УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КОНСТРУКЦИЯХ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ [1]

Рассматриваются ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств, включая пространства с полуалгебрами и алгебрами множеств. Исследуется преобразование, имеющее смысл продолжения ультрафильтра с полуалгебры на алгебру, порожденную упомянутой полуалгеброй; показано, что данное преобразование — гомеоморфизм в смысле естественных оснащений пространств ультрафильтров, реализующих стандартные компакты (в случае измеримого пространства с алгеброй множеств реализуется пространство стоуновского представления). Исследуются вопросы представления множеств притяжения в абстрактной задаче о достижимости с ограничениями асимптотического характера, связанные с применением компактификаций в классе ультрафильтров измеримых пространств с полуалгебрами множеств, а также некоторые аналоги, использующие ультрафильтры π-систем.

Ключевые слова: ультрафильтр, множество притяжения, ограничения асимптотического характера.

Введение

Основные сокращения: ИП (измеримое пространство), МП (множество притяжения), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство), у/ф (ультрафильтр).

Работа посвящена исследованию задач асимптотического анализа в ТП. Имеются в виду задачи о достижимости при соблюдении ограничений асимптотического характера. Такие ограничения задаются посредством некоторого семейства множеств в пространстве обычных решений. Во многих случаях эти ограничения возникают при возмущении стандартных ограничений, таких, например, как фазовые ограничения (а также краевые и промежуточные условия) в задачах управления [1, гл. III] и неравенства в задачах математического программирования (см. [2, 3]). В других случаях «асимптотические ограничения» возникают изначально и отражают ту или иную тенденцию выбора решений, которая, возможно, и не осуществима в полной мере, но характеризует некий ориентир в вопросах реализации Желаемого. Осознать данный ориентир важно с точки зрения исследования потенциальных возможностей соответствующей «системы». Из конкретных задач, приводящих к упомянутой асимптотической постановке, можно отметить, в частности, задачу о построении и исследовании свойств области достижимости управляемой системы; данная задача нередко оказывается неустойчивой при ослаблении ограничений; данный тип возмущения условий во многих задачах управления является естественным, так как по смыслу речь идет (в этих задачах) о соблюдении ограничений с высокой, но все же конечной степенью точности, что как раз имеет место в реальных технических системах. Возникает вопрос о соблюдении ограничений «на грани фола». Соответственно сама область достижимости заменяется некоторым предельным множеством, а точнее, так называемым МП. Непосредственное нахождение данного МП (посредством соответствующего предельного перехода), как правило, невозможно. Естественный путь решения можно связать с построением тех или иных обобщенных задач.

Такой подход широко используется в теории управления и теории дифференциальных игр (см. [4–8] и др.). Особо отметим использование обобщенных элементов в определении фундаментального свойства стабильности мостов, предложенного Н. Н. Красовским и сыгравшего важную роль при доказательстве фундаментальной теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [6]).

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 09–П–1–1007, 09–П–1–1014) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09–01–00436, 10–01–96020).

§ 1. Общие обозначения и определения, 1

Используем кванторы и пропозициональные связки; def заменяет фразу «по определению» , $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Через $\{x\}$, где x — некоторый объект, обозначаем одноэлементное множество, содержащее этот объект x. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Через B^A обозначаем, следуя [9], множество всех отображений из множества A в множество B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x):\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии f. Для всяких двух непустых множеств U и V

$$(\mathrm{bi})[U;V] \triangleq \{h \in V^U \mid (h^1(U) = V)\ \&\ (\forall x_1 \in U\ \forall x_2 \in U\ \ (h(x_1) = h(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2))\}$$

есть множество всех биекций U на V. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; пусть $\overline{1,n} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant n\}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ниже широко используется индексная форма записи функций (см. [1]); в частности, это касается кортежей: если $\mathbf{E}$ — множество и $m \in \mathbb{N}$, то $(e_i)_{i\in\overline{1,m}}:\ \overline{1,m} \longrightarrow \mathbf{E}$ понимается как функция из $\overline{1,m}$ в $\mathbf{E}$, для которой значение в точке $k \in \overline{1,m}$ есть элемент e_k, $e_k \in \mathbf{E}$.

Специальные семейства. В пределах настоящего пункта фиксируем множество I. Тогда

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{L})\ \&\ (I \in \mathcal{L})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{L}\ \ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L})\} \tag{1.1}$$

есть множество всех π-систем [10, с. 14] п/м I с «нулем» и «единицей». Соответственно

$$((\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\})\ \&\ ((\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid I \setminus L \in \mathcal{L}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\})$$

суть множества всех топологий I и всех алгебр п/м I. Если $\mathcal{L} \in \pi[I]$, $A \in \mathcal{P}(I)$ и $n \in \mathbb{N}$, то через $\Delta_n(A, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех кортежей $(L_i)_{i\in\overline{1,n}}:\ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{L}$, для каждого из которых

$$(A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i)\ \&\ (L_{i_1} \cap L_{i_2} = \varnothing\ \ \forall i_1 \in \overline{1,n}\ \forall i_2 \in \overline{1,n} \setminus \{i_1\});$$

тем самым введено множество всех разбиений A в сумму n множеств из $\mathcal{L}$. Заметим, что

$$\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \tag{1.2}$$

есть множество всех полуалгебр [11] п/м I. Каждая полуалгебра из множества (1.2) порождает алгебру п/м I по известному [11] правилу:

$$a_I^0(\mathcal{L}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N}:\ \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]\ \ \forall \mathcal{L} \in \Pi[I] \tag{1.3}$$

(разумеется, в (1.3) имеем наименьшую по вложению алгебру п/м I, еще содержащую исходную полуалгебру множеств). Отметим, что $(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I] \subset \pi[I] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$.

Элементы топологии. Всюду в дальнейшем называем компактом компактное хаусдорфово ТП; см. [12, с. 8]. Если (H, t) — ТП и $h \in H$, то $N_t^0(h) \triangleq \{G \in t \mid h \in G\}$ и $N_t(h) \triangleq \{S \in \mathcal{P}(H) \mid \exists G \in N_t^0(h):\ G \subset S\}$;

$$(h - \mathrm{bas})[t] \triangleq \{\mathcal{S} \in \mathcal{P}(N_t(h)) \mid \forall A \in N_t(h)\ \exists B \in \mathcal{S}:\ B \subset A\}.$$

Далее в пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества X и Y, а также топологии $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$. Тогда $C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1\ \ \forall G \in \tau_2\}$ есть множество всех (τ_1, τ_2)-непрерывных отображений из множества Y^X. Кроме того,

$C_{\mathrm{op}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid f^1(G) \in \tau_2 \quad \forall G \in \tau_1\}$ есть множество всех (τ_1,τ_2)-открытых отображений из Y^X (мы рассматриваем только непрерывные открытые отображения). Тогда

$$(\mathrm{Hom})[X;\tau_1;Y\tau_2] \overset{\triangle}{=} C_{\mathrm{op}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \cap (\mathrm{bi})[X;Y]$$

есть множество всех гомеоморфизмов ТП (X,τ_1) на ТП (Y,τ_2). $\square$

Фильтры. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Тогда

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbf{I})) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F}\, \forall B \in \mathcal{F})\ \& \\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\, \forall L \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \ \ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Кроме того, введем в рассмотрение следующее множество

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{1.5}$$

всевозможных у/ф множества $\mathbf{I}$. Определения (1.4), (1.5) соответствуют [13, гл. I] (имеются в виду фильтры и у/ф множества $\mathbf{I}$). Пусть, наконец,

$$\beta_0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbf{I})) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\, \forall B_2 \in \mathcal{B}\, \exists B_3 \in \mathcal{B} :\ B_3 \subset B_1 \cap B_2\}. \tag{1.6}$$

Элементы (1.6) — базы фильтров множества $\mathbf{I}$. Разумеется, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \subset \mathfrak{F}[\mathbf{I}] \subset \beta_0[\mathbf{I}]$. При этом

$$(\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \overset{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists B \in \mathcal{B} :\ B \subset F\} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{I}]. \tag{1.7}$$

В (1.7) имеем обычную операцию порождения фильтра соответствующей базой (см. [13, гл. I]).

