особо подчеркнуть, что при этом новом приближенном подходе также становится возможным достаточно простое решение описанных ранее серьезных проблем: нулевые массы по некоторым степеням свободы и неправильное моделирование всего тела как твердого. Причем для обеих проблем предлагается одно решение, которое состоит в следующем. Допустим, из МКЭ-пакета получена блочно-диагональная матрица масс с блоками произвольного вида, в том числе и нулевыми. Нужно модифицировать эти блоки так, чтобы они приняли рассматриваемый вид (12), но при этом суммарная невязка модифицированной матрицы относительно начальной была минимизирована. Кроме того, нужно удовлетворить базовые соотношения для каждого тензора инерции $\mathbf{J}_k$, известные из классической механики твердого тела, и заданным интегральным массово-инерционным характеристикам всего тела. Это простая задача минимизации при условии удовлетворения системы уравнений, которая может решаться последовательно. Сначала ищутся все массы m_k так, чтобы в сумме они давали общую массу тела M, но относительное распределение масс не изменилось. Потом подбираются все $\rho_{mc,k}$ так, чтобы центр масс всего тела совпал с заданным, и после этого ищутся все $\mathbf{J}_k$. При этом, если отсутствуют все вращательные массы (как в ранее приведенном случае трехмерных элементов), оказывается необходимым каким-то образом смоделировать их. Простейшее решение — поместить в точку, определяемую вектором $\rho_{mc,k}$, некоторое тело простой конфигурации с массой m_k, размеры которого зависят от характерного расстояния от текущего узла до соседних, и рассчитать соответствующий тензор инерции $\mathbf{J}_k$. Как показала практика, данное решение является крайне эффективным, несмотря на свою простоту.

Итак, после обоснования ввода приближения в модель деформируемого тела приведем формулы расчета по методу «смещенных твердых тел». При этом, очевидно, общий вид уравнения динамики, обобщенные матрицы жесткости и демпфирования, обобщенные силы гравитации, активные силы, а также обобщенный якобиан связи не изменятся по сравнению с приведенным ранее общим подходом. Блоки обобщенной матрицы масс $\mathbf{M}$ из формулы (9) будут иметь тот же вид (8), однако формулы для расчета 18 вспомогательных матриц, через которые они выражаются, значительно упростятся. Эти формулы сведены в таблицу 2; каждое суммирование здесь ведется по k от 1 до N. Следует особо отметить, что суммирование, в отличие от общего метода, не двойное, а одинарное, и, кроме того, многие перемножаемые матрицы имеют кососимметрический вид, что, естественно, ведет к значительному уменьшению числа арифметических действий при расчете компонент матрицы.

Формула для расчета обобщенных сил инерции будет иметь вид (10), однако компоненты вектора будут рассчитываться по гораздо более простым формулам:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{k}}_r &= \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{r\varphi}\omega + \widetilde{\omega}\left(2\mathbf{J}_{rw} - \mathbf{I}_{r\varphi,\,H}\right)\xi,\\
\overline{\mathbf{k}}_\varphi &= \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{\varphi\varphi}\omega + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\varphi}\omega + \left(\widetilde{\mathbf{v}}\mathbf{I}_{r\varphi,\,H} + \widetilde{\omega}\mathbf{J}_{\varphi w} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}\right)\xi,\\
\overline{\mathbf{k}}_w &= \mathbf{k}_{w,\varphi\varphi} + \mathbf{k}_{w,\varphi w} - \mathbf{I}^T_{r\varphi,\,H}\widetilde{\omega}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{J}}^T_{\varphi w}\omega.
\end{aligned}$$

§ 4. Уравнения движения упругих тел, полученные методом «несмещенных твердых тел»

Для контроля корректности выведенных уравнений динамики деформируемых конструкций в общей постановке и методом «смещенных твердых тел» был рассмотрен предельный случай, эквивалентный общепринятому в литературе подходу, который условно называется методом «несмещенных твердых тел». Для этого в формулах расчета по методу «смещенных

