УДК 517.958 : 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

РАССЕЯНИЕ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КВАНТОВЫХ ПРОВОЛОК

В статье рассматривается дискретный оператор Шредингера на графе с вершинами на двух пересекающихся прямых, возмущенный убывающим потенциалом. Данный оператор является гамильтонианом электрона вблизи структуры, образованной квантовой точкой и выходящими из нее четырьмя квантовыми проволоками в приближении сильной связи, широко используемом в настоящее время в физической литературе для изучения подобных наноструктур. Доказаны существование и единственность решения соответствующего уравнения Липпмана–Швингера, для решения получена асимптотическая формула. Изучена нестационарная картина рассеяния. Исследуется задача рассеяния для данного оператора в случае малого потенциала, а также в случае, когда малы как потенциал, так и скорость квантовой частицы. Получены асимптотические формулы для вероятностей распространения частицы во всех возможных направлениях.

Ключевые слова: дискретное уравнение Липпмана–Швингера, амплитуда прохождения и отражения.

Введение

В последнее время при описании транспорта электронов через наноразмерные электронные устройства часто используются дискретные модели на графах. Обычно исследуются системы из квантовых проволок и квантовых точек (см., например, [1–3]), которые моделируются с помощью вершин графа (узлов). Оператор Шредингера в приближении сильной связи представляет собой разностный оператор, область определения которого состоит из функций, заданных на узлах.

В физической литературе (см., например, [4]) дискретные модели активно обсуждаются. Но, несмотря на физическую актуальность упомянутых задач, математических работ, исследующих данные модели, мало (см. [5, 6]).

В пространстве $l^2(\mathcal{G})$, где $\mathcal{G} = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z})$ рассматривается ограниченный самосопряженный оператор $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V}$ с малым параметром $\varepsilon > 0$, где оператор $\mathcal{H}_0$ задается следующими формулами:

$$\begin{gathered}
(\mathcal{H}_0\psi)(0,0) = \psi(1,0) + \psi(-1,0) + \psi(0,1) + \psi(0,-1),\\
(\mathcal{H}_0\psi)(n,0) = \psi(n+1,0) + \psi(n-1,0), \quad n \neq 0,\\
(\mathcal{H}_0\psi)(0,m) = \psi(0,m+1) + \psi(0,m-1), \quad m \neq 0,
\end{gathered}$$

$\mathcal{V}$ — оператор умножения на вещественную функцию $\mathcal{V}(n,m) \neq 0$, заданную на $\mathcal{G}$ и удовлетворяющую оценкам

$$|\mathcal{V}(n,0)| \leqslant \beta e^{-\alpha|n|}, \quad |\mathcal{V}(0,m)| \leqslant \beta e^{-\alpha|m|}, \quad n,m \in \mathbb{Z}$$

с положительными константами α, β (в дальнейшем такие функции называются экспоненциально убывающими).

Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ является гамильтонианом электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок, потенциал $\varepsilon\mathcal{V}$ описывает влияние примесей.

§ 1. Уравнение Липпмана–Швингера для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$

В данном параграфе доказаны существование и единственность решения уравнения Липпмана–Швингера для малых ε, получена асимптотическая формула этого решения.

Пусть переменная k и переменная λ связаны соотношениями

$$\cos k = \lambda/2, \quad \sin k = -\sqrt{1-(\lambda/2)^2}.$$

Кроме того, обозначим

$$\mathcal{V}(n,m) = \begin{cases} \mathcal{V}_1(n), & m=0, \\ \mathcal{V}_2(m), & n=0, \end{cases} \qquad \psi(n,m,\lambda) = \begin{cases} \psi_1(n,\lambda), & m=0, \\ \psi_2(m,\lambda), & n=0, \end{cases}$$

$$f(\psi) = f(\lambda,\psi) = R_{01}(\lambda)\psi(-1) + R_{01}(\lambda)\psi(1),$$

где ядро резольвенты $R_{01}(\lambda)$ оператора H_{01}, действующего в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$H_{01}\psi(n) = \psi(n-1) + \psi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

имеет вид (см. [5])

$$G_{01}(\lambda, n-m) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|n-m|} = \frac{1}{2i\sin k}e^{ik|n-m|}.$$

Пусть $\lambda_0 \in (-2,2)$ и λ_0 не является квазиуровнем оператора H_{01} (под квазиуровнем понимаем собственное значение или резонанс, см. [3]). В некоторой окрестности точки λ_0 рассмотрим уравнение Шредингера для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$

$$(\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V})\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in l^2(\mathcal{G}). \tag{1}$$

Перепишем (1) в виде системы

$$\begin{cases} ((H_{01}-\lambda)\psi_1)(n,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_1(n)\psi_1(n,\lambda) - (\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda))\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ ((H_{01}-\lambda)\psi_2)(m,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_2(m)\psi_2(m,\lambda) - (\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda))\delta(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2}$$

