УДК 517.917

© *Е. В. Котлячкова*

ПРОСТОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ СТРАТЕГИЙ

Рассматривается задача простого преследования в классе импульсных стратегий группой преследователей. В первой части рассматривается импульсная стратегия убегающего с фазовыми ограничениями. Предполагается, что убегающий не покидает выпуклого многогранного множества. В работе получены достаточные условия поимки одним из преследователей убегающего. Во второй части рассматриваются импульсные стратегии преследователей. Сформулированы достаточные условия поимки одним из преследователей убегающего, не покидающего выпуклого многогранного множества.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, импульсные стратегии.

Введение

Рассматривается задача простого группового преследования в классе импульсных стратегий с фазовыми ограничениями на состояние убегающего. Отметим, что импульсные управления рассматривались в монографии Н. Н. Красовского [1] и ряде других работ. Так, в [2] получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в линейной дифференциальной игре двух лиц при условии, что один из участников либо оба используют импульсные стратегии. В работе [3] рассмотрена линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего в классе импульсных стратегий. В работе [4] получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего для обобщенного примера Л.С.Понтрягина при условии, что преследователи используют импульсные стратегии.

В данной работе получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования при условии, что одна из сторон использует импульсные стратегии и убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Работа примыкает к исследованиям [5–10].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leqslant \rho. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y^0, \quad \|v\| \leqslant \sigma. \tag{1.2}$$

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида

$$D = \{z \mid z \in R^k, \langle p_i, z\rangle \leqslant \mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, r\}, \tag{1.3}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — единичные векторы R^k, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа, такие что $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$.

§ 2. Простое групповое преследование в классе импульсных стратегий убегающего

Определение 1. *Импульсной стратегией E* называется отображение Q, ставящее в соответствие моментам $j\tau$, позициям $x_i(j\tau)$, $y(j\tau)$ точку v_j, такую что $\|v_j\| \leqslant \sigma$, где τ — некоторое фиксированное число, $j = 1, 2, \ldots$.

Определение 2. *Контрстратегией преследователя P_i* называется отображение G_i, ставящее в соответствии моментам $j\tau$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, позициям $x_i(j\tau)$, $y(j\tau)$ и точке v_j измеримую функцию $u_j(t)$, определенную на $[j\tau, (j+1)\tau)$ и такую, что $\|u_j(t)\| \leqslant \rho$ для $t \in [j\tau, (j+1)\tau)$.

Определение 3. В игре происходит *поимка*, если существует момент $T > 0$, существуют контрстратегии $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, такие что для любой стратегии Q убегающего E найдутся номер s и момент τ_0 такие, что $x_s(\tau_0) = y(\tau_0)$.

Вместо системы (1.1)–(1.2) рассмотрим систему

$$\dot z_i = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{2.1}$$

Введем функцию λ следующим образом: $\lambda(z_i^0, v) = \dfrac{(z_i^0, v) + \sqrt{(z_i^0, v)^2 + (z_i^0)^2(\sigma^2 - v^2)}}{(z_i^0)^2}$.

Лемма 1. *Пусть $\rho\tau = \sigma$, $r = 1$, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$. Тогда существует N_0 такое, что для всех $N > N_0$ для любых допустимых $v_1, v_2, \ldots, v_N$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} \lambda(v_j, z_i^0) \geqslant n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$, то

$$\delta = \min_v \max\{\lambda(v, z_1^0), \lambda(v, z_2^0), \ldots, \lambda(v, z_n^0), (p, v)\}.$$

Обозначим $J_1 = \{j \mid (p, v_j) < \delta\}$, $\quad J_2 = \{j \mid (p, v_j) \geqslant \delta\}$. Так как набор $v_1, v_2, \ldots, v_N$ допустим, то $y(\tau s) \in D$ для всех $s = 1, 2, \ldots, N$, то есть $(y(\tau s), p) \leqslant \mu_1$. Поэтому $(p, v_1) + (p, v_2) + \cdots + (p, v_s) \leqslant \mu_0 = \mu_1 - (p, y_0)$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{s}(p, v_j) = \sum_{l \in J_2}(p, v_l) + \sum_{l \in J_1}(p, v_l) \geqslant \delta|J_2| - |J_1|.$$

Кроме того, $|J_1| + |J_2| = s$. Из системы $\begin{cases} \delta|J_2| - |J_1| \leqslant \mu_0 \\ |J_1| + |J_2| = s \end{cases}$ следует, что справедливы неравенства $|J_2| \leqslant \dfrac{\mu_0 + s\sigma}{\sigma + \delta}$, $|J_1| \geqslant s - \dfrac{\mu_0 + s\sigma}{\sigma + \delta} = \dfrac{s\delta - \mu_0}{\sigma + \delta}$. Далее имеем $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda(v_j, z_i^0)\right) \geqslant \sum_{j=1}^{N}\max_i \lambda(v_j, z_i^0) \geqslant \sum_{l \in J_1}\max_i \lambda(v_j, z_i^0) \geqslant \delta|J_1| \geqslant \delta\frac{N\delta - \mu_0}{\sigma + \delta}$. Взяв в качестве $N_0 = \left[\frac{n(\sigma+\delta)+\delta\mu_0}{\delta^2}\right] + 1$, получим требуемое неравенство. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\rho\tau = \sigma$, $r = 1$, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$. Тогда существует N_0 такое, что для всех $N > N_0$ для любых допустимых $v_1, v_2, \ldots, v_N$ найдется номер l такой, что*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(v_j, z_l^0) \geqslant 1.$$