Таблица 2. Компоненты матрицы масс. Метод «смещенных твердых тел»

$\mathbf{I}_{rr} = \left(\sum m_k\right)\cdot\mathbf{I} = M\cdot\mathbf{I}$	$\mathbf{I}_{\varphi r,\,h_i} = \sum m_k\widetilde{\rho}_{mc,k}\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,i}$	$\mathbf{I}_{rr,\,\rho h_i} = \sum m_k\widetilde{\rho}_k\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,i}$
$\mathbf{I}_{r\varphi} = -\sum m_k\widetilde{\rho}_{mc,k}$	$\mathbf{I}_{rr,\,H} = \sum m_k\mathbf{H}^r_k$	$\mathbf{I}_{rr,\,\rho H} = \sum m_k\widetilde{\rho}_k\mathbf{H}^r_k$
$\mathbf{I}_{\varphi\varphi} = \sum\mathbf{J}_k$	$\mathbf{I}_{r\varphi,\,H} = -\sum m_k\widetilde{\rho}_{mc,k}\mathbf{H}^\varphi_k$	$\mathbf{I}_{r\varphi,\,\rho H} = -\sum m_k\widetilde{\rho}_k\widetilde{\rho}_{mc,k}\mathbf{H}^\varphi_k$
$\mathbf{I}_{rr,\,\rho} = \sum m_k\widetilde{\rho}_k$	$\mathbf{I}_{\varphi r,\,H} = \sum m_k\widetilde{\rho}_{mc,k}\mathbf{H}^r_k$	$\mathbf{I}_{rr,\,h_ih_j} = \sum m_k\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,i}\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,j}$
$\mathbf{I}_{\varphi r,\,\rho} = \sum m_k\widetilde{\rho}_{mc,k}\widetilde{\rho}_k$	$\mathbf{I}_{\varphi\varphi,\,H} = \sum\mathbf{J}_k\mathbf{H}^\varphi_k$	$\mathbf{I}_{rr,\,h_iH} = \sum m_k\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,i}\mathbf{H}^r_k$
$\mathbf{I}_{rr,\,h_i} = \sum m_k\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,i}$	$\mathbf{I}_{rr,\,\rho\rho} = \sum m_k\widetilde{\rho}_k\widetilde{\rho}_k$	$\mathbf{I}_{r\varphi,\,h_iH} = -\sum m_k\widetilde{\mathbf{h}}^r_{k,\,i}\widetilde{\rho}_{mc,k}\mathbf{H}^\varphi_k$

Таблица 3. Компоненты матрицы масс. Метод «несмещенных твердых тел»

$\mathbf{I}_m = M \cdot \mathbf{I}$	$\mathbf{I}_{\rho\rho} = \sum m_k \widetilde{\rho}_k \widetilde{\rho}_k$	$\mathbf{I}_{\rho H} = \sum m_k \widetilde{\rho}_k \mathbf{H}_k^r$
$\mathbf{I}_\rho = \sum m_k \rho_k$	$\mathbf{I}_J = \sum \mathbf{J}_k$	$\mathbf{I}_{h_i H} = \sum m_k \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,i}^r \mathbf{H}_k^r$
$\mathbf{I}_H = \sum m_k \mathbf{H}_k^r$	$\mathbf{I}_{\rho h_i} = \sum m_k \widetilde{\rho}_k \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,i}^r$	$\mathbf{I}_{HH} = \overline{\mathbf{M}} = \sum \Big(m_k \mathbf{H}_k^{rT} \mathbf{H}_k^r + \mathbf{H}_k^{\varphi T} \mathbf{J}_k \mathbf{H}_k^\varphi \Big)$
$\mathbf{I}_{JH} = \sum \mathbf{J}_k \mathbf{H}_k^\varphi$	$\mathbf{I}_{h_i h_j} = \sum m_k \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,i}^r \widetilde{\mathbf{h}}_{k,\,j}^r$	