Заметим, что $(\mathbf{I} - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} \{S \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid x \in S\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \quad \forall x \in \mathbf{I}$. С учетом этого введем отображение

$$(\mathbf{I} - \mathrm{ult})[\cdot] \overset{\triangle}{=} ((\mathbf{I} - \mathrm{ult})[x])_{x \in \mathbf{I}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]^{\mathbf{I}}. \tag{1.8}$$

В (1.8) имеем хорошо известное правило погружения исходного множества $\mathbf{I}$ в пространство у/ф этого множества.

§ 2. Общие обозначения и определения, 2

В настоящем разделе приведена краткая сводка понятий [14], относящихся к случаю, когда измеримая структура множества (понимаемая широко) задается π-системой с «нулем» и «единицей». В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество I и π-систему $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Пару $(I,\mathcal{I})$ именуем [14] мультипликативным пространством. Тогда

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F}\, \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\, \forall L \in \mathcal{I} \\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\}\end{gathered} \tag{2.1}$$

есть множество всех фильтров мультипликативного пространства $(I,\mathcal{I})$; в этой связи см. [15, с. 271]. Элементы множества (2.1) называем $\mathcal{I}$-фильтрами, а элементы множества

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{2.2}$$

(максимальные $\mathcal{I}$-фильтры) — у/ф пространства $(I,\mathcal{I})$, или $\mathcal{I}$-у/ф. При этом $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) :\ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ (см., в частности, [16, с. 29]). Легко видеть, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \varnothing$. В связи с (2.1), (2.2) см. [14]. Сейчас напомним только один традиционный вариант оснащения топологией (обычно используемый, правда, в случае ИП с алгеброй множеств), полагая, что $\Phi_{\mathcal{I}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\} \ \ \forall L \in \mathcal{I}$. Тогда семейство

$$(\mathbb{UF})[I;\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L) :\ L \in \mathcal{I}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})] \tag{2.3}$$

является, в частности, базой топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})]$ (см. [14, (5.13)]), определяемой в виде семейства всех объединений подсемейств семейства (2.3). Отметим, что

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]) \tag{2.4}$$

есть хаусдорфово [15] ТП. В связи с различными частными случаями (см. [14]) отметим только тот факт, что при $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[I]$ ТП (2.4) является компактом, то есть компактным хаусдорфовым ТП; в этой связи см. [11, с. 26], [14, предложение 9.3].

Возвращаясь к общему случаю $\mathcal{I} \in \pi[E]$, отметим, что $\forall\, \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}|\mathcal{H}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \Phi_{\mathcal{I}}(H). \tag{2.5}$$

Пусть $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}) \mid \bigcap\limits_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\right\}$ (введено множество свободных $\mathcal{I}$-у/ф).

§ 3. Продолжение фильтров и ультрафильтров

В настоящем разделе основной вопрос связывается с выяснением того, как преобразуется ТП (2.4) при замене полуалгебры множеств на алгебру, порожденную данной полуалгеброй (имеется в виду ситуация, когда $\mathcal{I}$ в (2.4) является полуалгеброй или алгеброй множеств). Однако сначала мы коснемся одной естественной процедуры, связанной с построением фильтра посредством соответствующей базы.

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E. Кроме того, пусть

$$\beta^0_{\mathcal{E}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \beta_0[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{B} \in \beta_0[E] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{E}\} \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]. \tag{3.1}$$

В (3.1) мы рассматриваем базы фильтров, содержащиеся в той или иной π-системе. При этом

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \subset \beta^0_{\mathcal{E}}[E] \subset \beta_0[E] \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]. \tag{3.2}$$

Базы из множества (3.1) порождают фильтры соответствующей π-системы по очень простому правилу: если $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{E}}[E]$, то

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{E} \mid \exists\, B \in \mathcal{B}:\ B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}). \tag{3.3}$$

Пусть $(\mathcal{B} - \mathrm{set})[E|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{E} \mid L \cap B \neq \varnothing \ \ \forall\, B \in \mathcal{B}\}\ \forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]\ \forall\, \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Заметим в связи с построением у/ф посредством баз, что, как легко проверить, $\forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]$

$$\begin{gathered}\beta^{00}_{\mathcal{E}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{E}}[E] \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{E}] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})\right\} = \\ = \left\{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{E}}[E] \mid \forall\, L \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[E|\mathcal{E}]\ \exists\, B \in \mathcal{B}:\ B \subset L\right\}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

В связи с (3.2) полезно выделить один важный частный случай преобразования на основе (3.3); см. в этой связи [16, с. 43]. Удобно ввести соглашение: если $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, то

$$\psi[\mathcal{E}; \mathcal{C}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{E} \mid \exists\, C \in \mathcal{C}:\ C \subset L\}. \tag{3.5}$$

В частности, из (3.5) следует [16, с. 43], что $\forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]\ \forall\, \mathcal{H} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E})\ \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{H})$

$$\psi[\mathcal{E}; \mathcal{F}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}). \tag{3.6}$$

В связи с (3.6) отметим следующее обстоятельство, связанное с (3.3): если $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и $\mathcal{H} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E})$, то согласно (3.1), (3.2)

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{H}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{H}) \subset \beta^0_{\mathcal{H}}[E] \subset \beta^0_{\mathcal{E}}[E], \tag{3.7}$$

а потому (см. (3.3), (3.5)) имеем очевидную систему равенств

$$\psi[\mathcal{E};\mathcal{F}] = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{E}] \ \ \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{H}). \tag{3.8}$$

Теперь (3.6) получается непосредственной комбинацией (3.3), (3.7) и (3.8). Итак, в (3.6) имеем вариант общей процедуры (3.3). Легко видеть, что [16, (2.4.4)]

$$\psi[\mathcal{E};\mathcal{F}] \cap \mathcal{H} = \mathcal{F} \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]\ \forall\, \mathcal{H} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E})\ \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{H}). \tag{3.9}$$

С учетом (3.9) легко проверяется, что (см. [16, (2.4.5)])

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{H}) = \{\mathcal{F} \cap \mathcal{H} :\ \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})\} \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]\ \forall\, \mathcal{H} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E}). \tag{3.10}$$

Отметим еще одно общее свойство [16, с. 43]: $\forall\, \mathcal{E} \in \pi[E]\ \forall\, \mathcal{H} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E})\ \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{H})\ \exists\, \tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}):$

$$\tilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{H} = \mathcal{U}. \tag{3.11}$$

Итак, если $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и $\mathcal{H} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{E})$, то $\mathcal{H}$-у/ф «продолжается» до $\mathcal{E}$-у/ф; возможна, однако, ситуация, когда $\mathcal{E}$-у/ф «не сужается» до $\mathcal{H}$-у/ф (см. [14, с. 124-125]). Вместе с тем имеется важный частный случай, когда упомянутое свойство «сужения» имеет место: речь идет о случае, когда $\mathcal{H} \in \Pi[E]$ и $\mathcal{E} = a_E^0(\mathcal{H})$. Этот вариант продолжения $\mathcal{H}$-у/ф до $\mathcal{E}$-у/ф будет основным в построениях следующего раздела.