с условием $\psi_1(0,\lambda) = \psi_2(0,\lambda)$. Заметим, что при $n=m=0$ из (2) вытекает

$$\begin{cases} \psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda) - \lambda\psi_1(0,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_1(0)\psi_1(0,\lambda) - (\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)), \\ \psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda) - \lambda\psi_2(0,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_2(0)\psi_2(0,\lambda) - (\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)), \end{cases}$$

откуда $(\lambda - \varepsilon\mathcal{V}_1(0))\psi_1(0,\lambda) = (\lambda-\varepsilon\mathcal{V}_2(0))\psi_2(0,\lambda)$. Так как $\mathcal{V}_1(0) = \mathcal{V}_2(0)$, то для $\lambda \neq \varepsilon\mathcal{V}_1(0)$ получаем равенство $\psi_1(0,\lambda) = \psi_2(0,\lambda)$. Таким образом, данное условие для решений уравнения (2) выполняется автоматически.

Рассмотрим уравнение Липпмана–Швингера для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ с «налетающей волной», распространяющейся вдоль $\mathbb{Z}\times\{0\}$,

$$\begin{cases} \psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} - \varepsilon R_{01}(\lambda+i0)\mathcal{V}_1(n)\psi_1(n,\lambda) - \\ \qquad - (\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda))R_{01}(\lambda+i0)\delta(n), \quad n\in\mathbb{Z}, \\ \psi_2(m,\lambda) = -\varepsilon R_{01}(\lambda+i0)\mathcal{V}_2(m)\psi_2(m,\lambda) - \\ \qquad - (\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda))R_{01}(\lambda+i0)\delta(m), \quad m\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{3}$$

(в дальнейшем опускаем $+i0$; данный выбор знака отвечает $k \in (-\pi, 0)$). Действуя на каждое уравнение системы (3) оператором $(H_{01}-\lambda)$ и учитывая, что $(H_{01}-\lambda)e^{ikn} = 0$, получим, что решение уравнения Липпмана–Швингера (3) является решением уравнения Шредингера (2), а значит, $\psi_1(0,\lambda)=\psi_2(0,\lambda)$ для $\lambda\neq\varepsilon\mathcal{V}_1(0)$. Далее, из (3) видим, что величины $\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)$ и $\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)$ удовлетворяют линейной системе

$$\begin{cases}(\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda))+f(\delta)(\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda))=2\cos k-\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1),\\ f(\delta)(\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda))+(\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda))=-\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2).\end{cases}$$

По формулам Крамера имеем

$$\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)=\frac{2\cos k-\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)+\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)},$$
$$\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)=\frac{-2\cos k\cdot f(\delta)-\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)+\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}.$$

Таким образом, уравнение Липпмана–Швингера (3) примет вид

$$\begin{cases}\psi_1(n,\lambda)=e^{ikn}-\varepsilon R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_1(n)\psi_1(n,\lambda)+\\ +\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)+\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)-\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n),\quad n\in\mathbb{Z},\\ \psi_2(m,\lambda)=-\varepsilon R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_2(m)\psi_2(m,\lambda)+\\ +\dfrac{-2\cos k+\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)-\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m),\quad m\in\mathbb{Z}.\end{cases}\tag{4}$$

Перейдем в (4) к новым неизвестным функциям $\varphi_i=\sqrt{|\mathcal{V}_i|}\psi_i$, $i=1,2$ (для $\sqrt{\mathcal{V}_i}$ принимаем равенство $\sqrt{\mathcal{V}_i}=\sqrt{|\mathcal{V}_i|}\operatorname{sign}\mathcal{V}_i$). Домножив оба уравнения на $\sqrt{|\mathcal{V}_1|}$ и $\sqrt{|\mathcal{V}_2|}$ соответственно, получим модифицированное уравнение Липпмана–Швингера [8]

$$\begin{cases}\varphi_1(n,\lambda)=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn}-\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(n,\lambda)+\\ +\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)-\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n),\quad n\in\mathbb{Z},\\ \varphi_2(m,\lambda)=-\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_2|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2(m,\lambda)+\\ +\sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)-\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m),\quad m\in\mathbb{Z}.\end{cases}\tag{5}$$

Положим

$$\overline{\mathcal{V}}_1=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_1(j),\quad \overline{\mathcal{V}}_2=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_2(j).$$