твердых тел» (которые в свою очередь получены из общих формул) все вектора $\rho_{mc,k}$ были тождественно приравнены нулю. При этом, естественно, общий вид уравнения динамики, обобщенные матрицы жесткости и демпфирования, силы гравитации, активные силы, якобиан связи не изменяются. Матрица масс $\mathbf{M}$ будет иметь вид (9), но формулы для расчета её блоков сильно упростятся. Они будут выражены через 11 вспомогательных матриц, представленных в таблице 3. Эти матрицы постоянны в ПСК. Формулы для расчета самих блоков матрицы масс запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}_{rr} = \mathbf{I}_m,\\
&\mathbf{J}_{r\varphi} = -\widetilde{(\mathbf{I}_\rho + \mathbf{I}_H \mathbf{w})},\\
&\mathbf{J}_{rw} = \mathbf{I}_H,\\
&\mathbf{J}_{\varphi\varphi} = \mathbf{I}_J - \Big(\mathbf{I}_{\rho\rho} + \sum_i \left(\mathbf{I}_{\rho h_i} + \mathbf{I}_{\rho h_i}^T \right) w_i + \sum_{i,\,j} \mathbf{I}_{h_i h_j} w_i w_j \Big),\\
&\mathbf{J}_{\varphi w} = \mathbf{I}_{\rho H} + \mathbf{I}_{JH} + \sum_i \mathbf{I}_{h_i H} w_i,\\
&\mathbf{J}_{ww} = \mathbf{I}_{HH}.
\end{aligned}$$

Видно, что зависимость этих компонент от вектора $\mathbf{w}$ не претерпела изменений.

Компоненты вектора обобщенных сил инерции можно записать в удобном для анализа виде, если ввести дополнительную матрицу:

$$\mathbf{J}_{w,\varphi\varphi,\,i} = -\Big(\mathbf{I}_{\rho h_i} + \sum_j \mathbf{I}_{h_i h_j} w_j \Big),$$

при этом можно показать, что $\partial \mathbf{J}_{\varphi\varphi} / \partial w_i = \mathbf{J}_{w,\varphi\varphi,\,i} + \mathbf{J}_{w,\varphi\varphi,\,i}^T$. Вектор $\mathbf{k}_{w,\varphi\varphi}$ упростится:

$$k_{w,\varphi\varphi,\,i} = -\omega^T \mathbf{J}_{w,\varphi\varphi,\,i} \omega,$$

и компоненты вектора сил инерции (10) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{k}}_r = \widetilde{\omega} \mathbf{J}_{r\varphi} \omega + 2 \widetilde{\omega} \mathbf{J}_{rw} \xi,\\
&\overline{\mathbf{k}}_\varphi = \widetilde{\omega} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} \omega + 2 \cdot \left(\sum_i \mathbf{J}_{w,\varphi\varphi,i} \xi_i \right) \cdot \omega + \widetilde{\omega} \mathbf{I}_{JH} \xi,\\
&\overline{\mathbf{k}}_w = \mathbf{k}_{w,\varphi\varphi} + 2 \dot{\mathbf{J}}_{\varphi w}^T \omega.
\end{aligned}$$

Можно показать, что выведенные здесь формулы являются упрощенной версией формул, получаемых на основе подхода, традиционно используемого в литературе.

§ 5. Пример программной реализации

Полученные в настоящей статье уравнения движения деформируемых конструкций были реализованы в программном комплексе динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER. Далее приводится пример реального расчета, выполненного с использованием уравнений упругих тел, выведенных методом «смещенных твердых тел».