§ 4. Продолжение ультрафильтров полуалгебры множеств

Всюду в настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mathcal{A} \triangleq a_E^0(\mathcal{L})$. Тогда, в частности, $\mathcal{A} \in \pi[E]$ и $\mathcal{L} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Поэтому все положения предыдущего раздела справедливы в рассматриваемом случае. В частности (см. (3.5), (3.6)),

$$\psi[\mathcal{A};\mathcal{F}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, F \in \mathcal{F} :\ F \subset A\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A}) \ \ \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{4.1}$$

При этом, согласно (3.9), имеем следующее свойство $\mathcal{L}$-фильтров (4.1):

$$\psi[\mathcal{A};\mathcal{F}] \cap \mathcal{L} = \mathcal{F} \ \ \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{4.2}$$

Свойство (4.2) как раз и позволяет рассматривать (4.1) как процедуру продолжения $\mathcal{L}$-фильтров. Из (3.10) следует, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{F} \cap \mathcal{L} :\ \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A})\}$. Наконец, из (3.11) вытекает полезное следствие

$$\forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists\, \tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) :\ \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{L}. \tag{4.3}$$

Напомним одно известное [11, с. 26] свойство $\mathcal{A}$-у/ф: если $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, $U_1 \in \mathcal{A}$ и $U_2 \in \mathcal{A}$, то

$$(U_1 \cup U_2 \in \mathfrak{U}) \Longrightarrow ((U_1 \in \mathfrak{U})\ \vee\ (U_2 \in \mathfrak{U})). \tag{4.4}$$

Разумеется, с использованием индукции (4.4) распространяется на случай произвольных конечных подсемейств $\mathcal{A}$; при этом полезно учитывать вложение $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. Легко проверяется [17, предложение 10.5.6], что

$$\psi[\mathcal{A};\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \tag{4.5}$$

см. в этой связи (4.3), (4.4). Отметим, наконец, что (в рассматриваемом сейчас случае $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mathcal{A} = a_E^0(\mathcal{L})$)

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \tag{4.6}$$

(в связи с доказательством (4.6) см. [17, предложение 10.5.8]; см. также подобные построения в [20, с. 283, 284]). Из (4.3) и (4.6) получаем равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} :\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\}$; данное положение можно существенно дополнить, полагая, как обычно, что

$$\psi[\mathcal{A};\cdot] \triangleq (\psi[\mathcal{A};\mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}, \tag{4.7}$$

и получая отображение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$; см. (4.5). Справедливо следующее

Предложение 4.1. $\psi[\mathcal{A};\cdot] \in (\mathrm{bi})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})]$.

Доказательства требует, по существу, только свойство инъективности оператора (4.7), которое, однако, непосредственно следует из (4.2) (см. также (2.2)). В связи с данным предложением полезно отметить и тот практически очевидный факт, что

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{L})_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})} \in (\mathrm{bi})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A});\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{4.8}$$

есть биекция, обратная к (4.7): если обозначить биекции (4.7) и (4.8) через λ и α соответственно, то $(\lambda(\alpha(\mathfrak{U})) = \mathfrak{U} \ \ \forall \mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}))$ & $(\alpha(\lambda(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$.

Предложение 4.2. *Отображение* (4.7) *непрерывно:* $\psi[\mathcal{A};\cdot] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathcal{L}$-у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, получая (см. (4.5)) $\mathcal{A}$-у/ф

$$\mathcal{W} \overset{\triangle}{=} \psi[\mathcal{A};\mathcal{V}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}).$$

Заметим, что $\mathfrak{W} \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{A}}(L) : \ L \in \mathcal{W}\}$ есть локальная база топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$ в точке $\mathcal{W}$, а $\mathfrak{V} \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : \ L \in \mathcal{V}\}$ — локальная база топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ в точке $\mathcal{V}$. Заметим, кроме того, что согласно (4.2)

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{L} = \mathcal{V}. \tag{4.9}$$

Выберем произвольно $W \in \mathcal{W}$ и рассмотрим множество

$$\Phi_{\mathcal{A}}(W) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \mid W \in \mathcal{U}\}. \tag{4.10}$$

При этом, в частности, $W \in \mathcal{A}$, а потому, согласно (1.3), можно указать $n \in \mathbb{N}$ так, что $\Delta_n(W,\mathcal{L}) \neq \varnothing$. С учетом этого выберем произвольно $(W_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \Delta_n(W,\mathcal{L})$. Используя (4.4), можно показать, что для некоторого $\nu \in \overline{1,n}$ непременно имеет место $W_\nu \in \mathcal{W}$ (используем (4.4), математическую индукцию и вложение $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$), а тогда согласно (4.9) $W_\nu \in \mathcal{V}$. При этом

$$\Phi_{\mathcal{L}}(W_\nu) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid W_\nu \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{V}. \tag{4.11}$$

Выберем произвольно $\mathcal{F} \in \Phi_{\mathcal{L}}(W_\nu)$, получая для $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ включение

$$W_\nu \in \mathcal{F}. \tag{4.12}$$

Тогда $\mathcal{A}$-у/ф $\mathfrak{F} \overset{\triangle}{=} \psi[\mathcal{A};\mathcal{F}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ определяется посредством (4.1). С учетом (4.12) имеем, что множество $W \in \mathcal{A}$ таково, что $\exists\, F \in \mathcal{F} : \ F \subset W$. Стало быть, $W \in \mathfrak{F}$ (см. (4.1)). Поскольку $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ согласно (4.5), имеем из (4.10) включение $\mathfrak{F} \in \Phi_{\mathcal{A}}(W)$. Коль скоро и выбор $\mathcal{F}$ был произвольным, установлено, что

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]^1(\Phi_{\mathcal{L}}(W_\nu)) \subset \Phi_{\mathcal{A}}(W). \tag{4.13}$$

Поскольку выбор W также был произвольным, установлено, что (см. (4.11), (4.13)) $\forall\, \mathbb{A} \in \mathfrak{W}\ \exists\, \mathbb{B} \in \mathfrak{V} : \ \psi[\mathcal{A};\cdot]^1(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$. Это означает, что отображение $\psi[\mathcal{A};\cdot]$ непрерывно в точке $\mathcal{V}$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, предложение доказано. $\square$

Итак, оператор продолжения $\mathcal{L}$-у/ф до $\mathcal{A}$-у/ф (см. (4.5)) непрерывен в смысле ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]),\ (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]), \tag{4.14}$$

каждое из которых является вариантом ТП (2.4).

Предложение 4.3. *Отображение* $\psi[\mathcal{A};\cdot]$ *открыто:* $\psi[\mathcal{A};\cdot] \in C_{\mathrm{op}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего напомним, что

$$C_{\mathrm{op}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E],\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])=\{f\in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E],\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])\mid f^1(G)\in\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]\ \ \forall\,G\in\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\}. \tag{4.15}$$

Отметим, что в силу предложения 4.2 имеет место свойство

$$\varphi\overset{\triangle}{=}\psi[\mathcal{A};\cdot]\in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E],\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]). \tag{4.16}$$

Выберем произвольно $\Omega\in\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Рассмотрим множество-образ $\varphi^1(\Omega)$. Пусть $\mathcal{W}\in\varphi^1(\Omega)$, а $\mathcal{V}\in\Omega$ реализует $\mathcal{W}$ посредством равенства $\mathcal{W}=\varphi(\mathcal{V})$. При этом, конечно,

$$(\mathcal{V}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))\ \&\ (\mathcal{W}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})). \tag{4.17}$$

По выбору Ω для некоторого множества $V\in\mathcal{V}$ имеем вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V)\subset\Omega. \tag{4.18}$$

Заметим, что $\mathcal{W}=\psi[\mathcal{A};\mathcal{V}]$, а потому, согласно (4.2), $\mathcal{V}=\mathcal{W}\cap\mathcal{L}$. При этом $\mathcal{V}\subset\mathcal{W}$, а тогда $V\in\mathcal{W}$ и определено множество

$$\Phi_{\mathcal{A}}(V)=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\mid V\in\mathcal{U}\},$$

причем $\mathcal{W}\in\Phi_{\mathcal{A}}(V)$. Выберем теперь произвольный $\mathcal{A}$-у/ф $\mathcal{F}\in\Phi_{\mathcal{A}}(V)$; при этом $\mathcal{F}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и $V\in\mathcal{F}$. Напомним, что согласно (4.6)

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{L}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{4.19}$$