Теорема 1. *Предположим, что $k=A\varepsilon$, в случае знака «+» или $\tilde{k}=A\varepsilon$ в случае знака «−», где $\tilde{k}=-\pi-k$, $A\neq 0$ — вещественная константа. Тогда для достаточно малых ε существует единственное решение $\varphi\in l^2(\mathcal{G})$ модифицированного уравнения Липпмана–Швингера* (5), *имеющее вид*

$$\varphi_1(n,\varepsilon)=\sqrt{|\mathcal{V}_1(n)|}(\pm1)^{n+1}(1+n-|n|)Ai\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$
$$\varphi_2(m,\varepsilon)=\sqrt{|\mathcal{V}_2(m)|}(\pm1)^{m+1}Ai\varepsilon+O(\varepsilon^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем несложные преобразования:

$$-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(n,\lambda)-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\frac{f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n)=$$

$$=-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\sum_{j\in\mathbb{Z}}G_{01}(\lambda,n-j)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(j,\lambda)-$$

$$-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}(G_{01}(\lambda,1-j)+G_{01}(\lambda,1+j))\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(j,\lambda)\cdot 2G_{01}(\lambda,1)}{1-4G_{01}^2(\lambda,1)}\cdot G_{01}(\lambda,n)=$$

$$=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Bigg[-G_{01}(\lambda,n-j)\sqrt{\mathcal{V}_1(j)}-$$

$$-\frac{2G_{01}(\lambda,1)G_{01}(\lambda,n)(G_{01}(\lambda,1-j)+G_{01}(\lambda,1+j))\sqrt{\mathcal{V}_1(j)}}{1-4G_{01}^2(\lambda,1)}\Bigg]\varphi_1(j,\lambda).$$

Положим $L_i=L_i(\lambda)$, $i=1,2$, оператор с ядром

$$l_i(\lambda,n,j)=-\sqrt{|\mathcal{V}_i(n)|}G_{01}(\lambda,n-j)\sqrt{\mathcal{V}_i(j)}-$$

$$-\frac{2\sqrt{|\mathcal{V}_i(n)|}G_{01}(\lambda,n)G_{01}(\lambda,1)}{1-4G_{01}^2(\lambda,1)}\left(G_{01}(\lambda,1-j)+G_{01}(\lambda,1+j)\right)\sqrt{\mathcal{V}_i(j)}.$$

Легко убедиться, что в условиях теоремы функции $l_i(\lambda,n,j)$ аналитичны по ε.

Систему (5) перепишем в виде

$$\begin{cases}\left(1-\varepsilon L_1\right)\varphi_1(n,\lambda)=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn}+\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), & n\in\mathbb{Z},\\ \left(1-\varepsilon L_2\right)\varphi_2(m,\lambda)=\sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), & m\in\mathbb{Z}.\end{cases}\tag{6}$$

Обозначим

$$\xi_1(n,\lambda)=\left(1-\varepsilon L_1\right)\varphi_1(n,\lambda),\quad n\in\mathbb{Z},$$
$$\xi_2(m,\lambda)=\left(1-\varepsilon L_2\right)\varphi_2(m,\lambda),\quad m\in\mathbb{Z},$$

тогда из (6) имеем

$$\begin{cases}\xi_1(n,\lambda)=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn}+\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}(1-\varepsilon L_2)^{-1}\xi_2)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), & n\in\mathbb{Z},\\ \xi_2(m,\lambda)=\sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}(1-\varepsilon L_1)^{-1}\xi_1)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), & m\in\mathbb{Z}.\end{cases}\tag{7}$$

Следовательно,

$$\begin{cases}\xi_1(n,k)=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn}+C_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ik|n|}, & n\in\mathbb{Z},\\ \xi_2(m,k)=C_2\sqrt{|\mathcal{V}_2|}e^{ik|m|}, & m\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{8}$$

где $C_1=C_1(k)$ и $C_2=C_2(k)$ не зависят от n и m.

Несмотря на экспоненциальное возрастание $G_{01}(\lambda,n-j)$ при $|n-j|\to\infty$, для малых k функции $l_i(\lambda,n,j)$, $i=1,2$ экспоненциально убывают за счет умножения слева и справа на $\sqrt{|\mathcal{V}_i(n)|}$ и $\sqrt{\mathcal{V}_i(j)}$ соответственно, поэтому $L_i(\lambda)$ определены и ограничены в $l^2(\mathbb{Z})$. Обратные операторы $(1-\varepsilon L_i(\lambda))^{-1}$, $i=1,2$ существуют для малых значений параметра ε, если $\|\varepsilon L_i(\lambda)\|<1$.