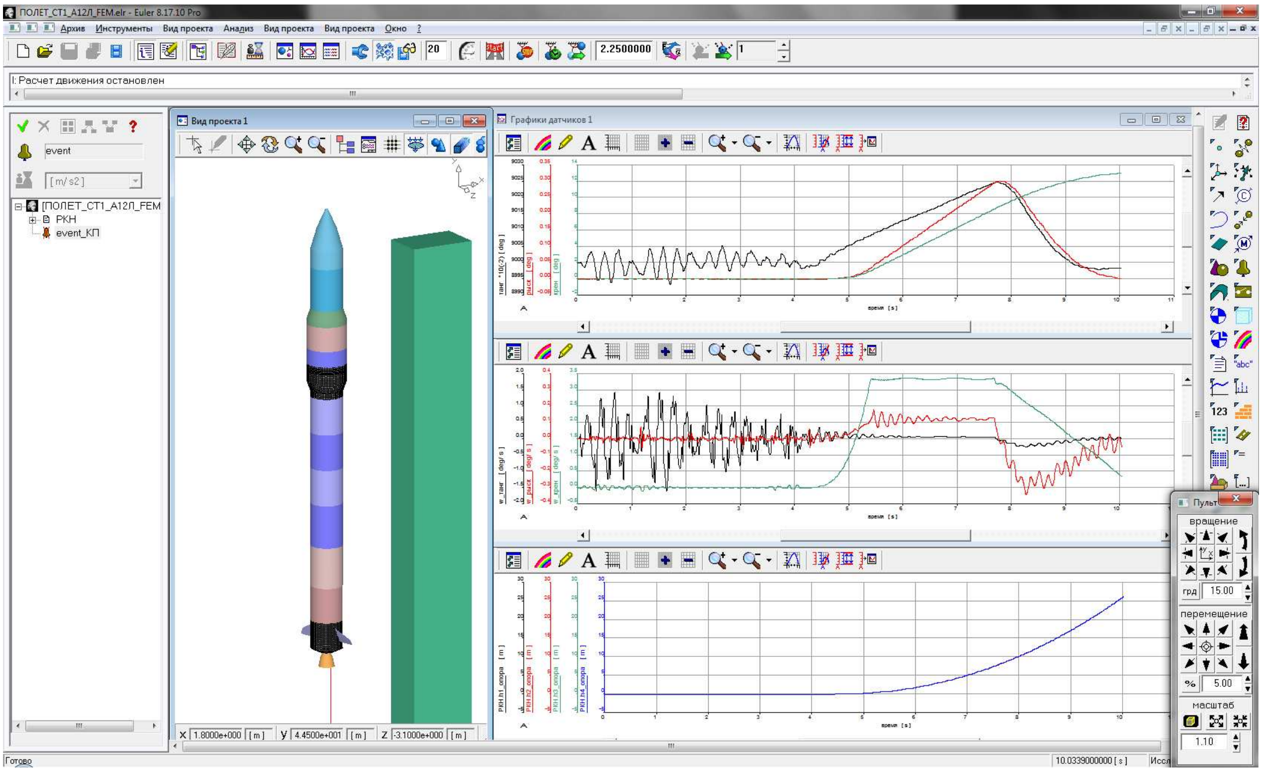

Рис. 1. Общий вид среды ПК EULER в процессе исследования проекта

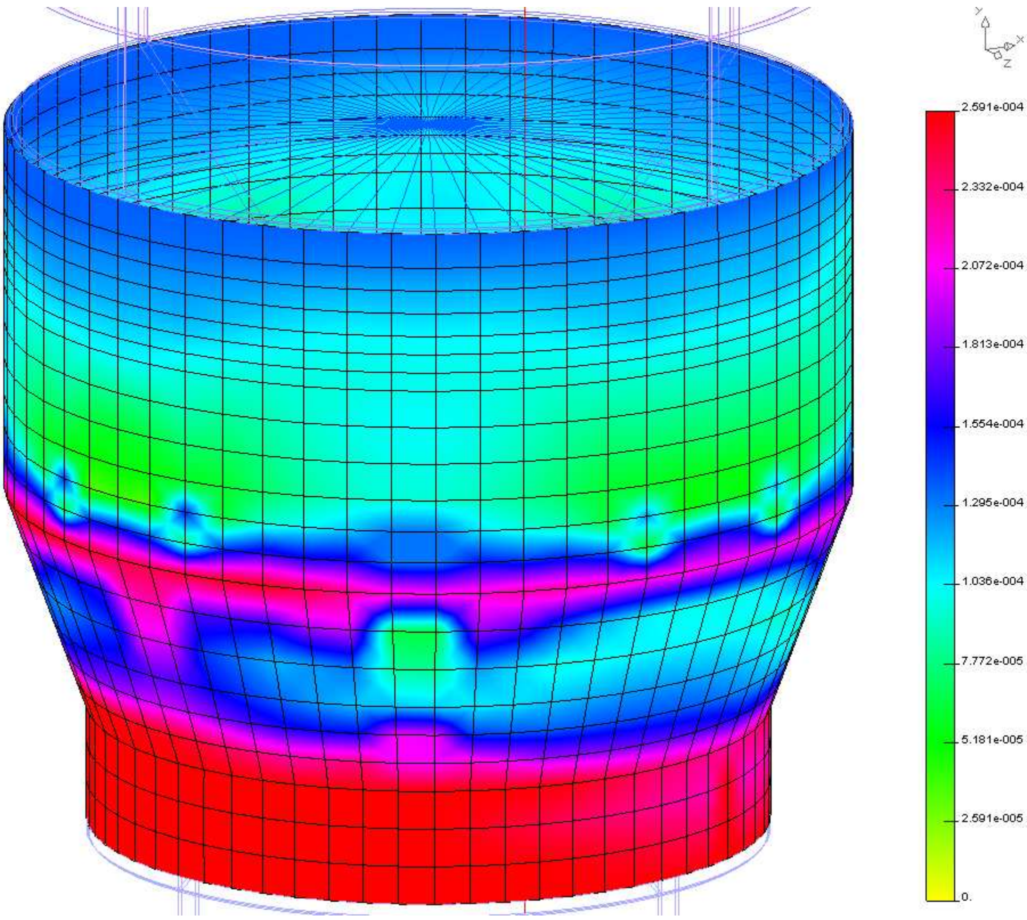

Рис. 2. Деформация переднего отсека

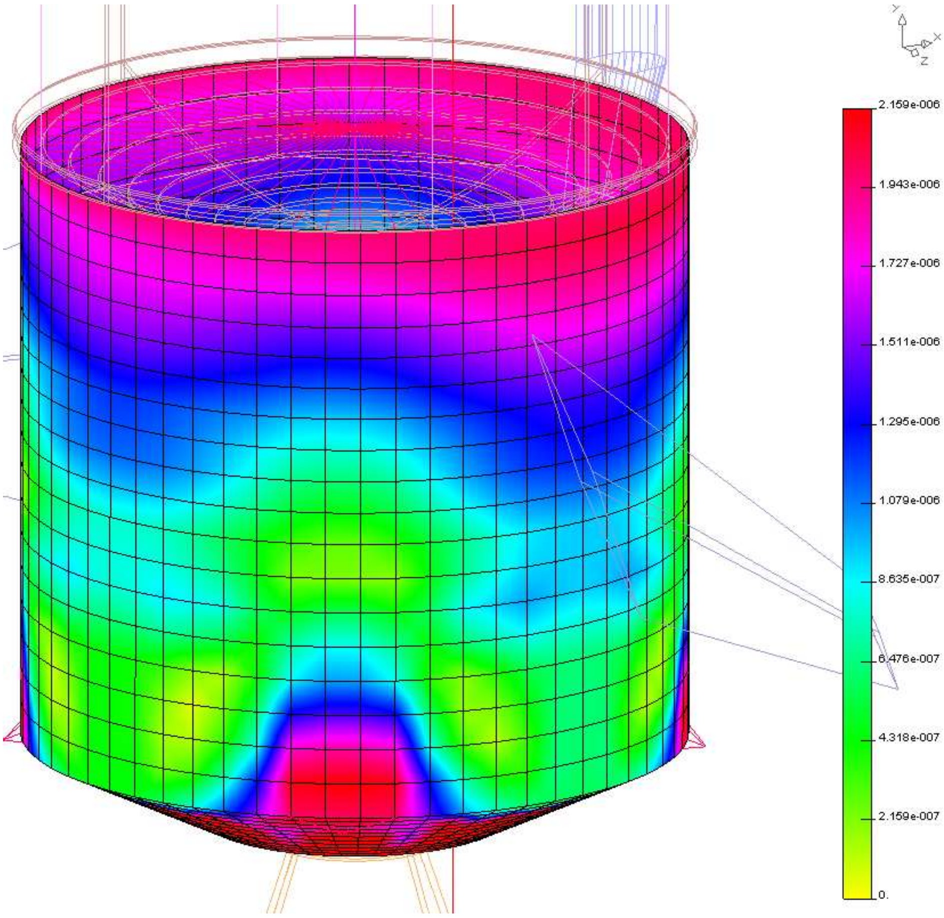

Рис. 3. Деформация хвостового отсека

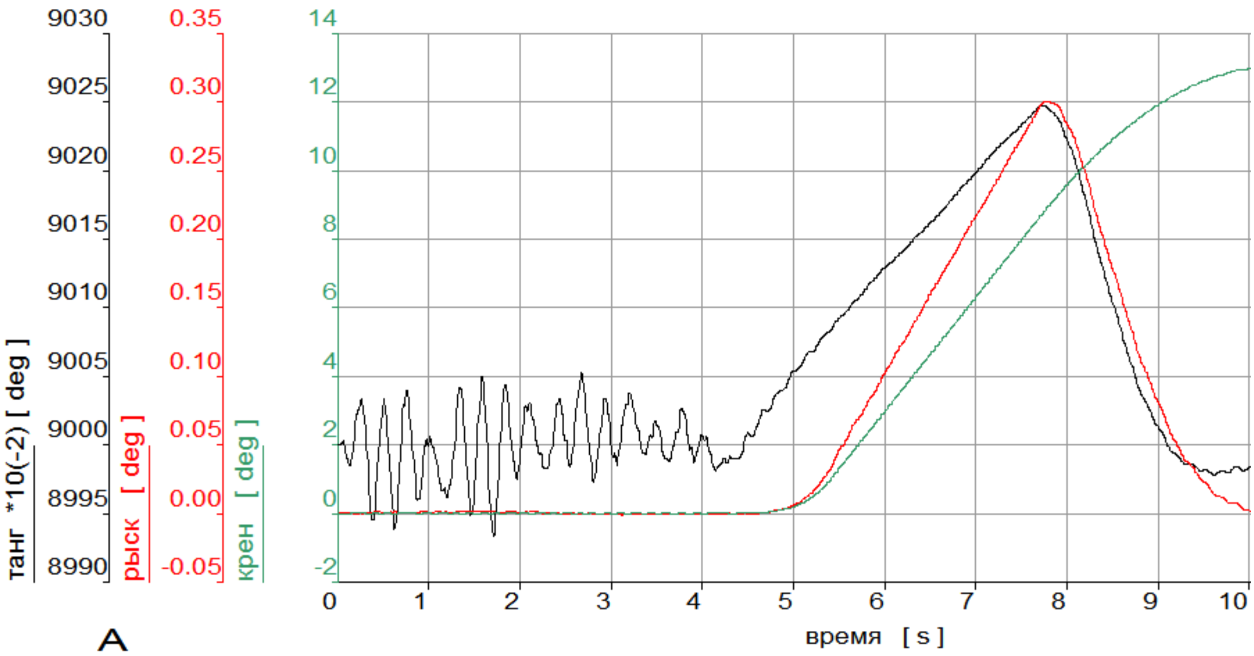

Рис. 4. Графики основных датчиков

В рассматриваемом примере объектом исследования является управляемый старт ракеты. На рис. 1 показан общий вид среды ПК EULER в некоторый момент времени расчета. Передний и хвостовой отсеки ракеты моделируются упругими телами. На рис. 2 и 3 представлена визуализация упругих перемещений точек этих двух отсеков в процессе движения ракеты. Графики основных характеристик положения ракеты в пространстве — датчиков тангажа, рыска и крена — приведены на рис. 4. Как показала практика, результаты расчета, выполненного с использованием выведенных уравнений движения упругих тел, хорошо согласуются с натурными испытаниями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
4. Shabana A.A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and large deformation analysis of flexible bodies // Techn. Rep. № MBS96–1–UIC, Dept. of Mech. Eng., Univ. of Illinois at Chicago, 1996.