Кроме того (см. предложение 4.1, (4.8)), $\varphi(\mathcal{F}\cap\mathcal{L})=\mathcal{F}$. Заметим, что, поскольку $V\in\mathcal{L}$ (см. (4.17)), справедливо включение $V\in\mathcal{F}\cap\mathcal{L}$ и (см. (4.19)) $\mathcal{F}\cap\mathcal{L}\in\Phi_{\mathcal{L}}(V)$. С учетом (4.18) имеем теперь включение $\mathcal{F}\cap\mathcal{L}\in\Omega$, откуда, в свою очередь, следует, что

$$\mathcal{F}=\varphi(\mathcal{F}\cap\mathcal{L})\in\varphi^1(\Omega). \tag{4.20}$$

Поскольку выбор $\mathcal{F}$ был произвольным, установлено вложение $\Phi_{\mathcal{A}}(V)\subset\varphi^1(\Omega)$. Следовательно, $\exists\,A\in\mathcal{W}:\ \Phi_{\mathcal{A}}(A)\subset\varphi^1(\Omega)$. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\forall\,\mathcal{U}\in\varphi^1(\Omega)\ \exists\,A\in\mathcal{U}:\ \Phi_{\mathcal{A}}(A)\subset\varphi^1(\Omega)$. Это означает (см. определение топологии в (2.4)), что $\varphi^1(\Omega)\in\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$. Коль скоро и выбор Ω был произвольным, установлено, что $\varphi^1(G)\in\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]\ \ \forall\,G\in\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. С учетом (4.16) получаем требуемое утверждение (см. (4.15)). □

Из предложений 4.1 и 4.2 вытекает очевидная теперь

Теорема 4.1. *Оператор* (4.7) *есть гомеоморфизм ТП* (4.14):

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]\in(\mathrm{Hom})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A});\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]].$$

Итак, ТП (4.14) гомеоморфны. Поскольку (см. § 3) второе в (4.14) ТП есть компакт, то и первое (в (4.14)) ТП — компакт. Итак, установлено, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{4.21}$$

есть непустой компакт. Это свойство будет использоваться в дальнейшем для целей представления МП в терминах непрерывного образа множества допустимых обобщенных элементов.

§ 5. Предел по ультрафильтру мультипликативного пространства

Всюду в пределах настоящего раздела полагаем, что

$$\mathcal{L} \in \pi[E]. \tag{5.1}$$

Итак, $(E, \mathcal{L})$ — (непустое) мультипликативное пространство. Кроме того, всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество $\mathbf{H}$ и $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, получая ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. Наконец, фиксируем далее отображение $\Psi \in \mathbf{H}^E$. В дальнейшем элементы E исполняют роль некоторых «управлений» (точнее — наших действий), а элементы $\mathbf{H}$ — роль реакций на «управления»; Ψ — своеобразный оператор «системы», сопоставляющий «управлению» состояние из множества $\mathbf{H}$. Мы занимаемся далее вопросами достижимости упомянутых состояний в условиях тех или иных ограничений. При этом Ψ — оператор из мультипликативного пространства в топологическое. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то полагаем, что $\Psi^1[\mathcal{E}] \triangleq \{\Psi^1(\Sigma) : \ \Sigma \in \mathcal{E}\}$; семейство $\Psi^1[\mathcal{E}]$ интерпретируется как образ семейства $\mathcal{E}$. Ниже используется понятие сходимости базы фильтра в ТП, принятое в [13, гл. I]: $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{H}]\ \forall h \in \mathbf{H}$

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} h) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(h) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \tag{5.2}$$

Мы дополняем (5.2) следующим хорошо известным [13, гл. I] свойством:

$$\Psi^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[\mathbf{H}] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]. \tag{5.3}$$

Свойство (5.3) позволяет использовать в (5.2) образ базы фильтра E в качестве базы фильтра $\mathbf{H}$. Отметим, наконец, и то известное [13, гл. I] свойство, что $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]$

$$((E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \Longrightarrow ((\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{H}]). \tag{5.4}$$

Заметим, что в силу (3.1), (3.2) и (3.7) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, а потому (см. (5.3))

$$\Psi^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{H}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{5.5}$$

Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее условие локальной измеримости отображения Ψ.

Условие 5.1. $\forall y \in \mathbf{H}\ \exists \mathcal{Y} \in (y - \mathrm{bas})[\tau] : \ \Psi^{-1}(Y) \in \mathcal{L} \ \ \forall Y \in \mathcal{Y}$.

Предложение 5.1. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}[E]$ *и* $y \in \mathbf{H}$, *то*

$$((\Psi^1[\tilde{\mathcal{F}}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y)\ \&\ (\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \cap \mathcal{L})) \Longrightarrow (\Psi^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y). \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (5.6). Тогда $N_\tau(y) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\tilde{\mathcal{F}}]]$. При этом [14, (3.9)]

$$\Psi^{-1}(Y) \in \tilde{\mathcal{F}} \ \ \forall \mathcal{Y} \in (y - \mathrm{bas})[\tau]\ \forall Y \in \mathcal{Y}. \tag{5.7}$$

С учетом условия 5.1 подберем локальную базу $\beta \in (y - \mathrm{bas})[\tau]$ со свойством

$$\Psi^{-1}(B) \in \mathcal{L} \ \ \forall B \in \beta. \tag{5.8}$$

Как следствие (5.7), (5.8) из представления $\mathcal{F}$ получаем свойство

$$\Psi^{-1}(B) \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \beta. \tag{5.9}$$

Используя (5.9) и [14, (3.9)], получаем сходимость $\Psi^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y$ (мы учли здесь (5.5) и тот очевидный факт, что $\mathcal{F} \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{F}]$). □

Предложение 5.2. *Если* $(\mathbf{H}, \tau)$ *есть компактное* [15, с. 195] *ТП, то*

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists\, h \in \mathbf{H}:\ \Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h. \tag{5.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу компактности $(\mathbf{H}, \tau)$ имеем, что [18, с. 231]

$$\forall\, \mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{H}]\ \exists\, h \in \mathbf{H}:\ \mathfrak{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} h. \tag{5.11}$$

Выберем произвольный $\mathcal{L}$-у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда [14, (5.19)] для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ справедливо равенство

$$\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \mathcal{L}. \tag{5.12}$$

С учетом (5.4) легко проверяется, что $\mathfrak{W} \overset{\triangle}{=} (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{W}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{H}]$, а потому, согласно (5.11), имеем для некоторого $q \in \mathbf{H}$ сходимость

$$\mathfrak{W} \overset{\tau}{\Longrightarrow} q. \tag{5.13}$$

Поскольку $(\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathfrak{W}] = \mathfrak{W}$, из (5.2) и (5.13) следует вложение $N_\tau(q) \subset \mathfrak{W}$. Из определения у/ф $\mathfrak{W}$ имеем свойство сходимости

$$\Psi^1[\mathcal{W}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} q \tag{5.14}$$

(учитываем, что согласно (5.3) $\Psi^1[\mathcal{W}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$). При этом, в частности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}[E]$ и $q \in \mathbf{H}$, а тогда согласно предложению 5.1

$$\Big(\Big(\Psi^1[\mathcal{W}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} q\Big)\ \&\ (\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \mathcal{L})\Big) \Longrightarrow \Big(\Psi^1[\mathcal{V}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} q\Big).$$

С учетом (5.12) и (5.14) имеем теперь свойство $\Psi^1[\mathcal{V}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} q$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, (5.10) установлено. □

Следствие 5.1. *Если* $(\mathbf{H}, \tau)$ *есть компакт, то* $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists!\, h \in \mathbf{H}:\ \Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h.$

Доказательство очевидно (см. [13, гл. I]) и поэтому опущено (по соображениям объема).