Далее, из (7), (8) получим

$$\begin{cases}C_1=\varepsilon\dfrac{f\left(\sqrt{\mathcal{V}_2}\,(1-\varepsilon L_2)^{-1}\,C_2\sqrt{|\mathcal{V}_2|}e^{ik|m|}\right)}{1-f^2(\delta)}\cdot\dfrac{1}{2i\sin k}+\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)}{1-f^2(\delta)}\cdot\dfrac{1}{2i\sin k},\\ C_2=\varepsilon\dfrac{f\left(\sqrt{\mathcal{V}_1}\,(1-\varepsilon L_1)^{-1}\left(\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn}+C_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ik|n|}\right)\right)}{1-f^2(\delta)}\cdot\dfrac{1}{2i\sin k}-\dfrac{2\cos k}{1-f^2(\delta)}\cdot\dfrac{1}{2i\sin k}.\end{cases}\tag{9}$$

Заметим, что

$$f(\mathcal{V}_2 e^{ik|m|}) = \frac{1}{2i\sin k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(e^{ik|1-j|}+e^{ik|1+j|})\mathcal{V}_2 e^{ik|j|} = \frac{1}{2i\sin k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(e^{ik(|1-j|+|j|)}+e^{ik(|1+j|+|j|)})\mathcal{V}_2(j) =$$

$$= \frac{\overline{\mathcal{V}}_2}{i\sin k} + \frac{O(\varepsilon)}{2i\sin k}.$$

Далее, как нетрудно видеть,

$$L_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} = O(1),$$

$$f\left(\sqrt{\mathcal{V}_1}\,(1-\varepsilon L_1)^{-1}\left(\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} + C_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ik|n|}\right)\right) = \frac{(1+C_1)\overline{\mathcal{V}}_1}{i\sin k} + \frac{O(\varepsilon)}{2i\sin k}.$$

Таким образом, (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon}{2i\sin k}\left(\frac{C_2\overline{\mathcal{V}}_2}{i\sin k} + \frac{O(\varepsilon)}{2i\sin k}\right)\Bigg/\left(1+\frac{e^{2ik}}{\sin^2 k}\right) - 1 + iA\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \\ &\qquad = -1 + iA\varepsilon - \frac{\varepsilon C_2\overline{\mathcal{V}}_2}{2} + O(\varepsilon^2), \\ C_2 &= \frac{\varepsilon}{2i\sin k}\left(\frac{(1+C_1)\overline{\mathcal{V}}_1}{i\sin k} + \frac{O(\varepsilon)}{2i\sin k}\right)\Bigg/\left(1+\frac{e^{2ik}}{\sin^2 k}\right) - iA\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \\ &\qquad = -iA\varepsilon - \frac{\varepsilon(1+C_1)\overline{\mathcal{V}}_1}{2} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{\varepsilon\overline{\mathcal{V}}_2}{2}C_2 = -1 + iA\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \dfrac{\varepsilon\overline{\mathcal{V}}_1}{2}C_1 + C_2 = -iA\varepsilon - \dfrac{\varepsilon\overline{\mathcal{V}}_1}{2} + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

По формулам Крамера легко получить

$$C_1 = -1 + iA\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad C_2 = -iA\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда

$$\varphi_1(n,\varepsilon) = \varphi_1(n,k) = (1-\varepsilon L_1)^{-1}\xi_1(n,k) = \xi_1(n,k) + O(\varepsilon^2) = \sqrt{|\mathcal{V}_1(n)|}(1+n-|n|)Ai\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$
$$\varphi_2(m,\varepsilon) = \varphi_2(m,k) = (1-\varepsilon L_2)^{-1}\xi_2(n,k) = \xi_2(n,k) + O(\varepsilon^2) = -\sqrt{|\mathcal{V}_2(m)|}Ai\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Асимптотическая формула для случая $k = -\pi - A\varepsilon$ доказывается аналогично, используя равенство

$$e^{ik\gamma} = (-1)^\gamma e^{-i\tilde{k}\gamma},$$

где $\tilde{k} = A\varepsilon$. □

§ 2. Рассеяние для слабо возмущенного оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$

В этом параграфе описана картина рассеяния и получены асимптотические формулы для вероятностей распространения частицы в разных направлениях.

Рассмотрим при $t \in \mathbb{R}$ нестационарное уравнение Шредингера

$$i\frac{d\psi}{dt} = H_{01}\psi, \tag{11}$$

где $\psi = \psi(n,t) \in l^2(\mathbb{Z})$ с условием в нуле

$$\psi(n,0) = \psi_0(n), \quad \psi_0 \in l^2(\mathbb{Z}). \tag{12}$$

Введем преобразование Фурье $F : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2[-\pi, \pi]$ формулой

$$\hat{\psi}(k) = (F\psi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) e^{-ikn}.$$

Лемма 1. *Решение уравнения* (11) *с начальным условием* (12) *имеет вид*

$$\psi(n,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\psi}_0(k) e^{ink} e^{-2it\cos k}\, dk. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подействовав преобразованием F на уравнение (11), получим

$$i\frac{d\hat{\psi}}{dt} = 2\cos k \cdot \hat{\psi},$$

где $\hat{\psi} = \hat{\psi}(k,t) \in L^2[-\pi, \pi]$. Отсюда, с учетом (12), имеем $\hat{\psi}(k,t) = \hat{\psi}_0(k) e^{-2i\cos k \cdot t}$ и, следовательно, (13). $\square$

Замечание 1. В силу самосопряженности оператора H_{01} имеем (см., например, [7])

$$\|\psi(n,t)\| = \|\psi_0(n)\| = \|\hat{\psi}_0(t)\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\eta_1^+(n,k) &= -\varepsilon \sum_{j>n} \frac{e^{-ik(n-j)} - e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1 \psi_1(j,\lambda), \\
\eta_1^-(n,k) &= -\varepsilon \sum_{j<n} \frac{e^{ik(n-j)} - e^{-ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1 \psi_1(j,\lambda), \\
C_1(k) &= \frac{2\cos k \cdot f(\delta) + \varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2) - \varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}, \\
A_1^\pm(k) &= -\varepsilon \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{\mp ikj}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1 \psi_1(j,\lambda) + \frac{C_1(k)}{2i\sin k}.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения (4) имеем

$$\psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} - \varepsilon \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{ik|n-j|}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) + C_1(k)\frac{e^{ik|n|}}{2i\sin k} =$$

$$= e^{ikn} - \varepsilon \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) - \varepsilon \sum_{j>n} \frac{e^{-ik(n-j)} - e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) + C_1(k)\frac{e^{ik|n|}}{2i\sin k}$$

или

$$\psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} - \varepsilon \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) - \varepsilon \sum_{j<n} \frac{e^{ik(n-j)} - e^{-ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) + C_1(k)\frac{e^{ik|n|}}{2i\sin k}.$$

Отсюда

$$\psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} + A_1^\pm(k) e^{\pm ikn} + \eta_1^\pm(n,k) \tag{14}$$

(знаки «+» и «−» отвечают $n > 0$ и $n \leqslant 0$ соответственно). Рассуждая аналогично, получаем

$$\psi_2(m,\lambda) = A_2^\pm(k) e^{\pm ikm} + \eta_2^\pm(m,k), \tag{15}$$

где

$$\eta_2^-(m,k) = -\varepsilon \sum_{j<m} \frac{e^{ik(m-j)} - e^{-ik(m-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_2\psi_2(j,\lambda),$$
$$\eta_2^+(m,k) = -\varepsilon \sum_{j>m} \frac{e^{-ik(m-j)} - e^{ik(m-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_2\psi_2(j,\lambda),$$
$$C_2(k) = \frac{-2\cos k + \varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1) - \varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)},$$
$$A_2^{\pm}(k) = -\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\mp ikj}}{2i\sin k} \mathcal{V}_2\psi_2(j,\lambda) + \frac{C_2(k)}{2i\sin k}.$$

Определим функцию

$$\eta(n,m,k) = \begin{cases} \eta_1^+(n,k), & n>0,\ m=0,\\ \eta_1^-(n,k), & n\leqslant 0,\ m=0,\\ \eta_2^+(m,k), & n=0,\ m>0,\\ \eta_2^-(m,k), & n=0,\ m\leqslant 0. \end{cases}$$

Лемма 2. *Функция $\eta(n,m,k)$ является аналитической $l^2(\mathcal{G})$-значной функцией в окрестности точки $\lambda_0 = 2\cos k_0$, $k_0 \in (-\pi, 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\|\eta(n,m,k)\|^2_{l^2(\mathcal{G})} = \sum_{(n,m)\in\mathcal{G}} |\eta(n,m,k)|^2 = \sum_{n>0} |\eta_1^+(n,k)|^2 + \sum_{n\leqslant 0} |\eta_1^-(n,k)|^2 + \\ + \sum_{m>0} |\eta_2^+(m,k)|^2 + \sum_{m\leqslant 0} |\eta_2^-(m,k)|^2.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского справедлива оценка

$$|\eta_1^+(n,k)| = \Big| -\varepsilon \sum_{j>n} \frac{e^{-ik(n-j)} - e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,k)\Big| = \varepsilon \Big| \sum_{j>n} \frac{-2i\sin[k(n-j)]}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,k)\Big| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \Big(\sum_{j>n} \frac{\sin^2[k(n-j)]}{\sin^2 k} |\mathcal{V}_1(j)|\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j>n} |\varphi_1(j,k)|^2 \Big)^{1/2}. \tag{16}$$

В окрестности $k_0 \neq 0$, очевидно, справедливо $\dfrac{\sin^2[k(n-j)]}{\sin^2 k} < C$. В случае $k_0 = 0$

$$\frac{\sin^2[k(n-j)]}{\sin^2 k} \leqslant \frac{k^2(n-j)^2}{\sin^2 k} \leqslant C'(n^2 + j^2).$$

Таким образом, из (16) имеем

$$|\eta_1^+(n,k)| \leqslant C_1 \Big(\sum_{j>n} (n^2 + j^2) e^{-\alpha|j|} \Big)^{1/2} \|\varphi_1\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leqslant C_2 \Big(\sum_{j>n} j^2 e^{-\alpha|j|} \Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C_2 e^{-\frac{\alpha|n|}{2}} \Big(\sum_{j>n} j^2 e^{-\frac{\alpha|j|}{2}} \Big)^{1/2} = C_3 e^{-\frac{\alpha|n|}{2}}.$$

Отсюда следует экспоненциальное убывание η_1^+ и равномерная сходимость в (комплексной) окрестности точки λ_0

$$\|\eta_1^+(n,k) - (\eta_1^+)_M(n,k)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \to 0, \quad M \to \infty,$$

где $(\eta_1^+)_M(n,k) = \chi_{[-M,M]}(n)\cdot\eta_1^+(n,k)$, $\chi_{[-M,M]}(n)$ — характеристическая функция отрезка $[-M,M]$. Аналогичные рассуждения справедливы и для $\eta_1^-(n,k)$, $\eta_2^+(m,k)$, и $\eta_2^-(m,k)$. Следовательно, $\sum\limits_{(n,m)\in\mathcal{G}}|\eta(n,m,k)|^2 \leqslant C\sum\limits_{n<0}e^{-\frac{\alpha|n|}{2}}$. В силу (векторнозначной) теоремы Вейерштрасса $l^2(G)$-значная функция $\eta(n,m,\lambda)$ аналитична в окрестности точки λ_0.

□

Будем искать решение уравнения
$$i\frac{d\varphi}{dt} = \mathcal{H}_\varepsilon\varphi,$$
где $\varphi = \varphi(n,m,t)$ – $l^2(\mathcal{G})$-значная функция аргумента t, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, l^2(\mathcal{G}))$, в виде
$$\varphi(n,m,t) = \int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} C(\lambda)\psi(n,m,\lambda)e^{-i\lambda t}\,d\lambda, \tag{17}$$
где $\sigma > 0$ достаточно мало, $C(\lambda) \in C_0^\infty(\lambda_0-\sigma, \lambda_0+\sigma)$, $\psi(n,m,\lambda)$ — решение уравнения Липпмана–Швингера (4). Используя (14), (15), перепишем (17) в виде
$$\varphi(n,m,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} C(\lambda)\left(e^{ikn} + A_1^\pm(k)e^{\pm ikn} + \eta_1^\pm(n,k)\right)e^{-i\lambda t}\,d\lambda, & n\in\mathbb{Z}, \quad m=0,\\ \displaystyle\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} C(\lambda)\left(A_2^\pm(k)e^{\pm ikm} + \eta_2^\pm(m,k)\right)e^{-i\lambda t}\,d\lambda, & n=0, \quad m\in\mathbb{Z}, \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \displaystyle -2\int_{-\pi}^{0} C(\lambda)\left(e^{ikn} + A_1^\pm(k)e^{\pm ikn} + \eta_1^\pm(n,k)\right)e^{-2it\cos k}\sin k\,dk, & n\in\mathbb{Z}, \quad m=0,\\ \displaystyle -2\int_{-\pi}^{0} C(\lambda)\left(A_2^\pm(k)e^{\pm ikm} + \eta_2^\pm(m,k)\right)e^{-2it\cos k}\sin k\,dk, & n=0, \quad m\in\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{18}$$
знаки «$+$» и «$-$» отвечают $n(m) > 0$ и $n(m) \leqslant 0$ соответственно. Рассмотрим норму выражений в (18), отвечающих $\eta_{1,2}^\pm$. Используя формулу интегрирования по частям, получим
$$\left\|\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} C(\lambda)\eta_{1,2}^\pm e^{-i\lambda t}\,d\lambda\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \to 0, \quad t\to\infty.$$
Таким образом, соответствующие интегралы не играют роли в рассеянии.

Далее,
$$\int_{-\pi}^{0} C(k)A_1^\pm(k)e^{-2it\cos k\pm ikn}\sin k\,dk = A_1^\pm(k_0)\int_{-\pi}^{0} C(k)e^{-2it\cos k\pm ikn}\sin k\,dk +$$
$$+\int_{-\pi}^{0} C(k)\left(A_1^\pm(k) - A_1^\pm(k_0)\right)e^{-2it\cos k\pm ikn}\sin k\,dk, \tag{19}$$
где k_0 отвечает $\lambda_0 = 2\cos k_0$. Сравнивая второе слагаемое в правой части (19) с (13) из следствия леммы (1) при $\hat{\psi}_0(k) = \sqrt{2\pi}C(k)(A_1^\pm(k) - A_1^\pm(k_0))\sin k$, получаем, что норма данного слагаемого в $l^2(\mathbb{Z})$ при всех t совпадает с
$$\sqrt{2\pi}\left\|C(k)\left[A_1^\pm(k) - A_1^\pm(k_0)\right]\sin k\right\|_{L^2[-\pi,0]}$$
и может быть сделана сколь угодно малой равномерно по t выбором носителя функции $C(\lambda)$ в достаточно малой окрестности точки λ_0 при сохранении нормы этой функции в $L^2[-\pi,0]$. Аналогичные рассуждения верны и для интеграла, отвечающего $A_2^\pm$. Таким образом, для частиц с достаточно локализованным волновым вектором k картина рассеяния определяется числами $A_1^\pm(k_0)$ и $A_2^\pm(k_0)$.

Далее, вследствие теоремы о стационарной фазе (см. Дополнение 1 к § XI.3 [8]) для всех n и t таких, что $|n/t + 2\sin k_0| \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, интеграл в первом слагаемом правой части (19) стремится к нулю по норме в $l^2(\mathbb{Z})$ при $|t| \to \infty$. Следовательно, для больших $|t|$ в рассеянии играют роль лишь такие n, для которых

$$-\varepsilon < n/t + 2\sin k_0 < \varepsilon \tag{20}$$

(аналогичные выводы справедливы и для подобных интегралов во втором уравнении (18)).

Суммируя сказанное, приходим к следующему описанию рассеяния. Предположим, что

$$\sqrt{2\pi}\,\|2\sin k \cdot C(k)\|_{L^2[-\pi,0]} = 1. \tag{21}$$

При $t < 0$ имеется волновой пакет, отвечающий налетающей с вероятностью единица частице, локализованный в основном в подмножестве $\mathbb{Z}$ вида (20) (норма соответствующей функции стремится к единице в этой области при $t \to -\infty$). При $t \to \infty$ пакет делится на четыре части, отвечающие разным полуосям. Отраженной волне отвечает коэффициент $A_1^-(\lambda_0)$. Скорость волнового пакета приближенно равна по модулю (в любом направлении) $|2\sin k_0|$.

В силу равенства

$$\|\varphi(n,m,t)\|^2_{l^2(G)} = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

для заданного произвольно малого $\varepsilon > 0$, сужая окрестность точки λ_0, содержащую носитель функции $C(\lambda)$ и устремляя $|t|$ к бесконечности, получаем неравенство

$$\left|1 - \left(\left|1 + A_1^+(k_0)\right|^2 + \left|A_1^-(k_0)\right|^2 + \left|A_2^-(k_0)\right|^2 + \left|A_2^+(k_0)\right|^2\right)\right| < \varepsilon. \tag{22}$$

Из проведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$P_1^+(\lambda_0) = \left|1 + A_1^+(\lambda_0)\right|^2, \quad P_1^- = \left|A_1^-(\lambda_0)\right|^2, \quad P_2^\pm = \left|A_2^\pm(\lambda_0)\right|^2, \tag{23}$$

где $P_2^\pm(\lambda)$ — вероятности прохождения вдоль оси Om вверх и вниз соответственно, $P_1^\pm$ — вероятности прохождения вдоль оси On вправо и влево соответственно. При этом

$$\left|1 + A_1^+(\lambda_0)\right|^2 + \left|A_1^-(\lambda_0)\right|^2 + \left|A_2^+(\lambda_0)\right|^2 + \left|A_2^-(\lambda_0)\right|^2 = 1. \tag{24}$$

Для малых ε при определенном соотношении между ε и λ существует практически полное прохождение вдоль оси абсцисс.

Положим

$$C^\pm = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j+1}(1 + j - |j|)\mathcal{V}_2(j) +$$

$$+\frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\mp 2j - 2 + |1-j| + |1+j|)(1 + j - |j|)\mathcal{V}_1(j),$$

$$F^\pm = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1 + j - |j|)\mathcal{V}_1(j) +$$

$$+\frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j+1}(\mp 2j - 2 + |1-j| + |1+j|)(1 + j - |j|)\mathcal{V}_2(j).$$

$$K^- = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1 + j - |j|)\mathcal{V}_2(j) +$$

$$+\frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j}(2j - 2 + |1-j| + |1+j|)(1 + j - |j|)\mathcal{V}_1(j).$$

Теорема 3. *В условиях теоремы* (1) *для* λ, *достаточно близких к* 2, *справедливы равенства*

$$P_1^+(\lambda) = P_2^+(\lambda) = P_2^-(\lambda) = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_1^-(\lambda) = 1 + (A^2 - 2C^-)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

и для λ, *достаточно близких к* -2, *равенства*

$$P_1^+(\lambda) = P_2^+(\lambda) = P_2^-(\lambda) = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_1^-(\lambda) = 1 + (A^2 - 2K^-)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя теорему (1), для λ, близких к точке 2, найдем

$$A_1^\pm(\lambda) = -1 + iA\varepsilon + C^\pm\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$A_2^\pm(\lambda) = iA\varepsilon + F^\pm\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Тогда

$$P_1^-(\lambda) = |A_1^-(\lambda)|^2 = |-1 + iA\varepsilon + C^-\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)|^2 = 1 + A^2\varepsilon^2 - 2C^-\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_1^+(\lambda) = |1 + A_1^+(\lambda)|^2 = |iA\varepsilon + C^+\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)|^2 = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_2^\pm(\lambda) = |A_2^\pm(\lambda)|^2 = |iA\varepsilon + F^\pm\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)|^2 = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Справедливость формул для λ, близких к точке -2, следует из аналогичных разложений. □

Теорема 4. *Пусть* $\lambda = 2\cos k$, $k \in (-\pi, 0]$ *фиксировано. Тогда*

$$P_1^-(\lambda) = E^2 + B^2 + O(\varepsilon), \quad P_1^+(\lambda) = (1+E)^2 + B^2 + O(\varepsilon), \quad P_2^\pm(\lambda) = D^2 + B^2 + O(\varepsilon),$$

где

$$E = -\frac{2 + 2\cos 2k + \sin^2 2k}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}, \quad B = \frac{\sin 2k(1+\cos 2k)}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}, \quad D = \frac{2\sin^2 2k}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения модифицированного уравнения Липпмана–Швингера (5) следуют из рассуждений, аналогичных представленным в доказательстве теоремы (1). Справедливость формул для $P_1^\pm(\lambda)$ и $P_2^\pm(\lambda)$ легко следует из разложений

$$A_1^\pm(k) = E + Bi + O(\varepsilon), \quad A_2^\pm(k) = D + Bi + O(\varepsilon).$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тинюкова Т.С. Квазиуровни дискретного оператора Шредингера для квантового волновода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 88–97.
2. Тинюкова Т.С. Уравнение Липпмана–Швингера для квантовых проволок // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 99–104.
3. Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П. Квазиуровни дискретного оператора Шредингера с убывающим потенциалом на графе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 104–113.
4. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, 056611 (7 p).
5. Морозова Л.Е., Чубурин Ю.П. Об уровнях одномерного дискретного оператора Шредингера с убывающим потенциалом // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 85–94.

6. Чубурин Ю.П. Об одном дискретном операторе Шредингера на графе // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 165. № 1. С. 119–133.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3: Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 446 с.

Поступила в редакцию 07.04.2012

Тинюкова Татьяна Сергеевна, ассистент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: tashih@mail.ru

T. S. Tinyukova

Scattering in the case of the discrete Schrödinger operator for intersected quantum wires

Keywords: discrete Lippmann–Schwinger equation, reflection and transmission amplitudes.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

The paper considers the discrete Schrödinger operator on a graph with vertices on two intersecting lines, which is perturbed by a decreasing potential. This operator is the Hamiltonian of an electron near a structure formed by a quantum dot and four outgoing quantum wires in the tight-binding approximation widely used in the physics literature for studying such nanostructures. We have proved the existence and uniqueness of the solution of the corresponding Lippmann-Schwinger equation and obtained the asymptotic formula for it. The non-stationary scattering picture has been studied. The scattering problem for the above operator in the case of a small potential, and also in the case of both a small potential and small velocity of a quantum particle, is investigated. Asymptotic formulas for the probabilities of the particle propagation in all possible directions have been obtained.

REFERENCES

1. Tinyukova T.S. Quasi–levels of the discrete Schrödinger operator for a quantum waveguide, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 88–97.
2. Tinyukova T.S. The Lippmann–Schwinger equation for quantum wires, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 99–104.
3. Tinyukova T.S., Chuburin Y.P. Quasi–levels of the discrete Schrödinger equation with a decreasing potential on a graph, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 104–113.
4. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 72, 056611 (7 p).
5. Morozova L.I., Chuburin Y.P. On levels of the one–dimensional discrete Schrödinger operator with a decreasing small potential, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, Izhevsk, 2004, no. 1 (29), pp. 85–94.
6. Chuburin Y. P. A discrete Schrödinger operator on a graph, *Theor. Math. Phys.*, 2010, vol. 165, no. 1, 1335–1347.
7. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. I. Funktsionalnyi analiz* (Methods of Mathematical Physics. I. Functional analysis), Moscow: Mir, 1977, 357 p.
8. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. III. Teoriya rasseyaniya* (Methods of Mathematical Physics. III. Scattering Theory), Moscow: Mir, 1982, 443 p.

Received 07.04.2012

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: tashih@mail.ru