5. Михеев Г.В. Компьютерное моделирование динамики систем абсолютно твердых и упругих тел, подверженных малым деформациям: дис. . . . канд. техн. наук. Брянск, 2004. 153 с.
6. MSC.Adams/Flex software documentation. URL: http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10098&cat=1VMO50&actp=LIST.
7. Юдаков А.А. Общие уравнения движения упругих тел, основанные на методе конечных элементов и модели Крейга–Бэмптона // Высокие технологии, образование, промышленность: сб. статей XI Междунар. науч.-практ. конф. СПбГУ. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2011. Т. 4. С. 135–142.
8. Бойков В.Г., Юдаков А.А. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. № 1. С. 42–52.
9. Craig R.R., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. № 7. P. 1313–1319.

Поступила в редакцию 28.04.2012

Юдаков Алексей Александрович, научный сотрудник, ЗАО «АвтоМеханика», 125363, Россия, Москва, ул. Новопоселковая, 6.
E-mail: you_AD@mail.ru

A. A. Yudakov

Principles of flexible body general dynamic equations derivation based on the Craig–Bampton model and of their practically significant approximations

Keywords: flexible body, finite element method, Craig–Bampton model, modal matrix, dynamic equations, constraint equations, multibody system.

Mathematical Subject Classifications: 74H10, 70E55

In the article dynamic equations of motion of flexible bodies' large displacement within a multibody system with small deformations are given. In the process of derivation finite element method (FEM) and the Craig–Bampton method of FEM model's matrices reduction are used. No additional approximations are involved, thus obtaining the most general equations in given problem definition. Analysis of difficulties arising in practical using of the derived general dynamic equations is conducted, and ways to overcome those are suggested. Modified equations derivation using more general approximation than is assumed in literature is presented. An example of derived flexible structures' dynamic equations software realization is given.

REFERENCES

1. Obraztsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* (Finite element method in the problems of aircraft structural mechanics), Moscow: Vysshaya Shkola, 1985, 392 p.

2. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* (Finite element method in engineering), Moscow: Mir, 1975, 542 p.

3. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*, New Jersey: Prentice-Hall, 1976, 528 p. Translated under the title *Chislennye metody analiza i metod konechnykh elementov*, Moscow: Stroiizdat, 1982, 448 p.

4. Shabana A.A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and large deformation analysis of flexible bodies, *Techn. Rep. No. MBS96-1-UIC, Dept. of Mech. Eng.*, Univ. of Illinois at Chicago, 1996.

5. Mikheev G.V. Computer simulation of rigid and flexible multibody system dynamics with small deformations, *Cand. Sci. (Eng.) Dissertation*, Bryansk, 2004, 153 p.

6. MSC.Adams/Flex software documentation. http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10098&cat=1VMO50&actp=LIST.

7. Yudakov A.A. General equations of flexible bodies motion, based on finite element method and Craig-Bampton model, *High Technologies, Education, Industry: Trans. Of XI Int. Sci.-Pract. Conf.*, Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 2011, vol. 4, pp. 135–142.

8. Boikov V.G., Yudakov A.A. Simulation of rigid and flexible multibody system dynamics with EULER software, *Inform. Tekhn. Vych. Sist.*, 2011, no. 1, pp. 42–52.

9. Craig R.R., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319.

Received 28.04.2012

Yudakov Aleksei Aleksandrovich, researcher, ZAO (Close Corporation) “Avtomekhanika”, ul. Novoposelkovaya, 6, Moscow, 125363, Russia.
E-mail: you_AD@mail.ru