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее

Условие 5.2. *Топологическое пространство* $(\mathbf{H}, \tau)$ *является компактом.*

С учетом следствия 5.1 получаем теперь, что $\exists!\, f \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}:\ \Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} f(\mathcal{U})\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (мы учитываем здесь и тот факт, что (см. раздел 2) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$). Таким образом, корректно следующее

Определение 5.1. Полагаем далее, что отображение $\varphi \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ определяется тем условием, что $\Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

В связи с определением 5.1 полезно напомнить некоторые положения [14, § 11], касающиеся оператора предельного перехода на пространстве $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. В этой связи отметим, что согласно (5.3) имеем из определений § 3 свойство: $\Psi^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Поэтому (5.2) определяет, в частности, условия сходимости образов у/ф множества $E:\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\ \forall\, h \in \mathbf{H}$

$$\Big(\Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\Big) \Longleftrightarrow \big(N_\tau(h) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]]\big).$$

При этом (см. условие 5.2) определен оператор $\mathfrak{H}[\tau] \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}$, для которого

$$\Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{5.15}$$

Свойства $\mathfrak{H}[\tau]$ (5.15) см. в [14, § 11]. Сейчас отметим только тот факт, что (см. (1.8))

$$\Psi = \mathfrak{H}[\tau] \circ (E - \mathrm{ult})[\cdot]. \tag{5.16}$$

Предложение 5.3. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ *и* $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, *то* $(\mathcal{U} = \mathcal{F} \cap \mathcal{L}) \Longrightarrow (\varphi(\mathcal{U}) = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{F} \cap \mathcal{L}$. С учетом свойства [14, (11.11)] имеем импликацию

$$(\Psi^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U})) \Longrightarrow (\varphi(\mathcal{U}) = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F})). \tag{5.17}$$

При этом $\Psi^1[\mathcal{U}] \subset \Psi^1[\mathcal{F}]$, откуда следует, что $(\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]] \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{F}]]$. С учетом (5.2) и определения 5.1 получаем, что $\Psi^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U})$, а потому, согласно (5.17), имеем равенство $\varphi(\mathcal{U}) = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{F})$. □

Предложение 5.4. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ *и* $L \in \mathcal{U}$, *то* $\varphi(\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(\Psi^1(L), \tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 5.1 $\Psi^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U})$, а потому (см. (5.2))

$$N_\tau(\varphi(\mathcal{U})) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]]. \tag{5.18}$$

Пусть $\Lambda \in N_\tau(\varphi(\mathcal{U}))$. Тогда согласно (5.18) имеем включение

$$\Lambda \in (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]]. \tag{5.19}$$

С другой стороны, $\Psi^1(L) \in \Psi^1[\mathcal{U}]$ по выбору L, а тогда $\Psi^1(L) \in (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]]$, где (см. (1.7)) $(\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}]$. Поэтому (см. (1.4), (5.19)) $\Lambda \cap \Psi^1(L) \neq \varnothing$. Поскольку выбор Λ был произвольным, установлено, что $H \cap \Psi^1(L) \neq \varnothing \ \ \forall H \in N_\tau(\varphi(\mathcal{U}))$.

Это означает, что $\varphi(\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(\Psi^1(L), \tau)$. □

Предложение 5.5. *Оператор* φ *непрерывен в смысле топологий* $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ *и* τ :

$$\varphi \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E], \mathbf{H}, \tau). \tag{5.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Покажем, что оператор φ непрерывен в точке $\mathcal{U}$. Для этого заметим, прежде всего, что по определению ТП (2.4) имеем (см. [14, (5.16)]) свойство

$$\mathfrak{U} \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : \ L \in \mathcal{U}\} \in (\mathcal{U} - \mathrm{bas})[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{5.21}$$

С другой стороны, в силу условия 5.2 замкнутые окрестности точки $\varphi(\mathcal{U})$ также образуют локальную базу ТП $(\mathbf{H}, \tau)$; см. [12, с. 15]. Согласно определению 5.1

$$\Psi^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U}). \tag{5.22}$$

При этом $\mathcal{H} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\Psi^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}]$, а потому из (5.2) и (5.22) вытекает вложение

$$N_\tau(\varphi(\mathcal{U})) \subset \mathcal{H}, \tag{5.23}$$

причем $\Psi^1[\mathcal{U}] \subset \mathcal{H}$. Выберем произвольно $\mathbf{N} \in N_\tau(\varphi(\mathcal{U}))$, после чего подберем окрестность $\mathbf{F} \in N_\tau(\varphi(\mathcal{U}))$, замкнутую в $(\mathbf{H}, \tau)$ и такую, что $\mathbf{F} \subset \mathbf{N}$. С учетом (5.23) имеем включение $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$, а потому для некоторого множества $U \in \mathcal{U}$

$$\Psi^1(U) \subset \mathbf{F}, \tag{5.24}$$

где (см. (5.21)) $\Phi_{\mathcal{L}}(U) \in \mathfrak{U}$ и, в частности, $\Phi_{\mathcal{L}}(U) \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathcal{U})$. Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(U)$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $U \in \mathcal{V}$. Согласно предложению 5.4 $\varphi(\mathcal{V}) \in \mathrm{cl}(\Psi^1(U), \tau)$, откуда (см. (5.24)) в силу замкнутости $\mathbf{F}$ имеем включение $\varphi(\mathcal{V}) \in \mathbf{F}$. Тем более $\varphi(\mathcal{V}) \in \mathbf{N}$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, установлено, что $\varphi^1(\Phi_{\mathcal{L}}(U)) \subset \mathbf{N}$. Однако и выбор $\mathbf{N}$ был произвольным, а потому установлено, что $\forall A \in N_\tau(\varphi(\mathcal{U})) \ \exists B \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathcal{U}) : \ \varphi^1(B) \subset A$.

Это означает, что оператор φ непрерывен в точке $\mathcal{U}$. Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, установлена «глобальная» непрерывность оператора φ в смысле ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$ и $(\mathbf{H}, \tau)$. □

Полагаем до конца настоящего раздела, что π-система $\mathcal{L}$ (5.1) удовлетворяет следующему условию.

Условие 5.3. $\forall L \in \mathcal{L}\ \forall x \in E \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{L}:\ (x \in \Lambda)\ \&\ (\Lambda \cap L = \varnothing)$.

В этом случае имеем [14] очевидное свойство: $(E-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E$. С учетом этого получаем, что

$$(\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} ((E-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L})_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E \tag{5.25}$$

(вложение точек E в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в виде тривиальных у/ф). При этом, как легко видеть,

$$(\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^{-1}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})) = \bigcap_{L \in \mathcal{E}} L\ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Кроме того, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}((\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$. Итак, тривиальные у/ф образуют множество, всюду плотное в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$. При этом $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \cup \{(E-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L}:\ x \in E\} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \cap \{(E-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L}:\ x \in E\} = \varnothing$. Заметим, что $(\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^1(E) = \{(E-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L}:\ x \in E\}$.

Предложение 5.6. *Справедливо равенство* $\varphi \circ (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] = \Psi$.

Доказательство. Выберем произвольно точку $x_* \in E$. Тогда

$$(\varphi \circ (\mathrm{tr})[\mathcal{L}])(x_*) = \varphi((E-\mathrm{ult})[x_*] \cap \mathcal{L}) \in \mathbf{H} \tag{5.26}$$

и $\Psi(x_*) \in \mathbf{H}$. Из (1.8), (5.16), (5.25) и предложения 5.3 следует цепочка равенств

$$\varphi((E-\mathrm{ult})[x_*] \cap \mathcal{L}) = \mathfrak{H}[\tau]((E-\mathrm{ult})[x_*]) = (\mathfrak{H}[\tau] \circ (E-\mathrm{ult})[\cdot])(x_*) = \Psi(x_*).$$

С учетом (5.26) получаем, как следствие, равенство $(\varphi \circ (\mathrm{tr})[\mathcal{L}])(x_*) = \Psi(x_*)$. Поскольку выбор x_* был произвольным, предложение доказано. □

Далее, мы введем в рассмотрение МП в компакте $(\mathbf{H}, \tau)$, а также МП в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$. Для этого будем использовать определение 3.1 работы [14]: если $(Y, \mathbf{t})$ есть ТП, $f \in Y^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то в соответствии с [14, определение 3.1] $(\mathbf{as})[E; Y; \mathbf{t}; f; \mathcal{E}]$ есть МП в ТП $(Y, \mathbf{t})$, соответствующее семейству $\mathcal{E}$, используемому в качестве ограничений асимптотического характера. Нам потребуются варианты данного определения [14, с. 119] в следующих двух случаях:

$$(Y, \mathbf{t}) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]),\ (Y, \mathbf{t}) = (\mathbf{H}, \tau);$$

соответственно, в качестве f будут использоваться отображения $(\mathrm{tr})[\mathcal{L}]$ и Ψ.