Теорема 1. *Пусть $\rho\tau = \sigma$, $r = 1$, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$. Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство. Пусть j — неотрицательное число. Рассмотрим промежуток $[j\tau,(j+1)\tau)$. Обозначим $\lambda_j(z_l^0)=1-\lambda(v_0,z_l^0)-\dots-\lambda(v_{j-1},z_l^0)$. Если для l справедливо неравенство $\lambda_j(z_l^0)-\lambda(v_j,z_l^0)<0$, то управление преследователя P_l задаем в виде $u_l(t)=\dfrac{v_j-\lambda_j(z_l^0)z_l^0}{\tau}$. В противном случае, то есть если $\lambda_j(z_l^0)-\lambda(v_j,z_l^0)\geqslant 0$, полагаем $u_l(t)=\dfrac{v_j-\lambda(v_j,z_l^0)z_l^0}{\tau}$, где $t\in[j\tau,(j+1)\tau)$. Тогда, в силу (2.1), получаем

$$z_l\left((j+1)\tau\right)=x_l(j\tau)+\int_{j\tau}^{(j+1)\tau}u_l(s)ds-(y(j\tau)+v_j)=x_l(j\tau)-y(j\tau)-\lambda(v_j,z_l^0)=\lambda_{j+1}(z_l^0)z_l^0.$$

В силу следствия получаем, что найдутся номер s и число g, такие что $z_s(\tau g)=0$. □

Теорема 2. *Пусть $\rho\tau=\sigma$, $n\geqslant k$ и*

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0,z_2^0,\dots,z_n^0,p_1,\dots,p_r\}. \tag{2.2}$$

Тогда в игре происходит поимка.

Доказательство. Можно считать, что векторы $z_1^0,z_2^0,z_3^0,\dots,z_k^0$ — линейно независимы. Пусть $r>1$, $x\in R^k$. В силу (2.2) [11] векторы $z_1^0,z_2^0,\dots,z_n^0,p_1,\dots,p_r$ образуют положительный базис в R^k. Поэтому существуют положительные $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_r$, такие что

$$0=\alpha_1z_1^0+\dots+\alpha_nz_n^0+\beta_1p_1+\dots+\beta_rp_r.$$

Так как $z_1^0,z_2^0,\dots,z_k^0$ — базис в R^k, то существуют $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ такие, что

$$x=\gamma_1z_1^0+\dots+\gamma_nz_k^0.$$

Отсюда

$$x=\gamma_1z_1^0+\dots+\gamma_kz_k^0+d(\alpha_1z_1^0+\dots+\alpha_nz_n^0+\beta_1p_1+\dots+\beta_rp_r).$$

Взяв $d>0$ так, чтобы для всех $s=1,\dots,k$ выполнялись неравенства $\gamma_s+d\alpha_s>0$, получаем, что x представим в виде

$$x=\alpha_1z_1^0+\dots+\alpha_kz_k^0+dp,$$

где $p=\beta_1p_1+\dots+\beta_rp_r$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_n>0$. Поэтому набор $z_1^0,z_2^0,\dots,z_n^0,p$ образует положительный базис в R^k и следовательно, $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0,z_2^0,\dots,z_n^0,p_1,\dots,p_r\}$. Рассмотрим множество

$$D=\{z|z\in R^n,\langle p,z\rangle\leqslant\mu\},$$

где вектор p определен выше и $\mu=\beta_1\mu_1+\dots+\beta_r\mu_r$. Получаем, что $D\subset D_0$. Тогда по теореме 1 в игре с фазовыми ограничениями D_0 происходит поимка. Следовательно, поимка происходит и в игре с фазовыми ограничениями D. □

§ 3. Простое преследование в классе импульсных стратегий преследователей

В пространстве R^k $(k\geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра с $n+1$ участниками: n преследователей $P_1,P_2,\dots,P_n$ и один убегающий E, законы движения которых имеют вид соответственно (1.1), (1.2). Предполагается, что убегающий E не покидает множества D вида (1.3).

Определение 4. *Импульсной контрстратегией* G_i преследователей P_i называется отображение, ставящее в соответствие набору $\big(j\tau,x_1(j\tau),x_2(j\tau),\dots,x_n(j\tau),y(j\tau),v(t)\big)$, $t\in[j\tau,(j+1)\tau)$ точку u_j^i, такую что $\|u_j^i\|\leqslant\rho$, где τ — некоторое фиксированное число.

Определение 5. Будем говорить, что в игре просходит *поимка*, если существует момент $T>0$ и существуют контрстратегии $G_1,G_2,G_3,\dots,G_n$ преследователей $P_1,P_2,\dots,P_n$, такие что для любой измеримой функции $v(t)$ найдутся номер s и момент τ_0, такие что $x_s(\tau_0)=y(\tau_0)$.

