

УДК 531.36

© А. П. Иванов, Н. Д. Шувалов, Т. Б. Иванова

## ОБ УСЛОВИЯХ ОТРЫВА ВОЛЧКА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ОПОРЕ <sup>1</sup>

Обсуждается классическая задача о движении тяжелого симметричного твердого тела (волчка) с неподвижной точкой на горизонтальной плоскости. Ввиду одностороннего характера контакта, при определенных условиях возможны отрывы (подскоки) волчка. Известно два сценария отрывов, связанных с переменной знака нормальной реакции либо знака нормального ускорения, причем несовпадение указанных условий приводит к парадоксам. Для выяснения природы парадоксов подробно изучен пример маятника (стержня) с учетом ограниченности реального коэффициента трения. Показано, что в случае парадокса первого типа (невозможен ни отрыв, ни продолжение контакта) тело начинает скользить по опоре. В случае парадокса второго типа (возможен как отрыв, так и сохранение контакта) контакт сохраняется вплоть до перемены знака нормальной реакции, а затем нормальное ускорение при отрыве отлично от нуля.

*Ключевые слова:* трение, волчок Лагранжа, парадокс, отрыв.

### § 1. Два типа условий отрыва

Рассмотрим тяжелое тело вращения, движущееся по горизонтальной плоскости, касающейся опоры одной точкой  $C$ . Обозначим  $(x, y, z)$  — координаты центра масс  $G$  в неподвижной системе отсчета ( $Oz$  направлена вертикально вверх),  $(\theta, \psi, \varphi)$  — углы Эйлера. Плоскость осуществляет одностороннюю связь

$$z \geq f(\theta), \tag{1}$$

где функция  $f(\theta)$  определяется формой тела. Уравнения движения в форме Ньютона–Эйлера включают реакцию связи  $\mathbf{R}$ , которую можно разложить на нормальную  $\mathbf{R}_n$  и тангенциальную  $\mathbf{R}_\tau$  составляющие:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{k} + \mathbf{R}, \quad J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \times \mathbf{GC}, \tag{2}$$

где  $m$  — масса тела,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость в связанной с телом системой координат,  $J$  — центральный тензор инерции,  $\mathbf{k}$  — орт вертикали,  $g$  — ускорение поля тяжести.

Для однозначного определения реакции необходимо задать закон трения вида

$$\mathbf{R}_\tau = \mathbf{R}_\tau(q, \dot{q}, R_n), \tag{3}$$

где  $q$  — используемые обобщенные координаты, причем если неравенство (1) строгое, то  $\mathbf{R} \equiv 0$ .

Сохранение контакта волчка с плоскостью подразумевает выполнение равенства  $z = f(\theta)$  на некотором интервале времени. При этом

$$\dot{z} = f'(\theta)\dot{\theta}, \quad \ddot{z} = f''(\theta)\dot{\theta}^2 + f'(\theta)\ddot{\theta}. \tag{4}$$

В силу уравнений (2) имеем

$$\ddot{z} = (\mathbf{R}, \mathbf{k}) - g, \tag{5}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. №11.G34.31.0039). Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00354-а.

а угловое ускорение  $\ddot{\theta}$  вычисляется из второй формулы (2) при учете кинематических уравнений Эйлера. Для односторонней связи (1) необходимо  $(\mathbf{R}, \mathbf{k}) > 0$ , и в силу (4), (5) условие отрыва имеет вид

$$f''(\theta)\dot{\theta}^2 + f'(\theta)\ddot{\theta} \leq -g. \quad (6)$$

В частности, если  $f = \text{const}$  (шар), то левая часть в (6) равна нулю, неравенство не выполнено, и контакт сохраняется при любых значениях фазовых переменных  $(\theta, \dot{\theta})$ . В общем случае для построения области безотрывного движения необходимо выразить  $\ddot{\theta}$  через эти переменные из системы (2)–(3). Это можно сделать двумя способами [2].

1. Из системы (2) с учетом выбранного закона трения (3). В этом случае неравенство, противоположное (6), описывает область возможного контакта тела с плоскостью. Выполнение неравенства (6) свидетельствует о невозможности такого движения.
2. Из системы (2), где положено  $R = 0$ . В этом случае неравенство (6) описывает область возможного прыжка. Нарушение знака неравенства (6) свидетельствует о невозможности прыжка.

Заметим, что в случае *абсолютно гладкой плоскости* в формуле (3)  $R_\tau \equiv 0$ , при этом оба способа приводят к одинаковому результату [3]. Это означает, что поверхность (6) разделяет фазовое пространство на две части, одна из которых (левая часть больше правой) соответствует контакту, вторая — отрыву.

Для *шероховатой плоскости* результаты получаются, вообще говоря, разными. В этом случае поверхности возможного контакта и невозможного прыжка разбивают фазовое пространство на области четырех типов:



Рис. 1.

- I. контакт возможен, прыжок невозможен;
- II. контакт и прыжок возможны;
- III. контакт невозможен, прыжок возможен;
- IV. контакт и прыжок невозможны.

Схематично области I–IV изображены на рис.1. Допустим, что фазовая кривая начинается в области I, а затем переходит в область IV. Это приводит к невозможности продолжения движения — одному из парадоксов Пенлеве. На практике примеры такого рода пока не построены. Переход из области I в область II свидетельствует о другом парадоксе — неединственности продолжения движения. Примеры такого рода вполне реалистичны и будут приведены ниже. Допустим далее, что движение с фазой контакта переходит из области II в область III, это сопровождается прыжком, причем сразу с ненулевым ускорением. Это отличает его от прыжка с нулевым ускорением, который сопровождает переход из области I в III через точку пересечения двух границ.

Примеры такого рода пока не построены. Переход из области I в область II свидетельствует о другом парадоксе — неединственности продолжения движения. Примеры такого рода вполне реалистичны и будут приведены ниже. Допустим далее, что движение с фазой контакта переходит из области II в область III, это сопровождается прыжком, причем сразу с ненулевым ускорением. Это отличает его от прыжка с нулевым ускорением, который сопровождает переход из области I в III через точку пересечения двух границ.

## § 2. Плоское движение стержня без скольжения

Обозначим  $(x, y)$  — координаты центра масс стержня,  $\varphi$  — угол наклона стержня к горизонту,  $2l$  — длина,  $m = 1$  — масса,  $N$  — нормальная реакция,  $F$  — сила трения,  $J$  — центральный момент инерции,  $w$ ,  $-g$  — горизонтальная и вертикальная силы, приложенные в центре (рис.2). Расстояние от центра масс до опоры

$$h = f(\varphi) = l \sin \varphi, \quad \frac{dh}{d\varphi} = a = l \cos \varphi.$$

Уравнения (2) принимают вид

$$\ddot{x} = w + F, \quad \ddot{y} = N - g, \quad J\ddot{\varphi} = -aN + hF. \quad (7)$$

Найдем скорость и ускорение точки контакта :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \dot{x} + h\dot{\varphi}, & \ddot{x}_c &= \ddot{x} + h\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi}^2, \\ \dot{y}_c &= \dot{y} - a\dot{\varphi}, & \ddot{y}_c &= \ddot{y} - a\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При контакте без скольжения имеем  $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = 0$ , и из системы (7), (8) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= w + F + h(-aN + Fh)J^{-1} + a\dot{\varphi}^2, \\ 0 &= N - g + a(aN - Fh)J^{-1} + h\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая  $F$  из системы (9), получим

$$(N + h\dot{\varphi}^2)(J + l^2) = g(J + h^2) - wah.$$

Поскольку  $N > 0$ , область возможного контакта определяется неравенством

$$h\dot{\varphi}^2(J + l^2) \leq g(J + h^2) - wah. \quad (10)$$

Далее, область возможного прыжка описывается неравенством  $\ddot{y}_c \geq 0$ , которое выполнено при условиях  $N = F = 0$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$ , откуда

$$h\dot{\varphi}^2 \geq g. \quad (11)$$

Обозначим  $\kappa = l^2/J$  (для однородного стержня  $\kappa = 3$ ),  $\varepsilon = w/g$ . В общем случае будем представлять движение в плоскости переменных  $(\varphi, U)$ , где

$$U = \frac{h\dot{\varphi}^2}{g}.$$

Тогда неравенство (10) примет вид

$$U(1 + \kappa) \leq (1 + \kappa \sin^2 \varphi) - \varepsilon \kappa \sin \varphi \cos \varphi. \quad (12)$$

Границы  $U_1, U_2$  областей возможного прыжка (10) и возможного контакта (12) в случае  $\kappa = 3$  выражаются равенствами

$$U_1 = 1, \quad U_2 = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \sqrt{1 + \varepsilon^2} \cos(2\varphi - \xi), \quad (13)$$

где  $\xi = \arcsin \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ .

В случае горизонтальной опоры имеем  $\varepsilon = 0$ , при этом  $U_2 \leq U_1$ , и область  $\Pi$  неоднозначности движения (рис. 1) отсутствует. Если плоскость наклонена, то  $\varepsilon \neq 0$ , и все четыре области непусты. При этом кривые  $U_1$  и  $U_2$  пересекаются в двух точках:

$$\varphi_1 = \pi/2, \quad \varphi_2 = \pi/2 + \xi.$$

Для построения фазового портрета системы в плоскости  $(\varphi, U)$  заметим, что при вращении вокруг неподвижной точки  $C$  система имеет интеграл энергии

$$\frac{J_c \dot{\varphi}^2}{2} + gh - aw = E = \text{const}, \quad J_c = J + l^2 = \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right). \quad (14)$$

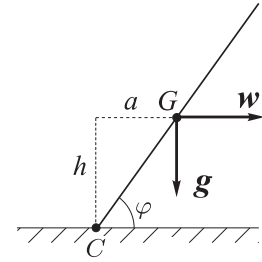


Рис. 2.

Записывая равенство (14) в фазовых переменных, получим

$$\frac{h}{2g} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi - \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi = \frac{E}{gl} \sin \varphi,$$

откуда линии постоянной энергии  $U_3 = \text{const}$  записываются формулой

$$\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) U_3 + 1 - \cos 2\varphi - \varepsilon \sin 2\varphi = H \sin \varphi, \quad H = \frac{2E}{gl}. \quad (15)$$

Вследствие (12) имеем

$$\cos 2\varphi + \varepsilon \sin 2\varphi = \left(1 + \frac{2}{\kappa}\right) - 2U_2 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right).$$

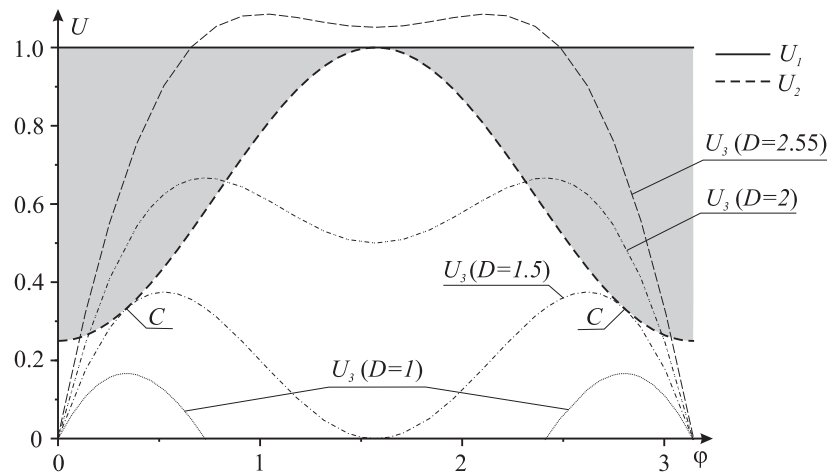
Подставляя данное выражение в (15), получаем

$$\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) U_3 + 1 = H \sin \varphi + \left(1 + \frac{2}{\kappa}\right) - 2U_2 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right),$$

откуда

$$U_3 = D \sin \varphi + \frac{2}{1 + \kappa} - 2U_2, \quad D = \text{const}. \quad (16)$$

На рис. 3 представлены результаты расчетов по формулам (13), (16) для случая  $\varepsilon = 0$ . Траектории, соответствующие значениям  $D < 1.5$ , описывают безотрывное падение стержня в окрестности значений  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Траектории для значений  $D > 1.5$  попадают в парадоксальную область IV, где невозможен ни отрыв, ни сохранение контакта. В область отрыва  $U > 1$  попадают траектории для значений  $D > 2.45$ .



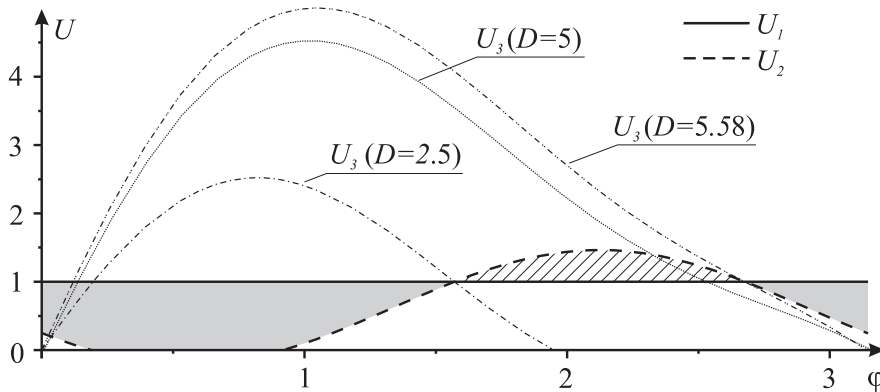
**Рис. 3.** Фазовый портрет для однородного стержня в плоскости  $(\varphi, U)$  при  $\varepsilon = 0$  с обозначенными границами областей возможного прыжка  $U_1$  и возможного контакта  $U_2$ . Парадоксальная область IV (прыжок и контакт невозможны) выделена серым цветом

**Замечание 1.** Значение  $D = 1.5$ , при котором кривая (16) касается линии  $U = U_2(\varphi)$  — точное. Его можно определить, решая систему

$$U_2(\varphi) = U_3(\varphi), \quad \frac{dU_2}{d\varphi} = \frac{dU_3}{d\varphi} \quad (17)$$

при  $\varepsilon = 0$ . Несложные расчеты показывают, что  $\varphi = \arcsin(1/3)$ ,  $D = 1.5$ . Интересно, что именно это значение константы  $D$  соответствует стержню, падающему из вертикального положения без начальной скорости (задача Литллууда). Следовательно, траектория такого стержня не попадает в парадоксальную область, хотя в одной из ее точек (точка  $C$  на рис. 3) нормальная реакция обнуляется.

На рис. 4 представлены результаты расчетов для случая  $\varepsilon = 2$ , что соответствует углу наклона плоскости  $\text{arctg } 2 \approx 63.4^\circ$ . В данном случае имеется и другая возможность парадокса. Для  $D = 5$  траектория, идущая от  $\varphi = \pi$  с отрицательной угловой скоростью, попадает в область II, где возможен как отрыв, так и сохранение контакта. Аналогичным свойством обладают все траектории в диапазоне  $2.5 < D < 5.58$ . В этом случае область I состоит из небольшого криволинейного треугольника в окрестности начала координат, а также криволинейной трапеции, ограниченной сверху прямой и  $U = 1$  и двумя дугами синусоиды. Безотрывные движения описываются участками линий уровня энергии, лежащими в этих областях, и представляют собой падение стержня вправо ( $\varphi = 0$ ) или влево ( $\varphi = \pi$ ).



**Рис. 4.** Фазовые траектории для однородного стержня в плоскости  $(\varphi, U)$  при  $\varepsilon = 2$  с обозначенными границами областей возможного прыжка  $U_1$  и возможного контакта  $U_2$ . Штрихом обозначена парадоксальная область II (возможен отрыв и сохранение контакта), серым цветом обозначена парадоксальная область IV (прыжок и контакт невозможны)

### § 3. Анализ парадоксальных ситуаций

На рассмотренном выше примере обсудим два типа парадоксов, возникающих при выходе траектории из области I в область II или IV. Сначала исследуем случай перехода в область IV, где невозможен как прыжок, так и контакт без скольжения. Условиями реализации такого случая является соотношение  $N \rightarrow 0$  в сочетании с требованием необнуления (в пределе) силы трения  $F$ . Таким образом, отношение  $F/N$  по мере приближения к парадоксальной области становится сколь угодно большим. С учетом того, что в реальных физических системах коэффициент трения всегда конечен, приходим к выводу: для траекторий, идущих в область IV, рано или поздно условие неподвижности точки контакта (закон трения покоя) будет нарушено, и стержень начнет скользить по опоре.

Для описания последующей динамики необходимо ввести дополнительную обобщенную координату  $x_c$ . Уравнения движения для случая  $w = 0, a > 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= v, \quad \dot{v} = F + h(-aN + Fh)J^{-1} + a\dot{\varphi}^2, \\ J\ddot{\varphi} &= -aN + hF, \quad F = \mu N, \quad N = \frac{gJ - h\dot{\varphi}^2}{a^2 - \mu ah + J}. \end{aligned} \tag{18}$$

Возьмем начальные условия  $x_c^0 = 0, v^0 = 0, \varphi^0 = 0, \dot{\varphi}^0 > 0$  и положим  $\mu = 0.3$ . Траектория состоит из нескольких участков.

1. Вначале скольжение отсутствует, и траектория описывается формулой (14). Ее можно построить путем интегрирования третьего из уравнений (18), используя для вычисления реакции уравнения (9) или теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки  $C$ :

$$J_c \ddot{\varphi} = -g \cos \varphi.$$

Признаком окончания данного участка служит выполнение равенства  $|F| = \mu N$ .

2. При скольжении выполняются уравнения (18) (так как правые части не зависят от  $x_c$ , система имеет третий порядок). Переменная  $v$  некоторое время возрастает от нуля, а затем убывает. Признаком окончания данного участка является выполнение одного из равенств  $v = 0$  (возврат к участку первого типа с меньшим значением постоянной энергии), или  $h\dot{\theta} = g$  (отрыв от опоры).

Как показывают проведенные расчеты, для движений с условием  $\dot{\varphi}^0 < 3.06$  отрыва нет, причем для значений  $\dot{\varphi}^0 < 0.63$  переход к скольжению вообще не происходит.

Движения с отрывом включают фазу полета, оканчивающуюся ударом. В данной работе эти явления не рассматриваются.

Иной характер особенности возникает при переходе в область II неоднозначности движения, так как при этом отношение  $F/N$  остается конечным. На первый взгляд здесь мы имеем дело с нетипичной бифуркацией, когда вместо единственного решения уравнений движений возникает два. На самом деле, несложно показать, что в области IV существует и третье решение: скольжение стержня по опоре. Действительно, на линии отрыва  $U = 1$  ( $h\dot{\varphi}^2 = g$ ) второе равенство (9) принимает вид

$$F = \frac{a^2 + J}{ah} N.$$

Допустим, что коэффициент трения скольжения равен  $\mu$ , причем для рассматриваемой траектории выполнено неравенство

$$\frac{a^2 + J}{|a|h} < \mu.$$

В области  $U > 1$  имеем

$$ahF = (a^2 + J)N + gJ(U - 1).$$

Подставляя в формулу (18) закон Кулона  $F = \pm\mu N$  (знак выбирается таким же, как знак величины  $a$ ), получим линейное уравнение, имеющее при учете (18) единственное решение  $N > 0$ . Это решение соответствует скольжению по опоре, причем ускорение точки контакта отлично от нуля и может быть определено путем подстановки найденных значений реакции в первую формулу (9).

Следовательно, переход через линию  $U = 1$  соответствует пересечению линии «сборки» для отображения  $(N, F) \rightarrow (\ddot{x}_c, \ddot{y}_c)$  (см. [4]) и сопровождается рождением пары решений (отрыв и скольжение).

Характер устойчивости этих решений можно исследовать, воспользовавшись методом работы [5]. В области I график зависимости обобщенной потенциальной энергии от нормальной реакции  $\Pi(N)$  имеет точку глобального минимума (рис. 5а), что свидетельствует об устойчивости движения стержня без скольжения. При переходе в область II график принимает вид, представленный на 5б, где точка локального минимума отвечает отсутствию скольжения, локального максимума — скольжению по опоре; отрыву соответствует переход в левую полуплоскость. Здесь имеется потенциальная яма, обеспечивающая устойчивость движения без скольжения, ограниченная (неустойчивой) точкой максимума. Выход из ямы означает отрыв, а скольжение практически не реализуемо. При движении траектории вглубь области II глубина ямы уменьшается до тех пор, пока при выходе на границу области отрыва III она вообще не исчезает (5в). Это означает пересечение линии «сборки» и выход из парадоксальной области. Стержень необходимо отрывается от опоры, причем нормальное ускорение точки контакта будет ненулевым.

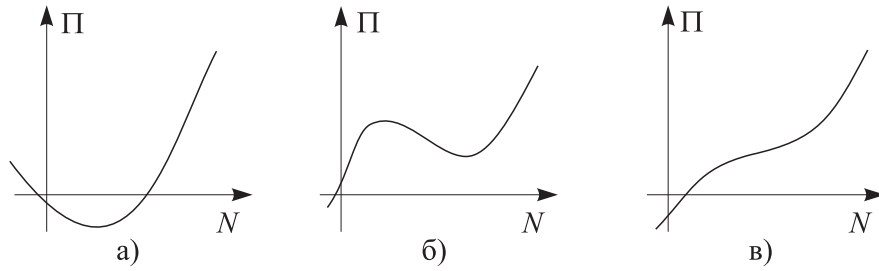


Рис. 5.

#### § 4. Волчок Лагранжа

Классический волчок Лагранжа — это тяжелое динамически симметричное твердое тело с неподвижной точкой  $O$ , лежащей на оси симметрии (рис. 6). Обозначим  $m$  — массу тела,  $l$  — расстояние от неподвижной точки до центра масс  $G$ , главные компоненты тензора инерции  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Функция Лагранжа данной системы, записанная через углы Эйлера, имеет вид

$$L = \frac{I_1 + ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

и не зависит явно от углов  $\varphi$  и  $\psi$ . Следовательно, имеется два интеграла движения. Первый — это проекция момента импульса на ось симметрии волчка:

$$M_3 = \partial L / \partial \varphi = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta).$$

Второй — проекция момента импульса на неподвижную вертикальную ось  $Oz$ :

$$M_z = \partial L / \partial \psi = ((I_1 + ml^2) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\psi} + I_3 \cos \theta \dot{\varphi};$$

Кроме того, сохраняется энергия, которая после исключения циклических переменных  $\varphi$  и  $\psi$ , имеет вид

$$E = \frac{I_0}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_0 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad (19)$$

где  $I_0 = I_1 + ml^2$ . Далее будем считать  $m = 1$ .

Аналогично [6] введем переменную  $u = \cos \theta$ . Тогда из (19) получим

$$\dot{u}^2 = R(u), \quad R(u) = \frac{2(1-u^2)}{I_0} \left( E - \frac{M_3^2}{2I_3} - glu \right) - \frac{(M_z - M_3 u)^2}{I_0^2}. \quad (20)$$

Известно [1], что функция  $R(u)$  положительна в интервале  $(u_1, u_2) \subset (-1, 1)$ , а также на полуоси  $u > u_3 > 1$ . Значения  $u_1, u_2$  зависят от величин первых интегралов и определяют границы изменения переменной  $u$ . Сама переменная  $u$  определяется из уравнения (20) квадратурой при помощи эллиптических интегралов. Затем можно выразить через  $u$  и  $\dot{u}$  значения остальных фазовых переменных для данных значений интегралов.

Поскольку величина  $z = lu$  равна аппликате центра масс, то по теореме о движении центра масс имеем для вертикальной составляющей реакции в точке  $O$  следующее выражение:

$$N = l\ddot{u} + g.$$

Раус [1] рассмотрел задачу в односторонней постановке, считая, что волчок опирается острием на горизонтальную абсолютно шероховатую плоскость. Он вывел следующую формулу:

$$\frac{N(u)}{g} = 1 + \frac{l^2}{2I_0} ((3u - S_1)^2 + 3S_2 - S_1^2),$$

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3, \quad S_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3.$$

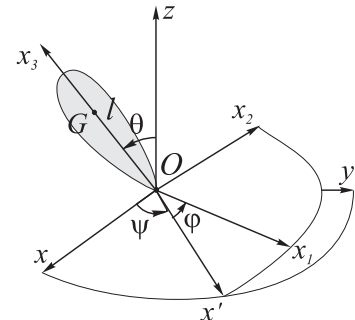


Рис. 6.

Минимальное значение функции  $N(u)$  на отрезке  $u_1 < u < u_2$  достигается при значении  $u = u^*$ , определяемом формулой

$$u^* = \min\{u_2, S_1/3\}.$$

По формулам Виета в применении к функции (20) имеем

$$S_1 = \frac{(1 - I_1/I_3)M_3^2 + E}{2I_0 gl}, \quad S_2 = \frac{M_3 M_z}{I_0 gl} - 1,$$

тогда как величину  $u_2$  можно определить лишь численными методами.

Раус указал, что, если выполнено неравенство

$$N(u^*) < 0,$$

то непрерывный контакт волчка с опорой невозможен, то есть волчок неизбежно подпрыгнет. Заметим, что для волчка с опорой на плоскости физически допустимы лишь такие отклонения от вертикали, для которых тело не задевает плоскость. Следовательно,  $u \geq \bar{u} > 0$ , где значение  $\bar{u}$  определяется геометрической формой волчка. Данное обстоятельство накладывает определенные ограничения на величины первых интегралов в формуле (20). В частности,  $S_2 > 0$ , откуда необходимо

$$I_1 I_2 > I_0 gl. \quad (21)$$

Имеется и другой сценарий отрыва: вертикальное ускорение точки  $O$  при нулевой реакции в этой точке становится положительным (в терминологии данной статьи — возможный отрыв). Согласно формуле Эйлера

$$\mathbf{V}(O) = \mathbf{V}(G) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GO}. \quad (22)$$

Проектируя равенство (22) на вертикаль, получим при учете кинематических уравнений Эйлера

$$(\mathbf{V}(O), \mathbf{k}) = (\mathbf{V}(G), \mathbf{k}) - l\dot{u}, \quad l = |\mathbf{GO}|. \quad (23)$$

Дифференцируя формулу (23), получаем

$$(\dot{\mathbf{V}}(O), \mathbf{k}) = (\dot{\mathbf{V}}(G), \mathbf{k}) - l\ddot{u}.$$

В свободном полете  $\dot{\mathbf{V}}(G) = -g\mathbf{k}$ , а кинетическая энергия движения  $T$  относительно центра масс постоянна:

$$2T = \frac{I_0}{2(1-u^2)}\dot{u}^2 + \frac{M_3^2}{I_3} + \frac{(M_z - M_3 u)^2}{I_0(1-u^2)} = \text{const}.$$

Следовательно, условие возможного отрыва  $(\dot{\mathbf{V}}(O), \mathbf{k}) \geq 0$  принимает вид

$$-l\ddot{u} \geq g, \quad (24)$$

$$I_0^2 \ddot{u}(1-u^2) = -I_0^2 u \dot{u}^2 + (M_z - M_3 u)(M_3 - M_z u).$$

В частности, если волчок не вращается, то есть  $M_3 = M_z = 0$ , то формула (24) переходит в (11).

В общем случае будем представлять движение в плоскости переменных  $(u, V)$ , где

$$V = \frac{l u \dot{u}^2}{g} = \frac{l \cos \theta \sin^2 \theta}{g} \dot{\theta}^2.$$



В этих переменных условие возможного отрыва (24) примет вид

$$V \geq V_1 = 1 - u^2 - \frac{l}{gI_0^2}(M_3u - M_z)(M_3 - M_zu). \quad (25)$$

Условие невозможного контакта также имеет вид (24), однако величина  $\ddot{u}$  определяется путем дифференцирования формулы (19):

$$I_0^2(1 - u^2)\ddot{u} = -I_0^2u\dot{u}^2 + (M_z - M_3u)(M_3 - M_zu) - glI_0(1 - u^2)^2.$$

Неравенство (24) запишется следующим образом:

$$V \geq V_2 = 1 - u^2 - \frac{l}{gI_0^2}(M_3u - M_z)(M_3 - M_zu) - \frac{l^2}{I_0}(1 - u^2)^2. \quad (26)$$

Для удобства положим

$$M_{3,z} = M_{3,z}^* I_1 \sqrt{g/l}.$$

Тогда уравнения линий (25), (26) примут вид

$$\begin{aligned} V_1 &= 1 - u^2 - (M_3^*u - M_z^*)(I_3^* - M_z^*u), \\ V_2 &= 1 - u^2 - \frac{(M_3^*u - M_z^*)(M_3^* - M_z^*u)}{k^2} - \frac{k-1}{k}(1 - u^2)^2, \end{aligned}$$

где  $k = I_0/I_1 = 1 + l^2/I_1$ .

Фазовые кривые задаются уравнениями

$$V_3 = \frac{lu}{g}R(u) = 2u \left( h - \frac{\chi}{2k}M_3^{*2} - \frac{k-1}{k}u \right) (1 - u^2) - \frac{u(M_z^* - M_3^*u)}{k^2}, \quad (27)$$

где  $h = \frac{lE}{I_0g}$ ,  $\chi = \frac{I_1}{I_3}$ .

Разбиение фазовой плоскости на четыре части (рис. 1) зависит от взаимного расположения графиков (25) и (26), которое в свою очередь определяется значениями первых интегралов. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1.  $M_3^* = M_z^* = 0$  — аналогично стержню на горизонтальной плоскости (разд. 2) имеем  $V_2 \leq V_1$ , причем равенство достигается лишь для  $u = \pm 1$  (см. рис. 7). При этом фазовые кривые при определенных значениях могут попасть в парадоксальную область IV (прыжок и контакт невозможны).
2. Если  $M_3^* = M_z^* \neq 0$ , то равенство  $V_1 = V_2$  равносильно уравнению

$$I_1^2(1 - u)^2 \left( \frac{1}{I_0^2} - \frac{1}{I_1^2} \right) = \frac{gl}{I_0}(1 - u^2)^2,$$

причем ввиду того, что  $I_0 = I_1 + l^2 > I_1$ , данное равенство выполнено лишь для  $u = 1$ . Следовательно, этот случай аналогичен предыдущему.

3. В общем случае ( $M_3^* \neq M_z^*$ ) равенство  $V_1 = V_2$  принимает вид

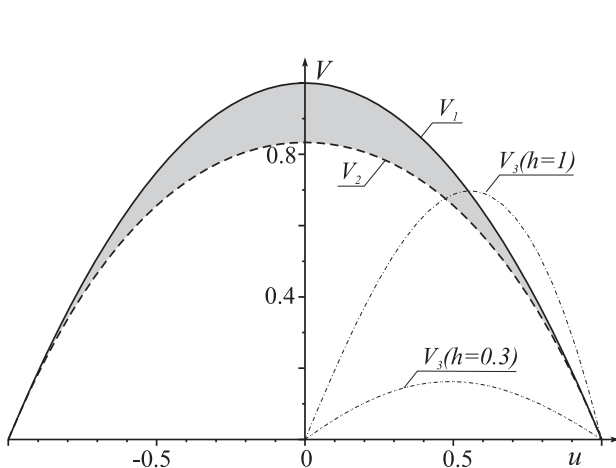
$$M_z^{*2}(1 - \chi u)(\chi - u) \frac{l^2(I_0 + I_1)}{I_1^2} = -glI_0(1 - u^2)^2, \quad \chi = \frac{M_3^*}{M_z^*} \neq 1, \quad (28)$$

причем при учете (21) имеем  $\chi > 0$ . При  $u = 1$  левая часть формулы (28) отрицательна, а правая часть равна нулю. Если  $u$  убывает, то левая часть возрастает, и при  $u = 0$  она

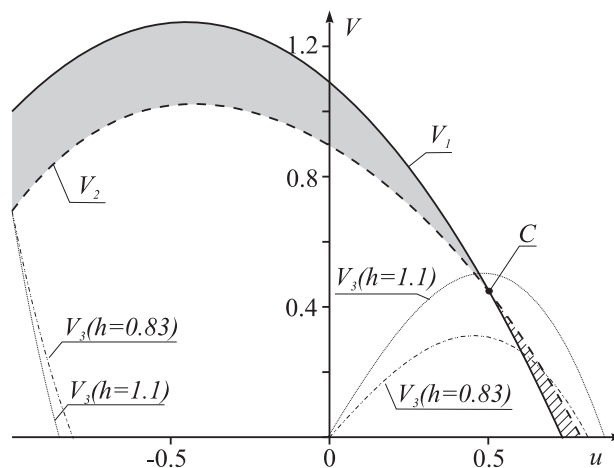
будет положительной; при этом правая часть формулы убывает. Следовательно, уравнение (28) имеет единственный корень  $\bar{u}$ . Подставляя его в равенство (25), найдем значение переменной  $V = \bar{V}$ . Точка  $(\bar{u}, \bar{V})$  соответствует центру на диаграмме, представленной на рис. 1. Границы областей отрыва описываются равенствами (25) и (26), а фазовые траектории — уравнением (27). Значение  $\bar{E}$ , соответствующее точке  $(\bar{u}, \bar{V})$  — критическое: если  $E < \bar{E}$ , то соответствующая траектория попадает из области I в парадоксальную область II, а если  $E > \bar{E}$  — то в область IV. Парадоксальные ситуации можно рассмотреть аналогично разд. 3.

На рис. 8 представлены фазовые траектории на плоскости переменных  $(u, V)$  для значений  $M_3^* = 0.1, M_z^* = 0.9, \chi = 0.5, k = 1.2$ . Линии отрыва пересекаются в точке  $C (\bar{u}, \bar{V}) = (0.5, 0.44)$ . Траектория для  $h = 1.1$  при значении  $u = 0.45$  попадает в парадоксальную область IV, где невозможен ни контакт, ни отрыв. Согласно анализу, проведенному в разделе 3, при учете конечности коэффициента трения волчок начнет скользить по опоре.

Другой парадоксальный сценарий возможен при  $h = 0.83$ . В этом случае линия  $V_3$  попадает в область «затянутого» прыжка при  $u = 0.64$ , в которой возможен как отрыв, так и продолжение контакта, то есть в парадоксальную область II (см. рис. 8).



**Рис. 7.** Фазовый портрет для волчка Лагранжа при  $M_3 = M_z = 0, \chi = 0.5, k = 1.2$ . Парадоксальная область IV обозначена серым цветом



**Рис. 8.** Фазовый портрет для волчка Лагранжа при  $M_3^* = 0.1, M_z^* = 0.9, \chi = 0.5, k = 1.2$ . Штрихом обозначена парадоксальная область II (возможен отрыв и сохранение контакта), серым цветом обозначена парадоксальная область IV (прыжок и контакт невозможны)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1963. Т. 2. 544 с.
2. Ivanov A.P. On detachment conditions in the problem on the motion of a rigid body on a rough plane // Regul. Chaotic Dyn. 2008. Vol. 13. № 4. P. 355–368.
3. Дерябин М.В., Козлов В.В. К теории систем с односторонними связями // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 531–539.
4. Иванов А.П. Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 4. С. 531–546.
5. Иванов А.П. Об экстремальном свойстве реакций связей // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 197–213.
6. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

Иванов Александр Павлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Московский физико-технический институт, 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.

E-mail: apivanov@orc.ru

Шувалов Николай Дмитриевич, кафедра теоретической механики, Московский физико-технический институт, 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.

E-mail: shuvalovnickolay@gmail.com

Иванова Татьяна Борисовна, к. ф.-м. н., старший преподаватель, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: tbesp@rcd.ru

**A. P. Ivanov, N. D. Shuvalov, T. B. Ivanova**

**On detachment conditions of a top on an absolutely rough support**

*Keywords:* friction, Lagrange top, paradox, detachment.

Mathematical Subject Classifications: 70F40

The classical problem about the motion of a heavy symmetric rigid body (top) with a fixed point on the horizontal plane is discussed. Due to the unilateral nature of the contact, detachments (jumps) are possible under certain conditions. We know two scenarios of detachment related to changing the sign of the normal reaction or the sign of the normal acceleration, and the mismatch of these conditions leads to a paradox. To determine the nature of paradoxes an example of the pendulum (rod) within the limitations of the real coefficient of friction was studied in detail. We showed that in the case of the first type of the paradox (detachment is impossible and contact is impossible) the body begins to slide on the support. In the case of the paradox of the second type (detachment is possible and contact is possible) contact is retained up to the sign change of the normal reaction, and then at the detachment the normal acceleration is non-zero.

REFERENCES

1. Routh E. *Advanced dynamics of a system of rigid bodies*, New York: Dover Phoenix Edition, 2005.
2. Ivanov A.P. On detachment conditions in the problem on the motion of a rigid body on a rough plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 355–368.
3. Deryabin M. V., Kozlov V.V. A theory of systems with unilateral constraints, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 531–539.
4. Ivanov A.P. The conditions for the unique solvability of the equations of the dynamics of systems with friction, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2008, vol. 72, no. 4, pp. 531–546.
5. Ivanov A.P. Extremum property of constraint reactions, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 197–213.
6. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dynamics of the rigid body*, Moscow–Izhevsk: RCD, 2001, 384 p.

Received 01.08.2012

Ivanov Aleksandr Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.

E-mail: apivanov@orc.ru

Shuvalov Nikolai Dmitrievich, Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.

E-mail: shuvalovnickolay@gmail.com

Ivanova Tat'yana Borisovna, Lecturer, Department of Theoretical Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: tbesp@rcd.ru