Предложение 5.7. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\varphi^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}]) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}].$$

Доказательство. Используем принятые в [14, с. 117] обозначения для направленностей, понимая последние как триплеты. Следуя [14, (2.7)], напомним определение фильтра, ассоциированного с направленностью в E : если $(D, \preceq, f)$ есть направленность в множестве E ($(D, \preceq)$ — непустое направленное множество, $f \in E^D$), то

$$(E-\mathrm{ass})[D; \preceq; f] \stackrel{\triangle}{=} \{M \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, m \in D\ \forall\, n \in D\ \ (m \preceq n) \Longrightarrow (f(n) \in M)\} \in \mathfrak{F}[E].$$

Выберем произвольно $h_* \in \varphi^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}])$ и подберем $\mathcal{L}$-у/ф

$$\mathcal{U} \in (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}],$$

для которого $h_* = \varphi(\mathcal{U})$. Тогда [14, с. 119] $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть у/ф такой, что для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \rho)$ в множестве E

$$(\mathcal{E} \subset (E-\mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \rho])\ \&\ ((\mathbb{D}, \sqsubseteq, (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ \rho) \xrightarrow{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]} \mathcal{U}). \tag{5.27}$$

Отметим, что в силу предложения 5.5 и (5.27) имеем [15, с. 90] сходимость

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \varphi \circ (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ \rho) \xrightarrow{\tau} h_*.$$

С учетом этого и предложения 5.6 получаем (см. (5.27)), что

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \rho]) \ \& \ ((\mathbb{D}, \sqsubseteq, \Psi \circ \rho) \xrightarrow{\tau} h_*).$$

Это означает (см. [14, с. 119]) справедливость включения $h_* \in (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}]$, чем и завершается доказательство требуемого утверждения. □

§ 6. Компактификация в классе ультрафильтров полуалгебры множеств

Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\mathcal{L} \in \Pi[E], \tag{6.1}$$

получая измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. В связи с (6.1) отметим, что при данном условии действительно реализуется частный случай конструкции § 5. В самом деле, из (6.1) вытекает (5.1) (см. (1.2)). Справедливо также условие 5.3; этот факт вытекает из (1.2). Напомним, что условия 5.1 и 5.2 предполагаются выполненными. Поэтому в рассматриваемом случае (6.1) справедливы все положения § 5. В частности, мы следуем далее определению 5.1 и получаем свойства, реализуемые в предложениях 5.5 (см. (5.20)) и 5.6. Эти свойства существенны в дальнейшем. К этому следует добавить и то, что в (4.21) реализуется непустой компакт. В частности, имеем, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], (\mathrm{tr})[\mathcal{L}], \varphi) \tag{6.2}$$

есть $(\mathbf{H}, \tau, \Psi)$-компактификатор в смысле определения 3.1 работы [19] (см. в этой связи предложения 5.5 и 5.6, а также (5.25)). Поэтому (см. [19, следствие 3.1])

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}] = \varphi^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}]) \ \ \forall \, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)), \tag{6.3}$$

см. также [19, предложение 3.2]. В связи с (6.3) приобретает особую актуальность вопрос о представлении МП $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}]$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Это удается сделать при некоторых ограничениях на выбор $\mathcal{E}$. Для получения требуемого представления вспомогательных МП отметим сначала следующее

Предложение 6.1. *Если $L \in \mathcal{L}$, то множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ замкнуто в компакте $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение алгебру $\mathcal{A} \overset{\triangle}{=} a_E^0(\mathcal{L}) \in (\mathrm{alg})[E]$ (см. § 5). Тогда, в частности, $L \in \mathcal{A}$, а потому (см. [20, замечание 3.3]) множество $\Phi_{\mathcal{A}}(L)$ замкнуто в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$. С другой стороны, как нетрудно проверить,

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} : \ \mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{A}}(L)\}. \tag{6.4}$$

Напомним некоторые положения § 5, связанные со свойством биекций (4.7), (4.8). Для краткости обозначим биекцию (4.7) через λ, а биекцию (4.8) — через α. Тогда биекция α обратна к λ, причем согласно теореме 4.1

$$\lambda \in (\mathrm{Hom})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]],$$

а потому множество $\lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L))$ замкнуто в топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. С другой стороны, из (6.4) вытекает равенство

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L)). \tag{6.5}$$

В самом деле, поскольку α есть биекция, обратная к λ, то

$$\{\alpha(\mathcal{U})\} = \lambda^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \tag{6.6}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$. Тогда из (6.4) следует по определению α, что для некоторого у/ф $\tilde{\mathcal{V}} \in \Phi_{\mathcal{A}}(L)$ справедлива цепочка равенств $\mathcal{V} = \tilde{\mathcal{V}} \cap \mathcal{L} = \alpha(\tilde{\mathcal{V}})$, откуда, согласно (6.6), имеем включение $\mathcal{V} \in \lambda^{-1}(\{\tilde{\mathcal{V}}\})$, где $\lambda^{-1}(\{\tilde{\mathcal{V}}\}) \subset \lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L))$ по выбору $\tilde{\mathcal{V}}$. В итоге, $\mathcal{V} \in \lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L))$, чем завершается проверка вложения

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L)). \tag{6.7}$$

Пусть теперь $\mathcal{W} \in \lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L))$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\lambda(\mathcal{W}) \in \Phi_{\mathcal{A}}(L)$. При этом

$$\mathcal{W} = \alpha(\lambda(\mathcal{W})) = \lambda(\mathcal{W}) \cap \mathcal{L} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L) \tag{6.8}$$

в силу (6.4) (действительно, из (6.4) следует, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)\ \ \forall \mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{A}}(L)$). Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено (см. (6.8)) вложение $\lambda^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L)) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L)$, откуда с учетом (6.7) следует (6.5). Но тогда множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ замкнуто в топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ (см. замечание перед (6.5)). □

Напомним, что согласно (2.5) справедлива следующая система равенств:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}\ \ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{6.9}$$

Предложение 6.2. *Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}). \tag{6.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольный у/ф $\mathcal{V} \in (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}]$. Тогда (см. [14, определение 3.1]) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторой направленности $(D, \preceq, g)$ в множестве E выполняются условия

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[D; \preceq; g])\ \&\ \left((D, \preceq, (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ g) \overset{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}{\longrightarrow} \mathcal{V}\right) \tag{6.11}$$

(см. также [14, с. 117]; здесь и ниже обозначения, связанные со сходимостью по Мору-Смиту и конструкцией фильтра, ассоциированного с направленностью, соответствуют [14, с. 117] и используются без дополнительных пояснений). Выберем произвольно $M \in \mathcal{E}$, получая, в частности, множество $M \in \mathcal{L}$. При этом, согласно предложению 6.1, множество

$$\Phi_{\mathcal{L}}(M) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid M \in \mathcal{U}\} \tag{6.12}$$

замкнуто в топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. С другой стороны, из (6.11) вытекает, что $M \in (E - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]$. Поэтому (см. [14, (2.7)]) для некоторого $d_1 \in D$ имеем свойство: $\forall\, d \in D$

$$(d_1 \preceq d) \Longrightarrow (g(d) \in M). \tag{6.13}$$

С учетом (5.25) и (6.13) имеем при $d \in D,\ d_1 \preceq d$, что $M \in (\mathrm{tr})[\mathcal{L}](g(d))$, а потому

$$((\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ g)(d) \in \Phi_{\mathcal{L}}(M) \tag{6.14}$$