Обозначим $\lambda_i(\tilde{v}_j, z_i^0) = \dfrac{(z_i^0, \tilde{v}_j) + \sqrt{(z_i^0, \tilde{v}_j)^2 + (z_i^0)^2(\rho^2 - \tilde{v}_j^2)}}{(z_2^0)^2}$ где $\tilde{v}_j = \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} v_j(s)ds.$

Лемма 2. *Пусть $\sigma\tau = \rho$ и $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$. Тогда существует N_0 такое, что для всех $N > N_0$ для любых допустимых $v_1, v_2, \ldots, v_N$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} \lambda(\tilde{v}_j, z_i^0) \geqslant n.$$

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству леммы 1.

Следствие 2. *Пусть $\rho = \sigma\tau$, $r = 1$, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$. Тогда существует N_0 такое, что для каждой измеримой допустимой функции $v(t)$, $t \in [0, \tau N_0]$ найдется номер $l \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что*

$$\sum_{j=1}^{N_0} \lambda(\tilde{v}_j, z_l^0) \geqslant 1.$$

Теорема 3. *Пусть $\sigma\tau = \rho$ и $r = 1$, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p\}$. Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство. Пусть j — неотрицательное число. Рассмотрим промежуток $[j\tau, (j+1)\tau)$. Обозначим $\tilde{\lambda}_j(z_l^0) = 1 - \lambda(\tilde{v}_0, z_l^0) - \cdots - \lambda(\tilde{v}_{j-1}, z_l^0)$. Если для l справедливо неравенство $\tilde{\lambda}_j(z_l^0) - \lambda(\tilde{v}_j, z_l^0) < 0$, то управление преследователя P_l задаем в виде

$$u_l(t) = \tilde{v}_j - \tilde{\lambda}_j(z_l^0) z_l^0.$$

В противном случае, то есть если $\tilde{\lambda}_j(z_l^0) - \lambda(\tilde{v}_j, z_l^0) \geqslant 0$, полагаем $u_l(t) = \tilde{v}_j - \lambda(v_j, z_l^0) z_l^0$, где $t \in [j\tau, (j+1)\tau)$. Тогда, в силу (2.1), получаем

$$x_l\left((j+1)\tau\right) - y_l\left((j+1)\tau\right) = z_l^0(1 - \lambda(\tilde{v}_0, z_l^0) - \cdots - \lambda(\tilde{v}_{j-1}, z_l^0)).$$

В силу следствия получаем, что найдутся номер s и число g, такие что $x_s(\tau g) = y(\tau g)$.

Теорема 4. *Пусть $\rho = \sigma\tau$, $n \leqslant k$ и $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, p_1, \ldots, p_r\}$. Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Чикрий А.А., Мачихин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 212–224.
3. Кривонос Ю.Г., Мачихин И.И., Чикрий А.А. Динамические системы с разрывными траекториями. Киев: Наук. думка, 2005.
4. Петров Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 38–44.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009.
6. Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 74–83.
7. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
8. Банников А.С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7.

9. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. № 2. С. 234–241.
10. Виноградова М.Н., О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8.
11. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

Поступила в редакцию 07.05.2012

Котлякова Елена Владимировна, старший преподаватель, кафедра вычислительной механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kotlyachkova@milan2000.ru

E. V. Kotlyachkova

Simple pursuit with phase constraints in a class of impulse strategies

Keywords: differential game, group pursuit, impulse strategy.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

The present paper deals with a simple group pursuit problem in a class of impulse strategies. The first part considers the impulse strategy of an evader with phase restrictions on the evader's state. It is assumed that the evader does not leave a convex polyhedral set. We obtain sufficient conditions for the capture of the evader by one of the pursuers. The second part deals with the impulse strategies of pursuers. Sufficient conditions for the capture of an evader by one of the pursuers under the assumption that the evader does not leave a convex polyhedral set, are stated.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of control of motion), Moscow: Nauka, 1968.
2. Chikrii A.A. Machikhin I.I. Linear differential games with impulse control of players, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 212–224.
3. Krivonos Yu. G., Machikhin I.I., Chikrii A.A. *Dinamicheskie sistemy s razryvnymi traektoriyami* (Dynamical systems with discontinuous trajectories), Kiev: Nauk. Dumka, 2005.
4. Petrov N.N. The problem of group pursuit strategies in a class of impulsive pursuit, *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2009, no. 1, pp. 38–44.
5. Blagodatskikh A.I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Confict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
6. Petrov N.N. To the time-dependent problem of group pursuit with phase constraints, *Mathematical Game Theory and its Applications*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 74–83.
7. Bannikov A.S., Petrov N.N. On non-stationary problem of group pursuit with phase restrictions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 40–51.
8. Bannikov A.S. About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 3–7.
9. Vagin D.A., Petrov N.N. On a problem of group pursuit with phase constraints, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2002, no. 2, pp. 234–241.
10. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 3–8.
11. Petrov N.N. Controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617.

Received 07.05.2012

Kotlyachkova Elena Vladimirovna, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kotlyachkova@milan2000.ru