(см. (5.25), (6.12)). Итак, направленность $(D, \preceq, (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ g)$ лежит в $\Phi_{\mathcal{L}}(M)$ с некоторого момента. В силу замкнутости множества (6.12) и второго положения в (6.11) получаем, что $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(M)$, то есть $M \in \mathcal{V}$. Коль скоро выбор M был произвольным, установлено, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. Итак, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, чем завершается проверка вложения

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}). \tag{6.15}$$

Для обоснования противоположного вложения отметим, что

$$\mathrm{cl}((\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^1(E), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \tag{6.16}$$

(этот факт устанавливается по аналогии с [14, предложение 7.1]; см. также [20, предложение 14] при несущественной модификации). Выберем произвольный у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Тогда согласно (2.5) $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{W}. \tag{6.17}$$

С учетом (6.16) имеем для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \rho)$ в множестве $(\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^1(E)$ сходимость

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \rho) \xrightarrow{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]} \mathcal{W}. \tag{6.18}$$

Тогда, в частности, $\rho: \ \mathbb{D} \longrightarrow (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^1(E)$, а это означает, что (см. §2) $\mathfrak{R}_d \stackrel{\triangle}{=} \{x \in E \mid (\mathrm{tr})[\mathcal{L}](x) = \rho(d)\} \in \mathcal{P}'(E) \ \ \forall\, d \in \mathbb{D}$. С учетом этого, используя аксиому выбора, получаем свойство

$$\prod_{d \in \mathbb{D}} \mathfrak{R}_d \in \mathcal{P}'(E^{\mathbb{D}}), \tag{6.19}$$

и, в частности, множество-произведение в левой части (6.19) непусто. Выберем произвольно

$$\mathbf{r} \in \prod_{d \in \mathbb{D}} \mathfrak{R}_d,$$

получая отображение $\mathbf{r}: \ \mathbb{D} \longrightarrow E$ такое, что $\mathbf{r}(d) \in \mathfrak{R}_d \ \ \forall\, d \in \mathbb{D}$. Это означает, что $((\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ \mathbf{r})(d) = \rho(d) \ \ \forall\, d \in \mathbb{D}$. В итоге, $\rho = (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ \mathbf{r}$. Из (6.18) теперь следует свойство сходимости

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ \mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]} \mathcal{W}. \tag{6.20}$$

Выберем произвольно $\Sigma \in \mathcal{E}$. Тогда $\Sigma \in \mathcal{L}$ и по выбору $\mathcal{W}$ имеем (см. (6.17)), что $\Sigma \in \mathcal{W}$, а потому $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ (см. § 2). Поскольку $\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ (см. определение ТП (2.4)), то $\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in N^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathcal{W})$ и согласно (6.20) для некоторого $\mathbf{d} \in \mathbb{D}$ имеем свойство: $\forall\, d \in \mathbb{D}$

$$(\mathbf{d} \sqsubseteq d) \Longrightarrow ((\mathrm{tr})[\mathcal{L}](\mathbf{r}(d)) \in \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)). \tag{6.21}$$

Это означает, что при $\delta \in \mathbb{D}$, $\mathbf{d} \sqsubseteq \delta$, непременно $\Sigma \in (\mathrm{tr})[\mathcal{L}](\mathbf{r}(\delta))$ и, в частности, $\Sigma \in (E - \mathrm{ult})[\mathbf{r}(\delta)]$ (см. (5.25)). Тогда для каждого такого $\delta \in \mathbb{D}$ имеем включение $\mathbf{r}(\delta) \in \Sigma$. Стало быть, $\Sigma \in (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \mathbf{r}]$. Поскольку выбор Σ был произвольным, установлено вложение $\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \mathbf{r}]$. Поэтому (см. (6.20)) $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обладает свойствами

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \mathbf{r}]) \ \& \ ((\mathbb{D}, \sqsubseteq, (\mathrm{tr})[\mathcal{L}] \circ \mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]} \mathcal{W}),$$

где $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{r})$ есть направленность в множестве E. Тогда [14, определение 3.1]

$$\mathcal{W} \in (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}],$$

чем и завершается обоснование вложения $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathrm{tr})[\mathcal{L}]; \mathcal{E}]$. С учетом (6.15) получаем равенство (6.10). □

Теорема 6.1. *Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедливо равенство* $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}] = \varphi^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}))$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (6.3) и предложения 6.2. Заметим, что условие $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, присутствующее в теореме 6.1, может быть существенно ослаблено подобно тому, как это сделано в [14, следствие 13.1].

Замечание 6.1. Отметим, что в построениях, приводящих к теореме 6.1, существенно использовалось условие 5.1. В этой связи рассмотрим простейший пример ситуации, когда данное условие выполнено. Полагаем в дальнейшем, что $E = [0, 1]$, а $\tau_{\mathbb{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология $\mathbb{R}$.

Пусть далее в настоящем замечании Ψ есть монотонно неубывающая функция из $E = [0, 1]$ в $\mathbb{R}$, то есть Ψ действует из E в $\mathbb{R}$ и при этом

$$\Psi(t_1) \leqslant \Psi(t_2) \;\; \forall\, t_1 \in E \,\forall\, t_2 \in [t_1, 1]. \tag{6.22}$$

В качестве $\mathcal{L}$ рассмотрим полуалгебру всех промежутков в E (открытых, полуоткрытых и замкнутых; $\varnothing$ также рассматривается как промежуток: $\varnothing = [1, 0]$): в дальнейшем

$$\mathcal{L} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{I} \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, \alpha \in E \;\exists\, \beta \in E :\; (]\alpha, \beta[\subset \mathbb{I}) \;\&\; (\mathbb{I} \subset [\alpha, \beta])\},$$

$\mathcal{L} \in \Pi[E]$; см. [17, (6.3.12), (6.3.15)]. С учетом (6.22) имеем, что (см. [17, с. 39])

$$\Psi^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{L} \;\; \forall\, c \in \mathbb{R}. \tag{6.23}$$

Заметим, что $\Psi(0) \leqslant \Psi(1)$. Полагаем в дальнейшем, что $\mathbf{H} \stackrel{\triangle}{=} [\Psi(0), \Psi(1)]$, а τ есть $|\cdot|$-топология $\mathbf{H}$. Тогда τ есть топология $\mathbf{H}$, индуцированная (в $\mathbf{H}$) из ТП $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. При этом (см. (6.22)) $\Psi :\; E \longrightarrow \mathbf{H}$. Если $h \in \mathbf{H}$, то $\tilde{\mathcal{H}} \stackrel{\triangle}{=} \{]h - \varepsilon, h + \varepsilon[:\;\; \varepsilon \in]0, \infty[\} \in (h - \mathrm{bas})[\tau_{\mathbb{R}}]$ по определению топологии $\tau_{\mathbb{R}}$.

Тогда при $c_1 \in \mathbb{R}$ и $c_2 \in]c_1, \infty[$ имеем с очевидностью, что

$$\Psi^{-1}(]c_1, c_2[) = \Psi^{-1}(]-\infty, c_2[) \cap \Psi^{-1}(]c_1, \infty[), \tag{6.24}$$

где $\Psi^{-1}(]-\infty, c_2[) \in \mathcal{L}$ согласно (6.23). Далее, с учетом (6.22) имеем, что

$$[t, 1] \subset \Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \;\; \forall\, t \in \Psi^{-1}(]c_1, \infty[). \tag{6.25}$$

Из (6.23), (6.24) следует очевидная импликация

$$(\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) = \varnothing) \Longrightarrow (\Psi^{-1}(]c_1, c_2[) \in \mathcal{L}) \tag{6.26}$$

(в самом деле, $\varnothing \in \mathcal{L}$). Рассмотрим случай $\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \neq \varnothing$, то есть случай, когда $\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \in \mathcal{P}'(E)$. Введем $\zeta \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Psi^{-1}(]c_1, \infty[)) \in E$. Тогда из (6.25) вытекает, что

$$(\zeta \in \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)) \Longrightarrow (\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) = [\zeta, 1]) \tag{6.27}$$

(учли очевидное вложение $\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \subset [\zeta, 1]$). С учетом определения $\mathcal{L}$ имеем из (6.27) импликацию

$$(\zeta \in \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)) \Longrightarrow (\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \in \mathcal{L}). \tag{6.28}$$

Пусть теперь (при условии $\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \neq \varnothing$) $\zeta \notin \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)$. Тогда

$$\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \subset]\zeta, 1] \tag{6.29}$$

(если $t \in \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)$, то $\zeta \leqslant t$ по определению ζ и, кроме того, $\zeta \neq t$ в силу сделанного предположения; стало быть, $\zeta < t$). Если же $p \in]\zeta, 1]$, то по определению ζ имеем для некоторого $q \in \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)$ неравенство $q < p$, а тогда $p \in [q, 1]$ и согласно (6.25) $p \in \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)$. Итак, $]\zeta, 1] \subset \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)$, откуда с учетом (6.29) получаем равенство $\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) =]\zeta, 1]$, где $]\zeta, 1] \in \mathcal{L}$ по определению $\mathcal{L}$. Поэтому

$$\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \in \mathcal{L} \tag{6.30}$$

и в случае $\zeta \notin \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)$. Следовательно, истинна импликация

$$\big(\zeta \notin \Psi^{-1}(]c_1, \infty[)\big) \Longrightarrow \big(\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \in \mathcal{L}\big),$$

а потому с учетом (6.28) получаем, что (6.30) истинно во всех возможных при $\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \neq \varnothing$ случаях. Итак, $\big(\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \neq \varnothing\big) \Longrightarrow \big(\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \in \mathcal{L}\big)$. С учетом (6.24) и последней импликации получаем, что $(\Psi^{-1}(]c_1, \infty[) \neq \varnothing) \Longrightarrow (\Psi^{-1}(]c_1, c_2[) \in \mathcal{L})$ (в самом деле, $\mathcal{L}$ есть π-система;

см. (1.1), (1.2)). С учетом (6.26) получаем окончательно, что $\Psi^{-1}(]c_1, c_2[) \in \mathcal{L}$ во всех возможных случаях. Поскольку выбор c_1 и c_2 был произвольным, то

$$\Psi^{-1}(]\alpha, \beta[) \in \mathcal{L} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \, \forall \beta \in]\alpha, \infty[.$$

Тогда имеем по определению $\tilde{\mathcal{H}}$ следующее свойство: $\Psi^{-1}(\tilde{H}) \in \mathcal{L} \ \ \forall \tilde{H} \in \tilde{\mathcal{H}}$. По свойствам τ имеем, однако, что $\mathcal{H} \overset{\triangle}{=} \{\tilde{H} \cap \mathbf{H} : \ \tilde{H} \in \tilde{\mathcal{H}}\} \in (h-\mathrm{bas})[\tau]$. Вместе с тем $\Psi^{-1}(\tilde{H} \cap \mathbf{H}) = \Psi^{-1}(\tilde{H}) \ \ \forall \tilde{H} \in \mathcal{H}$. В итоге получаем, что $\Psi^{-1}(H) \in \mathcal{L} \ \ \forall H \in \mathcal{H}$. Поскольку выбор h был произвольным, требуемое свойство локальной $\mathcal{L}$-измеримости отображения Ψ установлено (заметим, что подобным образом можно легко реализовать векторный вариант данного примера, используя вышеупомянутую конструкцию на основе монотонных функций покомпонентно; здесь следует, конечно, иметь в виду, что семейство $\mathcal{L}$ замкнуто относительно конечных пересечений).

Отметим теперь, что в рассматриваемом примере множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ допускает очень простое описание, использующее (3.4). В этой связи заметим, что, как нетрудно проверить,

$$\Big(\mathcal{J}_t^{(-)} \overset{\triangle}{=} \{[c, t[: \ c \in [0, t[\} \in \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E] \ \ \forall t \in]0, 1]\Big) \ \& \ \Big(\mathcal{J}_t^{(+)} \overset{\triangle}{=} \{]t, c] : \ c \in]t, 1]\} \in \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E] \ \ \forall t \in [0, 1[\Big).$$

Итак, имеем характерные базы у/ф. При этом справедливо следующее равенство:

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \Big\{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)} | \mathcal{L}] : \ t \in]0, 1]\Big\} \cup \Big\{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} | \mathcal{L}] : \ t \in [0, 1[\Big\},$$

определяющее в нашем случае множество всех свободных у/ф. Поскольку множество $(\mathrm{tr})[\mathcal{L}]^1(E)$ определяется явным образом, мы получаем полное описание множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

В связи с исследованиями конструкций расширений в классе у/ф ИП (имеются в виду пространства Стоуна) отметим работы [21–23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Даффин Р.Дж. Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностр. лит-ра, 1959. С. 263–267.
3. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
4. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 229 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
8. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
9. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
10. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
11. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
12. Архангельский А.В. Компактность // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50: Общая топология–2. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
13. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
14. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
15. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
16. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and Relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 p.
17. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 541 с.
18. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология.М.: Высшая школа, 1979. 336 с.

19. Ченцов А.Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 184–217.
20. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.
21. Бастрыков Е.С. О некоторых точках расширения Белла счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6.
22. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения $\mathbb{N}$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
23. Головастов Р.А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 14–19.

Поступила в редакцию 15.08.2011

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990 Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets

Keywords: attraction set, constraints of asymptotic character, ultrafilter.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ultrafilters of widely interpreted measurable spaces (including the spaces with semialgebras and algebras of sets) are considered. The transformation having the sense of ultrafilter extension with semialgebra of sets onto algebra generated by this semialgebra is investigated. It is established that given transformation is a homeomorphism in the sense of the natural equipments of ultrafilter spaces realizing standard compactums (in the case of measurable spaces with algebra of sets, the space of Stone representation is realized). Questions connected with representation of attraction sets in abstract attainability problem with constraints of asymptotic character are investigated. These questions are connected with the compactifications in the class of ultrafilters of measurable spaces with semialgebras of sets and some analogs for ultrafilters of π-systems.

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.

2. Daffin R.J. Infinite programs, *Linear inequalities and related topics*, 1959, pp. 263–267.

3. Gol'shtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* (Duality theory in mathematical programming and its applications), Moscow: Nauka, 1971, 351 p.

4. Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya* (Foundations of optimal control), Tbilisi: Izd. Tbilis. Univ., 1975, 229 p.

5. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.

6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1968, 456 p.

7. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of dynamic systems. Problem of the minimum guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 518 p.

8. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization guarantees in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 287 p.

9. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.

10. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.

11. Neve J. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostey* (Mathematical foundations of probability theory), Moscow: Mir, 1969, 309 p.

12. Arkhangel'skii A.V. Compactness, *Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat. Fund. Naprav.*, vol. 50, General Topology–2, Moscow: VINITI, 1989, pp. 5–128.

13. Burbaki N. *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury* (General topology. The basic structures), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.

14. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142.

15. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.

16. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and Relaxations*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002, 408 p.

17. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (Elements of a finitely additive measure theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 541 p.

18. Aleksandryan R.A., Mirzakhanyan E.A. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 336 p.

19. Chentsov A.G. Extension of abstract problems of attainability: nonsequential versich, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, Yekaterinburg, 2007, vol. 13, no. 2, pp. 184–217.

20. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in problems with constraints of asymptotic character, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, Yekaterinburg, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 268–293.

21. Bastrykov E.S. About of Bell extension points of countable discrete space. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 4, pp. 3–6.

22. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of $\mathbb{N}$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17.

23. Golovastov R.A. About one compactifications of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 14–19.

Received 15.08.2011

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru