УДК 517.958+517.984.5

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ИЗ ПРОСТРАНСТВА МОРРИ [1]

Рассматривается периодический оператор Шредингера $\widehat{H}_A + V$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. На векторный потенциал A накладываются ограничения, которые, в частности, выполнены, если потенциал A принадлежит классу Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $q > \frac{n-1}{2}$, а также в случае, когда $\sum \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} < +\infty$, где A_N — коэффициенты Фурье потенциала A. Доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера $\widehat{H}_A + V$ для скалярных потенциалов V из пространства Морри $\mathfrak{L}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$, для которых

$$\overline{\lim_{r \to +0}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^2 \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |V(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon_0 \,,$$

где число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p;A) > 0$ зависит от векторного потенциала A, $B_r(x)$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, $v(B_r)$ — n-мерный объем шара $B_r = B_r(0)$. Пусть K — элементарная ячейка решетки периодов потенциалов A и V, K^* — элементарная ячейка обратной решетки. Оператор $\widehat{H}_A + V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов $\widehat{H}_A(k) + V$, $k \in 2\pi K^*$, действующих в $L^2(K)$. Последние операторы рассматриваются также при комплексных векторах $k + ik' \in \mathbb{C}^n$. При доказательстве абсолютной непрерывности спектра оператора $\widehat{H}_A + V$ используется метод Томаса. Доказательство опирается на следующую оценку (см. теорему 4 и замечание после нее):

$$\| \, |\widehat{H}_0(k+ik')|^{-1/2} \big(\widehat{H}_A(k+ik')+V-\lambda\big)\varphi \, \|_{L^2(K)} \geqslant \widetilde{C}_1 \, \| \, |\widehat{H}_0(k+ik')|^{1/2}\varphi \, \|_{L^2(K)} \,, \quad \varphi \in D(\widehat{H}_A(k+ik')+V),$$

которая справедлива при определенным образом выбираемых комплексных векторах $k + ik' \in \mathbb{C}^n$ (зависящих от A, V и числа $\lambda \in \mathbb{R}$) с достаточно большой мнимой частью k', где $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_1\,(n;A) > 0$ и $\widehat{H}_0(k + ik')$ — оператор $\widehat{H}_A(k + ik')$ при $A \equiv 0$.

Ключевые слова: оператор Шредингера, абсолютная непрерывность спектра, периодический потенциал, пространство Морри.

Введение

Рассмотрим периодический оператор Шредингера

$$\widehat{H}_A + V = \sum_{j=1}^{n} \big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\big)^2 + V, \tag{0.1}$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, где векторный и скалярный потенциалы $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — периодические функции с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

Координаты в $\mathbb{R}^n$ задаются относительно некоторого ортогонального базиса $\{\mathcal{E}_j\}$. Пусть $\{E_j\}$ — базис решетки Λ, Λ^* — обратная решетка с базисными векторами E^*_j, удовлетворяющими условиям $(E^*_j, E_l) = \delta_{jl}$ (где δ_{jl} — символ Кронекера),

$$K = \Big\{x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j E_j : 0 \leqslant \xi_j < 1,\ j = 1, \ldots, n\Big\} \ -$$

элементарная ячейка решетки Λ. Скалярные произведения и нормы в пространствах $\mathbb{C}^n$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(K)$ вводятся обычным образом (как правило, в обозначениях пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ не указывается), при этом скалярные произведения предполагаются линейными по второму аргументу; $|.|$ и $(.,.)$ — длина и скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$. Пусть $H^q(\mathbb{R}^n)$ — класс Соболева

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

порядка $q \geqslant 0$, $\widetilde{H}^q(K)$ — множество функций $\varphi : K \to \mathbb{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Функции, определенные на элементарной ячейке K, в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^n$. Коэффициенты Фурье функций $\varphi \in L^1(K)$ обозначаются через

$$\varphi_N = v^{-1}(K)\int_K \varphi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)}\, dx\,, \quad N \in \Lambda^*,$$

где $v(.) = v_n(.)$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $B_r(x) = B^n_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, $B_r \doteq B_r(0)$; $S^{n-1}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$ — сфера радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, $S^{n-1} \doteq S^{n-1}_1(0)$.

Для векторов $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ положим $S^{n-2}[x] = \{\widetilde{e} \in S^{n-1} : (\widetilde{e}, x) = 0\}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность четных знакопеременных борелевских мер μ на $\mathbb{R}$ (с конечной полной вариацией) таких, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\,i\xi t}\, d\mu(t) = 1$$

для всех $\xi \in (-\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(\mu) > 0$. Множество $\mathfrak{M}$ содержит меру Дирака δ.

В работе рассматриваются периодические векторные потенциалы $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$), которые для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ удовлетворяют следующим двум условиям:

(1_γ) $A \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \{[0,1] \ni \xi \mapsto A(x-\xi\gamma)\} \in L^2([0,1];\mathbb{R}^n)$$

непрерывно;

(2_γ) существует мера $\mu \in \mathfrak{M}$ такая, что

$$\max_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\ \max_{\widetilde{e}\,\in\, S^{n-2}[\gamma]} \left| A_0 - \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)\, \int_0^1 A(x-\xi\gamma - t\widetilde{e})\, d\xi \right| < \frac{\pi}{|\gamma|}\,, \tag{0.2}$$

где $A_0 = v^{-1}(K)\displaystyle\int_K A(x)\, dx\,.$

При выполнении условия (1_γ) периодическая с решеткой периодов Λ функция

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto A(\gamma; x) \doteq \int_0^1 A(x-\xi\gamma)\, d\xi$$

является непрерывной функцией, принимающей постоянные значения вдоль направления вектора γ;

$$A(\gamma;x) = \sum_{N\,\in\,\Lambda^* :\,(N,\gamma)\,=\,0} A_N\, e^{\,2\pi i\,(N,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для периодического векторного потенциала $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, условие (1_γ) выполнено (для любого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$), если $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-1$. Если $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-2$, то для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ выполняется условие (2_γ) (при изменении значений функции A на множестве нулевой лебеговой меры и при выборе некоторой меры $\mu \in \mathfrak{M}$, для которой $\frac{d\mu}{dt} \in C^\infty(\mathbb{R})$) [1, 2].

Для меры Дирака $\mu = \delta$ (в условии (2_γ)) неравенство (0.2) означает, что

$$\|A_0 - A(\gamma;.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} < \frac{\pi}{|\gamma|}\,.$$

Последнее неравенство выполняется при условии

$$\sum_{N\,\in\,\Lambda^*\backslash\{0\} :\,(N,\gamma)\,=\,0} \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} < \frac{\pi}{|\gamma|}\,,$$

которое имеет место при соответствующем выборе вектора $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$, если

$$\sum_{N \in \Lambda^*} \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} < +\infty$$

(см. [1, 2]).

Если периодический векторный потенциал $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$ удовлетворяет условию (1_γ), то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C(\varepsilon; n, A) > 0$ такое, что для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\| \, |A| \varphi \, \| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\|^2 \right)^{1/2} + C(\varepsilon; n, A) \, \|\varphi\| \tag{0.3}$$

(см., например, [3, 4]).

Через $\mathfrak{L}^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$, где $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{p}$, обозначим пространство Морри, состоящее из измеримых функций $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, что для любого ограниченного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$

$$\sup_{0 < r \leqslant 1} \sup_{x \in \mathcal{K}} r^{\alpha} \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{F}(y)|^p \, dy \right)^{1/p} < +\infty \, .$$

Пространство $F^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \doteq \mathfrak{L}^{2, p}(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}$, $n \geqslant 3$, в ряде статей (см., например, [5, 6]) называется также пространством Фефферманa–Фонга. Пусть $\mathfrak{L}^{\alpha, p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ — подпространство пространства $\mathfrak{L}^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из измеримых функций $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|\mathcal{F}\|_{\alpha, p} \doteq \sup_{0 < r \leqslant 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^{\alpha} \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{F}(y)|^p \, dy \right)^{1/p} < +\infty \, .$$

Периодические функции из пространства $\mathfrak{L}^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ принадлежат $\mathfrak{L}^{\alpha, p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$. Для функций $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}^{\alpha, p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ определим функции

$$(0, 1] \ni \tau \mapsto \mathfrak{F}_{\alpha, p}(\mathcal{F}; \tau) = \sup_{0 < r \leqslant \tau} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^{\alpha} \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{F}(y)|^p \, dy \right)^{1/p} .$$

Функция $\tau \mapsto \mathfrak{F}_{\alpha, p}(\mathcal{F}; \tau) \in [0, +\infty)$ не убывает, $\|\mathcal{F}\|_{\alpha, p} = \mathfrak{F}_{\alpha, p}(\mathcal{F}; 1)$ и существует предел

$$\|\mathcal{F}\|^*_{\alpha, p} \doteq \lim_{\tau \to +0} \mathfrak{F}_{\alpha, p}(\mathcal{F}; \tau) \, ,$$

который будем также считать значением функции $\tau \mapsto \mathfrak{F}_{\alpha, p}(\mathcal{F}; \tau)$ при $\tau = 0$.

Справедливо равенство $\mathfrak{L}^{n/p, p}(\mathbb{R}^n) = L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пространство $\mathfrak{L}^{n/p, p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством $L^p_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, состоящим из функций $\mathcal{F} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$(v_n(B_1))^{1/p} \, \|\mathcal{F}\|_{n/p, p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B_1(x)} |\mathcal{F}(y)|^p \, dy \right)^{1/p} < +\infty \, .$$

Пусть $L^p_{w, \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, — пространство измеримых функций $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, что для любого ограниченного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$

$$\sup_{x \in \mathcal{K}} \sup_{t > 0} t \left(v(\{y \in B_1(x) : |\mathcal{F}(y)| > t\}) \right)^{1/p} < +\infty \, ,$$

$L^p_{w, \mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ — подпространство пространства $L^p_{w, \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из измеримых функций $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|\mathcal{F}\|^{(w)}_p \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{t > 0} t \left(v(\{y \in B_1(x) : |\mathcal{F}(y)| > t\}) \right)^{1/p} < +\infty \, .$$

Периодические функции из пространства $L^p_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ принадлежат $L^p_{w,\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$. Для функций $\mathcal{F} \in L^p_{w,\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ также обозначим

$$\|\mathcal{F}\|_p^{(w),\,*} = \lim_{r\to+0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} t\,\big(v(\{y\in B_r(x) : |\mathcal{F}(y)| > t\})\big)^{1/p},$$
$$\|\mathcal{F}\|_p^{(w),\,\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t\,\big(v(\{y\in B_1(x) : |\mathcal{F}(y)| > t\})\big)^{1/p},$$

при этом $\|\mathcal{F}\|_p^{(w),\,*} \leqslant \|\mathcal{F}\|_p^{(w),\,\infty} \leqslant \|\mathcal{F}\|_p^{(w)}$.

При $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p < \frac{n}{2}$ имеет место вложение $L^{n/2}_{w,\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и для любой функции $\mathcal{F} \in L^{n/2}_{w,\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство $\|\mathcal{F}\|^*_{2,\,p} \leqslant C_1\,\|\mathcal{F}\|^{(w),\,*}_{n/2}$, где $C_1 = C_1(n,p) > 0$.

Если периодический с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, скалярный потенциал V принадлежит пространству Морри $\mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, где $p \in (1, \frac{n}{2}]$, то найдется число $C_2 = C_2(n,p) > 0$ такое, что для любых $\delta > 0$ и $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$|(\varphi, V\varphi)| \leqslant C_2\,(\delta + \|V\|^*_{2,\,p})\,\|\nabla\varphi\|^2 + C_2'\,\|\varphi\|^2, \tag{0.4}$$

где $C_2' = C_2'(n,p;\delta,V) > 0$ (см., например, [7]). Более сильный вариант оценки (0.4) будет также сформулирован далее в виде теоремы 2, доказательство которой опирается на оценку Феффермана–Фонга из [8] и частично следует доказательству теоремы 2.6 из [7]. Если $\|V\|^*_{2,\,p} < C_2^{-1}$ и периодический векторный потенциал A удовлетворяет условию (1_γ) (для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$), то из (0.3) и (0.4) следует, что квадратичная форма

$$W_{A,\,V}(\varphi,\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \big\|\big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\big)\varphi\big\|^2 + (\varphi, V\varphi), \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

замкнута и ограничена снизу. Поэтому форме $W_{A,\,V}$ соответствует самосопряженный оператор (0.1) с некоторой областью определения $D(\widehat{H}_A + V) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ [9].

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 3$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$. Предположим, что периодический с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ векторный потенциал $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для некоторого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ удовлетворяет условиям (1_γ) и (2_γ). Тогда найдется число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p;A) \in (0, C_2^{-1})$ такое, что для любого периодического скалярного потенциала $V \in \mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ с той же решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\|V\|^*_{2,\,p} \leqslant \varepsilon_0$, спектр оператора Шредингера $\widehat{H}_A + V$ абсолютно непрерывен.*

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 3$. Предположим, что скалярный и векторный потенциалы $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — периодические функции с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$, и $A \in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n-1$. Тогда при условии $\|V\|^*_{2,\,p} \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p;A) \in (0, C_2^{-1})$, спектр оператора Шредингера (0.1) абсолютно непрерывен.*

При доказательстве теоремы 1 используется метод Томаса, предложенный в [10] для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с периодическим скалярным потенциалом $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Этот метод применяется во всех последующих работах об абсолютной непрерывности спектра периодических эллиптических дифференциальных операторов. Рассматриваемому вопросу посвящены обзорные статьи [11, 12]. Двумерный периодический оператор Шредингера и его обобщения рассматривались в [13–19] (см. также ссылки в этих работах). В частности, для оператора (0.1) при $n = 2$ доказана абсолютная непрерывность спектра, если квадратичная форма $(\varphi, V\varphi)$ имеет нулевую грань относительно квадратичной формы $\sum_j \big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\big\|^2$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, и для векторного потенциала A при всех $\varepsilon > 0$ выполняется оценка (0.3) [18, 19]. В [9] результаты работы [10] были обобщены на n-мерные операторы Шредингера с периодическим скалярным потенциалом V, для которого $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $n = 2$, 3 и

$\sum_{N\in\Lambda^*}|V_N|^q<+\infty$, $1\leqslant q<\frac{n-1}{n-2}$, при $n\geqslant 4$. Сильные результаты для периодического оператора Шредингера при $A\equiv 0$ (и $n\geqslant 3$) были получены в работах [7, 15, 20]. В [15] при $n=2$, 3 рассматривался скалярный потенциал V из класса Като. В [20] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) при $n\geqslant 3$ (и при $A\equiv 0$), если $V\in L^{n/2}_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $\|V\|^{(w),\,\infty}_{n/2}\leqslant\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2=\varepsilon_2(n)>0$. Результаты работы [20] улучшены в статье [7], в которой при $n\geqslant 3$ (и также при $A\equiv 0$) рассматривались периодические скалярные потенциалы $V\in\mathfrak{L}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, $p\in(\frac{n-1}{n},\frac{n}{2}]$, для которых $\|V\|^*_{2,\,p}\leqslant\varepsilon_3$, где $\varepsilon_3=\varepsilon_3(n,p)>0$. В [15, 20] (см. также [21]) и [7] использовались L^p-L^q и весовые L^2 равномерные соболевские неравенства на торе $\mathbb{R}^n/\Lambda$. Такого рода оценки применялись в случае пространства $\mathbb{R}^n$ в работах [22] и [5, 6] для доказательства единственности продолжения решений эллиптических дифференциальных уравнений и неравенств второго порядка. В [23] при $n\geqslant 3$ построены примеры функций $V\in L^{n/2}_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых существуют нетривиальные решения уравнения $(-\Delta+V)\varphi=0$ с компактными носителями. Поэтому (при $n\geqslant 3$) существуют периодические потенциалы $V\in L^{n/2}_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (с любой решеткой периодов), для которых оператор Шредингера $-\Delta+V$ имеет собственные значения (бесконечной кратности).

Если для скалярного потенциала V при $n\geqslant 3$ получены оптимальные условия в шкале пространств $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (и $L^p_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$), обеспечивающие абсолютную непрерывность спектра периодического оператора Шредингера, то известные условия для векторного потенциала A в общем случае далеки от оптимальных (предполагается, что достаточно потребовать выполнения условия $A\in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$). При $n\geqslant 3$ абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) была установлена А. Соболевым [24] для периодических потенциалов $V\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p>n-1$, и $A\in C^{2n+3}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Это утверждение было в дальнейшем усилено: в [11] рассматривался скалярный потенциал $V\in L^p_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которого $\|V\|^{(w),\,\infty}_p=0$, где $p=\frac{n}{2}$ при $n=3$, 4 и $p=n-2$ при $n\geqslant 5$, и в [12] ослаблено ограничение на векторный потенциал A до условия $A\in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q>3n-2$. В [2, 25] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора $\widehat{H}_A+V$, если для векторного потенциала $A\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ существует вектор $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$, для которого выполнено условие (2_γ) (что имеет место в случае $A\in H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q>n-2$, а также при $\sum_{N\in\Lambda^*}\|A_N\|_{\mathbb{C}^n}<+\infty$), и $V\in L^p_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\|V\|^{(w),\,\infty}_p\leqslant C_3$, где $p=\frac{n}{2}$ при $n=3$, 4, 5, 6 и $p=n-3$ при $n\geqslant 7$, $C_3=C_3(n,\Lambda;A)>0$. Если периодический оператор Шредингера (0.1) имеет решетку периодов $\Lambda=\mathbb{Z}^n$, $n\geqslant 3$, и инвариантен при замене переменной $x_1\mapsto -x_1$, то его спектр абсолютно непрерывен в случае $A\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $q>n$, и $V\in L^{n/2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ [26]. Периодический оператор Шредингера (0.1) и его обобщения рассматривались также в [21, 27–29].

В настоящей работе при доказательстве теоремы 1 используются оценки (см. теоремы 7 и 8), являющиеся следствием неравенства Томаса–Стейна для сужения преобразования Фурье на единичную сферу $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$. Эти оценки, а также утверждения, полученные для периодического магнитного оператора Дирака [30, 31], позволяют рассмотреть периодический оператор Шредингера (0.1) с векторным потенциалом A и со скалярным потенциалом V из пространства Морри $\mathfrak{L}^{2,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p\in(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}]$. Теорема 1 усиливает результаты работ [7] и [4]. В статье [4] (при $n\geqslant 3$) на векторный потенциал A накладывались те же условия (1_γ) и (2_γ) (для некоторого вектора $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$), что и в теореме 1, но выбирался периодический скалярный потенциал $V\in L^{n/2}_{w,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которого $\|V\|^{(w),\,\infty}_{n/2}\leqslant C_4$, где $C_4=C_4(n;A)>0$. В [32] при $n=3$, 4 доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера $\widehat{H}_A+V$ с условиями (1_γ) и (2_γ) на векторный потенциал A и в случае, когда функция $|V|$ имеет грань $\leqslant C_5$ относительно свободного оператора Шредингера $\widehat{H}_0=-\Delta$ в смысле квадратичных форм при $n=3$, где $C_5=C_5(A)>0$, и скалярный потенциал V имеет грань $\leqslant C_6$ относительно оператора $\widehat{H}_0=-\Delta$ при $n=4$, где $C_6=C_6(A)>0$. Если $A\equiv 0$, то числа C_5 и C_6 — универсальные константы.

Доказательство теоремы 1, являющейся основным результатом работы, приведено в § 2. В § 1 доказываются теоремы 2 и 3, которые необходимы в дальнейшем. В § 3 приведены вспомогательные результаты. В § 4 доказывается теорема 6 из § 2.

§ 1. Теорема 2 и ее доказательство

Пусть $\mathbb{F}$ — совокупность неубывающих функций $[0,1] \ni \tau \mapsto \mathfrak{F}(\tau) \in [0,+\infty)$, непрерывных при $\tau = 0$. Для любой функции $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$ обозначим через $\mathfrak{L}^{\alpha,p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{p}$, множество функций $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}^{\alpha,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, для которых $\mathfrak{F}_{\alpha,p}(\mathcal{F};\tau) \leqslant \mathfrak{F}(\tau)$ при всех $\tau \in [0,1]$ (при $\tau = 0$ последнее неравенство означает, что $\|\mathcal{F}\|^*_{\alpha,p} \leqslant \mathfrak{F}(0)$).

Если $\mathcal{V}, \mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — измеримые функции, для которых $|\mathcal{V}(x)| = |\mathcal{W}(x)|^2$ при почти всех (п.в.) $x \in \mathbb{R}^n$, то $\mathcal{V} \in \mathfrak{L}^{2,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, \frac{n}{2}]$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$. Более того, для всех $\tau \in [0,1]$

$$\mathfrak{F}_{2,p}(\mathcal{V};\tau) = \mathfrak{F}^2_{1,2p}(\mathcal{W};\tau).$$

В частности, при $\tau = 1$ и $\tau = 0$ получаем $\|\mathcal{V}\|_{2,p} = \|\mathcal{W}\|^2_{1,2p}$, $\|\mathcal{V}\|^*_{2,p} = (\|\mathcal{W}\|^*_{1,2p})^2$.

Через $C_0(\mathbb{R}^m)$, $C^1_0(\mathbb{R}^m)$ и $C^\infty_0(\mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$ далее обозначаются пространства непрерывных, непрерывно дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ с компактным носителем $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}$. Пусть $s_{n-1}(.)$ — (инвариантная при ортогональных преобразованиях) поверхностная мера на S^{n-1}, $\sigma_{n-1} = s_{n-1}(S^{n-1})$ — $(n-1)$-мерный объем единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для любых $p \in (1, \frac{n}{2}]$, $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$ и $\delta > 0$ существует константа $\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_2(n,p;\delta,\mathfrak{F}(.)) > 0$ такая, что для всех функций $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и всех $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{W}\varphi\|^2 \leqslant C^2_2\,(\delta + \mathfrak{F}^2(0))\,\|\nabla\varphi\|^2 + \widetilde{C}^2_2\,\|\varphi\|^2, \tag{1.1}$$

где $C_2 = C_2(n,p) > 0$.

Замечание 1. Из теоремы 2 следует неравенство (0.4) с той же константой C_2 и с константой $C'_2 = \widetilde{C}_2(n,p;\delta,\mathfrak{F}^{1/2}_{2,p}(V;.))$.

Доказательство теоремы 2. Для функции $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ определим потенциал Рисса

$$I_1(\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как для функций $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ справедливо включение $|\mathcal{W}|^2 \in \mathfrak{L}^{2,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ и любого компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ выполняется оценка Феффермана–Фонга (приведенная в [7] и следующая из результатов работы [8])

$$\int_{\mathcal{K}} |I_1(\psi)(y)|^2\,|\mathcal{W}(y)|^2\,dy \leqslant$$
$$\leqslant C^2_7 \left(\sup_{r>0}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} r^2 \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{W}(y)|^{2p} \chi_{\mathcal{K}}(y)\,dy \right)^{1/p} \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)|^2\,dy\,, \tag{1.2}$$

где $C_7 = C_7(n,p) > 0$ (и $\chi_{\mathcal{K}}(.)$ — характеристическая функция множества $\mathcal{K}$). Если $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\varphi(x)| \leqslant \sigma^{-1}_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\nabla\varphi(y)\|_{\mathbb{C}^n}}{|x-y|^{n-1}}\,dy\,.$$

Поэтому для любых функции $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n) \subset L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и функции $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, для которой $\mathrm{supp}\,\varphi \subseteq B_R(\widetilde{x})$ при некоторых $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ и $R > 0$, выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{W}(y)|^2\,|\varphi(y)|^2\,dy \leqslant \sigma^{-2}_{n-1} \int_{B_R(\widetilde{x})} |I_1(|\nabla\varphi|)(y)|^2\,|\mathcal{W}(y)|^2\,dy\,. \tag{1.3}$$

С другой стороны, для каждого числа $R \in (0,1]$

$$\sup_{r \geqslant R}\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^2 \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{W}(y)|^{2p} \chi_{B_R(\widetilde{x})}(y)\, dy \right)^{1/p} \leqslant R^2 \left(\frac{1}{v(B_R)} \int_{B_R(\widetilde{x})} |\mathcal{W}(y)|^{2p}\, dy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<r\leqslant R}\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^2 \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{W}(y)|^{2p}\, dy \right)^{1/p} = \mathfrak{F}^2_{1,\,2p}(\mathcal{W}; R)\,.$$

Следовательно, из оценки Феффермана–Фонга (1.2) и оценки (1.3) для всех функций $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и всех функций $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B_R(\widetilde{x})$ при некоторых $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ и $R \in (0,1]$, вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{W}(y)|^2\, |\varphi(y)|^2\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_2^2 \left(\sup_{0<r\leqslant R}\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^2 \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |\mathcal{W}(y)|^{2p}\, dy \right)^{1/p} \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\varphi(y)\|^2_{\mathbb{C}^n}\, dy =$$

$$= C_2^2\, \mathfrak{F}^2_{1,\,2p}(\mathcal{W}; R) \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\varphi(y)\|^2_{\mathbb{C}^n}\, dy\,, \tag{1.4}$$

где $C_2 = C_2(n,p) = \sigma_{n-1}^{-1}\, C_7$. Теперь для заданного числа $\delta > 0$ выберем число $R = R(\delta, \mathfrak{F}(.)) \in (0,1]$ так, что

$$\mathfrak{F}^2(R) \leqslant \frac{\delta}{2} + \mathfrak{F}^2(0).$$

Тогда для всех функций $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и всех функций $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B_R(\widetilde{x})$ при некотором $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, где $R = R(\delta, \mathfrak{F}(.))$, из (1.4) получаем

$$\|\mathcal{W}\varphi\|^2 \leqslant C_2^2 \left(\frac{\delta}{2} + \mathfrak{F}^2(0) \right) \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)}\,. \tag{1.5}$$

Выберем (и зафиксируем) неотрицательную функцию $\Psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\operatorname{supp}\Psi \subseteq B_{\sqrt{n}}(0)$ и $\sum_{N \in \mathbb{Z}^n} \Psi^2(y-N) = 1$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ число векторов $N \in \mathbb{Z}^n$, для которых $\Psi(y-N) \neq 0$, меньше $J(n) \doteq (1+2\sqrt{n})^n$. Для всех $N \in \mathbb{Z}^n$ определим функции

$$\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \psi(N;y) \doteq \Psi\left(\frac{\sqrt{n}y}{r} - N \right)$$

(где $R = R(\delta, \mathfrak{F}(.))$). Имеем

$$\operatorname{supp}\psi(N;.) \subseteq B_R\left(\frac{R}{\sqrt{n}}\, N \right).$$

Пусть $\widetilde{\delta} \doteq (1 + 2\delta^{-1}\,\mathfrak{F}^2(0))^{-1}$. Для любых функций $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ из (1.5) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{W}\varphi\|^2 = \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{W}(y)|^2\, |\psi(N;y)\varphi(y)|^2\, dy \leqslant C_2^2 \left(\frac{\delta}{2} + \mathfrak{F}^2(0) \right) \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} \|\nabla(\psi(N;.)\varphi(.))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)},$$

при этом

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}^n} \|\nabla(\psi(N;.)\varphi(.))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant (1+\widetilde{\delta}) \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi^2(N;y)\, \|\nabla\varphi(y)\|^2_{\mathbb{C}^n}\, dy + (1+\widetilde{\delta}^{-1}) \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\psi(N;y)\|^2_{\mathbb{C}^n}\, |\varphi(y)|^2\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (1+\widetilde{\delta})\, \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)} + (1+\widetilde{\delta}^{-1})\, nJ(n)\, R^{-2}(\delta, \mathfrak{F}(.)) \left(\max_{x \in \mathbb{R}^n} \|\nabla\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^n} \right)^2 \|\varphi\|^2.$$

Следовательно, для всех функций $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ выполняется оценка (1.1), в которой константа $\widetilde{C}_2$ выбирается в виде

$$\widetilde{C}_2 = C_2(\delta + \mathfrak{F}^2(0))^{1/2}\,(1 + 2\delta^{-1}\mathfrak{F}^2(0))^{1/2}\,(nJ(n))^{1/2}\,R^{-1}(\delta, \mathfrak{F}(.))\left(\max_{x\in\mathbb{R}^n}\|\nabla\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^n}\right).$$

Так как функции $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ образуют плотное множество в пространстве $H^1(\mathbb{R}^n)$, то неравенство (1.1) по непрерывности распространяется на все функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 3$, $p \in (1, \frac{n}{2}]$ и $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}$. Тогда для любых $\delta > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$, любой периодической с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ функции $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,2p}_{\mathfrak{F}(.),\,\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и любой функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{W}\varphi\|^2_{L^2(K)} \leqslant C_2^2\,(\delta + \mathfrak{F}^2(0))\,\|(k - i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^n)} + \widetilde{C}_2^2\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,, \tag{1.6}$$

где $C_2 = C_2(n,p) > 0$ и $\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_2(n,p;\delta,\mathfrak{F}(.)) > 0$ — константы из теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{Y} \in C^\infty(\mathbb{R})$ — какая-либо вещественнозначная функция, для которой $\mathcal{Y}(\xi) = 0$ при $\xi \leqslant 0$ и $\mathcal{Y}(\xi) = 1$ при $\xi \geqslant 1$. Для всех $m \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(m;x) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{Y}(x_j + 1)\,\mathcal{Y}(m + 1 - x_j).$$

Пусть $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование такое, что $\widehat{\mathcal{L}}E_j = \mathcal{E}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда для любой функции $\varphi \in H^1(K)$ и любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{R}^n$ функция

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \varphi(m;k;x) \doteq f(m;\widehat{\mathcal{L}}x)\,e^{\,i\,(k,x)}\,\varphi(x)$$

принадлежит пространству $H^1(\mathbb{R}^n)$ и при $m \to +\infty$ имеем

$$m^{-n}\,\|\mathcal{W}(.)\varphi(m;k;.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to \|\mathcal{W}\varphi\|^2_{L^2(K)}\,, \quad m^{-n}\,\|\varphi(m;k;.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to \|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,,$$

$$m^{-n}\,\|\nabla\varphi(m;k;.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)} \to \|(k - i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^n)}\,.$$

Поэтому (для любых $\delta > 0$ и $k \in \mathbb{R}^n$) оценка (1.6) (с теми же константами C_2 и $\widetilde{C}_2$) следует из оценки (1.1). $\square$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $k \in \mathbb{R}^n$, $e \in S^{n-1}$, $\varkappa \in \mathbb{R}$. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$W_A(k + i\varkappa e;\psi,\varphi) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j - i\varkappa e_j\big)\psi, \big(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j + k_j + i\varkappa e_j\big)\varphi\Big)$$

с областью определения $Q(W_A(k+i\varkappa e;.,.)) = \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$; $\psi,\,\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$. Так как для векторного потенциала A (для любого $\varepsilon > 0$) выполняется неравенство (0.3), то $W_A(k+i\varkappa e;.,.)$ — замкнутая и секториальная форма, порождающая m-секториальный оператор $\widehat{H}_A(k + i\varkappa e)$, $D(\widehat{H}_A(k + i\varkappa e)) \subset \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$ [33, 34]. С другой стороны, так как рассматриваются скалярные потенциалы V из пространства $\mathfrak{L}^{2,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$, для которых $\|V\|^*_{2,p} < C_2^{-1}$, то из теоремы 3 получаем, что форма $(\varphi, V\varphi)$ имеет грань < 1 относительно форм $\|(k-i\nabla)\varphi\|^2_{L^2(K;\mathbb{C}^n)}$ и, следовательно (см. оценку (0.3)), относительно форм $W_A(k;\varphi,\varphi)$, $k \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \widetilde{H}^1(K) \subset L^2(K)$. Поэтому полуторалинейная форма

$$W_{A,V}(k + i\varkappa e;\psi,\varphi) \doteq W_A(k + i\varkappa e;\psi,\varphi) + (\psi, V\varphi), \quad \psi,\,\varphi \in Q(W_{A,V}(k + i\varkappa e;.,.)) = \widetilde{H}^1(K),$$

также является замкнутой и секториальной формой, порождающей m-секториальный оператор $\widehat{H}_A(k+i\varkappa e)+V$ (с областью определения $D(\widehat{H}_A(k+i\varkappa e)+V)\subset \widetilde{H}^1(K)\subset L^2(K)$, не зависящей от комплексного вектора $k+i\varkappa e\in\mathbb{C}^n$). Если $A\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, то

$$\widehat{H}_A(k+i\varkappa e)=\sum_{j=1}^n\bigl(-i\frac{\partial}{\partial x_j}-A_j+k_j+i\varkappa e_j\bigr)^2$$

и $D(\widehat{H}_A(k+i\varkappa e))=\widetilde{H}^2(K)$. В частности, при $A\equiv 0$ будем обозначать

$$\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)=\sum_{j=1}^n\bigl(-i\frac{\partial}{\partial x_j}+k_j+i\varkappa e_j\bigr)^2.$$

Операторы $\widehat{H}_A(k)+V$ (при $\varkappa=0$) являются (ограниченными снизу) самосопряженными операторами с компактной резольвентой и, следовательно, с дискретным спектром. Для фиксированных векторов $k\in\mathbb{R}^n$ и $e\in S^{n-1}$ операторы $\widehat{H}_A(k+\zeta e)+V$, $\zeta\in\mathbb{C}$, образуют самосопряженное аналитическое семейство типа (B) [33].

Оператор $\widehat{H}_A+V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus}\bigl(\widehat{H}_A(k)+V\bigr)\,\frac{dk}{(2\pi)^n v(K^*)}\,, \tag{2.1}$$

где

$$K^*=\bigl\{y=\sum_{j=1}^n\eta_jE_j^*:0\leqslant\eta_j<1,\ j=1,\dots,n\bigr\}\ -$$

элементарная ячейка решетки Λ^*. Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [7,11,20]. Из результатов работы [35] следует, что сингулярный спектр оператора $\widehat{H}_A+V$ пуст (см. также [36, 37]). Поэтому для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) достаточно доказать отсутствие в его спектре собственных значений (бесконечной кратности). При этом, если $\lambda\in\mathbb{R}$ — собственное значение оператора $\widehat{H}_A+V$, то из разложения (2.1) и аналитической теоремы Фредгольма вытекает, что λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_A(k+i\varkappa e)+V$ при всех $k+i\varkappa e\in\mathbb{C}^n$ [35]. Следовательно, достаточно показать, что существует вектор $e\in S^{n-1}$ такой, что для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ найдутся вектор $k\in\mathbb{R}^n$ и число $\zeta\in\mathbb{C}$, для которых λ не является собственным значением оператора $\widehat{H}_A(k+\zeta e)+V$. Так как вместе с функцией V пространству $\mathfrak{L}^{2,p}_{\text{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p\in(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}]$, принадлежат и все функции $V-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, и, более того, $\|V-\lambda\|^*_{2,p}=\|V\|^*_{2,p}$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$, то при доказательстве (сделав замену $V-\lambda\mapsto V$) можно ограничиться только рассмотрением случая $\lambda=0$. Поэтому теорема 1 вытекает из приведенной ниже теоремы 4.

Зафиксируем вектор $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ (такой, что для векторного потенциала A выполняются условия (1_γ) и (2_γ)); $e\doteq|\gamma|^{-1}\gamma\in S^{n-1}$. Для векторов $x\in\mathbb{R}^n$ будем обозначать $x_\parallel\doteq(x,e)$ и $x_\perp\doteq x-(x,e)e$. Для всех $N\in\Lambda^*$, $k\in\mathbb{R}^n$ и $\varkappa\geqslant 0$ положим

$$G^{\pm}_N=G^{\pm}_N(k+i\varkappa e)=\bigl(|k_\parallel+2\pi N_\parallel|^2+(\varkappa\pm|k_\perp+2\pi N_\perp|)^2\bigr)^{1/2}.$$

Будем далее выбирать векторы $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$. В этом случае $G^-_N\geqslant\pi|\gamma|^{-1}$, $G^+_N\geqslant\varkappa$ и $G^+_NG^-_N\geqslant 2\pi\varkappa|\gamma|^{-1}$. Имеет место равенство

$$\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)\varphi\,=\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}(k+2\pi N+i\varkappa e)^2\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)},\quad \varphi\in\widetilde{H}^2(K),$$

при этом $|(k+2\pi N+i\varkappa e)^2|=G^+_NG^-_N$. Определим положительные операторы $\widehat{G}_\pm=\widehat{G}_\pm(k+i\varkappa e)$:

$$\widehat{G}_\pm\varphi\,=\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}\widehat{G}^{\pm}_N(k+i\varkappa e)\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)},\quad \varphi\in D(\widehat{G}_\pm)=\widetilde{H}^1(K).$$

Справедливо полярное разложение

$$\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)=\widehat{U}(k+i\varkappa e)\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|\,,$$

где $|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|=\widehat{G}_+\widehat{G}_-$ — положительный оператор, $D(|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|)=\widetilde{H}^2(K)$, и $\widehat{U}(k+i\varkappa e)$ — унитарный оператор, действующий в $L^2(K)$, для которого

$$\widehat{U}(k+i\varkappa e)\varphi\;=\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}\frac{(k+2\pi N+i\varkappa e)^2}{G_N^+(k+i\varkappa e)\,G_N^-(k+i\varkappa e)}\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)},\quad \varphi\in L^2(K).$$

Для любого $\theta\in[0,1]$ имеем $D(\widehat{G}_+^{\theta}\widehat{G}_-^{1-\theta})=D(|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2})=\widetilde{H}^1(K)$.

Теорема 4. *Пусть $n\geqslant 3$, $p\in(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}]$ и $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — периодический векторный потенциал с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$, для которого при некотором векторе $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ выполняются условия (1_γ) и (2_γ); $e=|\gamma|^{-1}\gamma$. Тогда найдутся числа $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,p;A)\in(0,C_2^{-1})$ и $\widetilde{C}_1=\widetilde{C}_1(n;A)>0$ такие, что для любого периодического с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ скалярного потенциала $V\in\mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, для которого $\|V\|^*_{2,\,p}\leqslant\varepsilon_0$, найдется число $\varkappa_0>0$ такое, что для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{\psi\,\in\,\widetilde{H}^1(K):\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\psi\|_{L^2(K)}\,\leqslant 1}|W_{A,\,V}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)|\;\geqslant\;\widetilde{C}_1\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\|_{L^2(K)}\,. \tag{2.2}$$

Доказательство теоремы 4 опирается на теорему 5 и следствие 2.

Замечание 2. Из неравенства (2.2) для (всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и) всех функций $\varphi\in D(\widehat{H}_A(k+i\varkappa e)+V)$ следует оценка

$$\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{-1/2}\left(\widehat{H}_A(k+i\varkappa e)+V\right)\varphi\,\|_{L^2(K)}\;\geqslant\;\widetilde{C}_1\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\,\|_{L^2(K)}\,.$$

Теорема 5 (см. [4]). *Пусть $n\geqslant 3$ и $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — периодический векторный потенциал с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий при некотором векторе $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ условиям (1_γ) и (2_γ); $e=|\gamma|^{-1}\gamma$. Тогда найдутся числа $\widetilde{C}_1^*=\widetilde{C}_1^*(n;A)>0$ и $\varkappa_0>0$ такие, что для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\psi\,\in\,\widetilde{H}^1(K):\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\psi\|_{L^2(K)}\,\leqslant 1}|W_{A}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)|\;\geqslant\;\widetilde{C}_1^*\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\|_{L^2(K)}\,. \tag{2.3}$$

При доказательстве теоремы 5, приведенном в [4], используются результаты работ [30, 31], в которых рассматривался n-мерный периодический магнитный оператор Дирака.

Теорема 6. *Пусть $n\geqslant 3$. Предположим, что периодическая с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ функция $\mathcal{W}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, где $p\in(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}]$. Тогда для любых $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ $(e=|\gamma|^{-1}\gamma)$, $\varepsilon\in\left(0,\frac{2p+1}{n}-1\right)$ и $\delta>0$ найдутся числа $C_8=C_8(n,p,\varepsilon)>0$ и $\varkappa_0=\varkappa_0(n,p,\varepsilon,\Lambda;\gamma,\delta,\mathcal{W})>0$ такие, что для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0$, всех векторов $k\in\mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)|=\pi$, и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K)$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{W}\varphi\|_{L^2(K)}\;\leqslant\;C_8\,(\delta+(\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2)^{\frac12}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\frac12+\varepsilon}\varphi\|_{L^2(K)}\,. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 6 приведено в § 4.

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant 3$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$. Тогда существует число $C_9 = C_9(n,p) > 0$ такое, что для любой периодической с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ функции $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, принадлежащей пространству $\mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, любого вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ ($e = |\gamma|^{-1}\gamma$) и любого $\delta > 0$ найдется число $\varkappa_0 > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ выполняется оценка*

$$\|\mathcal{W}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant C_9\,(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2)^{1/2}\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\,\varphi\|_{L^2(K)}\,.$$

Для доказательства следствия 2 достаточно выбрать константу $C_9 = C_8(n,p,\varepsilon)$ для какого-либо числа $\varepsilon \in \left(0, \frac{2p+1}{n} - 1\right)$ и воспользоваться теоремой 6 и неравенством

$$\|\widehat{G}_+^{\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\frac12+\varepsilon}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \|\widehat{G}_+^{\frac12}\,\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|_{L^2(K)} = \|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{\frac12}\,\varphi\|_{L^2(K)}\,, \quad \varphi \in \widetilde{H}^1(K).$$

Доказательство теоремы 4. Пусть векторный потенциал A удовлетворяет условиям (1_γ) и (2_γ) для вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ ($e = |\gamma|^{-1}\gamma$). В силу теоремы 5 и следствия 2 для любого периодического с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ скалярного потенциала $V \in \mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и для числа $\delta = \frac14\,\widetilde{C}_1^* C_9^{-1}$ найдется число $\varkappa_0 > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ и всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, выполнены неравенство (2.3) для всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ и неравенство

$$\left|\int_K V\overline{\psi}\varphi\,dy\right| \leqslant C_9\,(\delta + \|V\|^*_{2,\,p})\cdot\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\,\psi\|_{L^2(K)}\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\,\varphi\|_{L^2(K)}$$

для всех функций $\psi,\ \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$. Тогда, положив $\widetilde{C}_1 = \frac12\,\widetilde{C}_1^*$, выбрав число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\varepsilon_0 \leqslant \frac14\,\widetilde{C}_1^* C_9^{-1}$ и $\varepsilon_0 < C_2^{-1}$, и предполагая, что $\|V\|^*_{2,\,p} \leqslant \varepsilon_0$, для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$, и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ получаем

$$\sup_{\psi\,\in\,\widetilde{H}^1(K):\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\psi\|_{L^2(K)}\leqslant 1} |W_{A,\,V}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)| \geqslant$$

$$\geqslant (\widetilde{C}_1^* - C_9\,(\delta + \|V\|^*_{2,\,p}))\cdot\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\|_{L^2(K)} \geqslant \widetilde{C}_1\,\|\,|\widehat{H}_0(k+i\varkappa e)|^{1/2}\varphi\|_{L^2(K)}\,.$$

Теорема 4 доказана.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\check{\mathcal{F}}$ (где $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}^n)$) — преобразование Фурье и обратное к нему преобразование:

$$\widehat{\mathcal{F}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(x)\,e^{-i\,(y,x)}\,dx\,, \quad \check{\mathcal{F}}(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(x)\,e^{i\,(y,x)}\,dx = (2\pi)^n\,\widehat{\mathcal{F}}(-y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Если $\mathcal{F} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, — периодическая функция с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ и $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то свертка

$$(\mathcal{F} * G)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(x-y)\,G(y)\,dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

также является периодической с решеткой периодов Λ функцией, принадлежащей пространству $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, и

$$(\mathcal{F} * G)_N = (2\pi)^n\mathcal{F}_N\,\widehat{G}(2\pi N), \quad N \in \Lambda^*.$$

Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}^{\alpha,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{p}$, и $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то также $\mathcal{F} * G \in \mathfrak{L}^{\alpha,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\mathfrak{F}_{\alpha,\,p}(\mathcal{F} * G;\tau) \leqslant \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\mathfrak{F}_{\alpha,\,p}(\mathcal{F};\tau)$$

для всех $\tau \in [0,1]$.

Лемма 1. *Существует функция Ω из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что*

(a) $\Omega(x) > 0$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\widehat{\Omega}(y) \geqslant 0$ *при всех* $y \in B^n_1(0)$ *и* $\widehat{\Omega}(y) = 0$, *если* $y \in \mathbb{R}^n\backslash B^n_1(0)$,

(c) $\|\widehat{\Omega}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n/2}\,\|\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, как можно явно определить функцию Ω. Пусть $g(\xi) \doteq 2\,\xi^{-2}(1-\cos\xi)$ при $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $g(0) \doteq 1$. Тогда $\widehat{g}(\eta) = \max\{0,\, 1-|\eta|\}$, $\eta \in \mathbb{R}$. Обозначим $g_{2^m}(\xi) = g(2^{-m}\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. Для преобразования Фурье функции g_{2^m} справедливо равенство $\widehat{g_{2^m}}(\eta) = 2^m\,\widehat{g}(2^m\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$. Последовательность функций

$$\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \Phi_m(\xi) = \prod_{j\,=\,1}^{m} g_{2^j}(\xi), \quad m \in \mathbb{N}\,,$$

сходится при $m \to +\infty$ равномерно на отрезках $[-\beta,\beta]$, $\beta > 0$, к некоторой функции $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, для которой $\Phi(\xi) \geqslant 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}$. При этом функции

$$\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \widehat{\Phi_m}(\eta) = \big(\,\widehat{g_{2^1}} * \ldots * \widehat{g_{2^m}}\,\big)(\eta) \tag{3.1}$$

равномерно (на $\mathbb{R}$) сходятся при $m \to +\infty$ к функции $\widehat{\Phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Из (3.1) следует, что $\widehat{\Phi}(\eta) > 0$ при $\eta \in (-1,1)$ и $\widehat{\Phi}(\eta) = 0$ при $|\eta| \geqslant 1$. Определим теперь функцию

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \mathcal{G}(x) = \prod_{j\,=\,1}^{n} \Phi(\sqrt{n}x_j).$$

Тогда $\mathcal{G} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{G}(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$\widehat{\mathcal{G}}(y) \,=\, n^{-n/2} \prod_{j\,=\,1}^{n} \widehat{\Phi}\biggl(\frac{y_j}{\sqrt{n}}\biggr), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

поэтому $\widehat{\mathcal{G}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\mathcal{G}}(y) \geqslant 0$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$ и $\widehat{\mathcal{G}}(y) = 0$, если $|y| \geqslant 1$. Наконец, положим

$$\Omega(x) \,=\, \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x-y)\, e^{-|y|^2}\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\alpha = \pi^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mathcal{G}}^2(y)\, e^{-|y|^2/2}\, dy \right)^{-1/2}.$$

Для функции Ω выполняются условия (a) и (c). Так как

$$\widehat{\Omega}(y) \,=\, \alpha\, \pi^{\,n/2}\, \widehat{\mathcal{G}}(y)\, e^{-|y|^2/4}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

то условие (b) также выполняется. □

Для фиксированного вектора $e \in S^{n-1}$ и чисел $\varkappa > 0$, $a \in (0,\varkappa]$ определим множество

$$\widetilde{\mathcal{K}}_a = \widetilde{\mathcal{K}}_a(e;\varkappa) = \bigl\{ k \in \mathbb{R}^n : \bigl|\varkappa - |k_\perp|\bigr| \leqslant a\,,\ |k_\parallel| \leqslant a \bigr\}$$

(где $k_\parallel = (k,e)$, $k_\perp = k-(k,e)e$). Пусть $L^2(\widetilde{\mathcal{K}}_a)$ — множество функций $\mathcal{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, для которых $\mathcal{F}(y) = 0$ при п.в. $y \in \mathbb{R}^n \backslash\, \widetilde{\mathcal{K}}_a$.

Обозначим $q(n) = \frac{2n}{n-2}$, $n \geqslant 3$.

Теорема 7 (см. [4]). *Для всех функций $\mathcal{F} \in L^2(\widetilde{\mathcal{K}}_a)$ имеем $\check{\mathcal{F}} \in L^{q(n)}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка*

$$\|\check{\mathcal{F}}\|_{L^{q(n)}(\mathbb{R}^n)} \,\leqslant\, C_{10}\, a^{\,\frac12+\frac1n}\, \varkappa^{\,\frac12-\frac1n}\, \|\mathcal{F}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,$$

где $C_{10} = C_{10}(n) > 0$.

Доказательство теоремы 7, приведенное в [4], опирается на следующую оценку Томаса–Стейна для функций $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (см. [38–40], обзор результатов по таким неравенствам приведен в [41]):

$$\|\widehat{\mathcal{F}}|_{S^{n-1}}\|_{L^2(S^{n-1},\, ds_{n-1})} \leqslant C' \, \|\mathcal{F}\|_{L^{p(n)}(\mathbb{R}^n)}\,,$$

где $C' = C'(n) > 0$, $p(n) \doteq \frac{2(n+1)}{n+3}$, $n \geqslant 2$, и $\widehat{\mathcal{F}}|_{S^{n-1}}$ — сужение преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{F}}$ на единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Для любого множества $\mathcal{C} \subseteq \Lambda^*$ положим $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \{\varphi \in L^2(K) : \varphi_N = 0$ при всех $N \in \Lambda^* \backslash \mathcal{C}\}$. В частности, $\mathcal{H}(\varnothing) = \{0(.)\}$, где $0(.)$ — нулевая функция, и $\mathcal{H}(\Lambda^*) = L^2(K)$. Для всех $k \in \mathbb{R}^n$, $\varkappa > 0$ и $a \in (0, \varkappa]$ обозначим

$$\mathcal{K}_a = \mathcal{K}_a(e, k; \varkappa) \,=\, \{N \in \Lambda^* : k + 2\pi N \in \widetilde{\mathcal{K}}_a(e; \varkappa)\}. \tag{3.2}$$

Пусть $\operatorname{diam} K^*$ — диаметр элементарной ячейки K^*.

Теорема 8. *Предположим, что* $\varkappa \geqslant 2\pi \operatorname{diam} K^*$ *и* $\pi \operatorname{diam} K^* \leqslant a \leqslant \frac{\varkappa}{2}$ [2]. *Тогда для любых* $e \in S^{n-1}$, $k \in \mathbb{R}^n$ *и для любой функции* $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_a(e, k; \varkappa))$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{F}\|_{L^{q(n)}(K)} \,\leqslant\, C_{11}\, a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\, \varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\, \|\mathcal{F}\|_{L^2(K)}\,, \tag{3.3}$$

где $C_{11} = C_{11}(n) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widehat{\mathcal{L}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование (использованное при доказательстве теоремы 3) такое, что $\widehat{\mathcal{L}} E_j = \mathcal{E}_j$, $j = 1, \ldots, n$ (где $\{E_j\}$ — зафиксированный базис решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$). Тогда также $(\widehat{\mathcal{L}}^{-1})^* E_j^* = \mathcal{E}_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $|\det \widehat{\mathcal{L}}\,| = v^{-1}(K) = v(K^*)$ (здесь $(\widehat{\mathcal{L}}^{-1})^*$ — сопряженное преобразование к преобразованию $\widehat{\mathcal{L}}^{-1}$ и $\{E_j^*\}$ — базис решетки $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^n$, $(E_j^*, E_l) = \delta_{jl}$). Будем далее использовать функцию $\Omega(.)$, определенную в лемме 1. Положим $\Xi(x) = \Omega(4\pi \widehat{\mathcal{L}} x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Справедливо равенство

$$\widehat{\Xi}(y) \,=\, \frac{v(K)}{(4\pi)^n}\, \widehat{\Omega}\left(\frac{1}{4\pi}\, (\widehat{\mathcal{L}}^{-1})^* y\right), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Откуда получаем

$$\|\widehat{\Xi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \,=\, (4\pi)^{-n} v(K)\, \|\widehat{\Omega}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \,=\, (4\pi)^{-n} v(K)$$

и, более того, для всех $N \in \Lambda^* \backslash \{0\}$

$$\widehat{\Xi}(y)\, \widehat{\Xi}(y - 2\pi N) \,\equiv\, 0\,, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Для любой функции $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_a)$ выполняется равенство

$$\widehat{\Xi\mathcal{F}}(y) \,=\, \sum_{N \,\in\, \mathcal{K}_a} \mathcal{F}_N\, \widehat{\Xi}(y - 2\pi N), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, $\widehat{\Xi\mathcal{F}}(y) = 0$ при $y - k \in \mathbb{R}^n \backslash \widetilde{\mathcal{K}}_{a + \pi \operatorname{diam} K^*}$. Так как $a + \pi \operatorname{diam} K^* \leqslant 2a \leqslant \varkappa$, то, в частности, $\widehat{\Xi\mathcal{F}}(y) = 0$ при $y - k \in \mathbb{R}^n \backslash \widetilde{\mathcal{K}}_{2a}$. Из теоремы 7 вытекает оценка

$$\|\Xi\mathcal{F}\|_{L^{q(n)}(\mathbb{R}^n)} = \|e^{\,i\,(k,x)}\, \Xi\mathcal{F}\|_{L^{q(n)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{10}\, (2a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\, \varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\, \|\widehat{e^{\,i\,(k,x)}\, \Xi\mathcal{F}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \,=\, C_{10}\, (2a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\, \varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\, \|\widehat{\Xi\mathcal{F}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.4}$$

При этом

$$\|\widehat{\Xi\mathcal{F}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \,=\, \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\, \sum_{N \,\in\, \mathcal{K}_a} \mathcal{F}_N\, \widehat{\Xi}(y - 2\pi N) \right|^2 dy\right)^{1/2} \,=$$
$$=\, \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\Xi}^2(y)\, dy\right) \sum_{N \,\in\, \mathcal{K}_a} |\mathcal{F}_N|^2\right)^{1/2} \,=\, (4\pi)^{-n/2}\, \|\mathcal{F}\|_{L^2(K)}\,. \tag{3.5}$$

[2] При этих предположениях $\mathcal{K}_a \neq \varnothing$.

Обозначим
$$C_{12} = C_{12}(n) = \max_{x \in \overline{K}} \Xi^{-1}(x) \ = \max_{x \in \mathbb{R}^n :\ 0 \ \leqslant x_j \leqslant 4\pi\,,\ j=1,\dots,n} \Omega^{-1}(x)$$
(где $\overline{K}$ — замыкание элементарной ячейки $K \subset \mathbb{R}^n$). Тогда
$$\|\mathcal{F}\|_{L^{q(n)}(K)} \ \leqslant\ C_{12}\,\|\Xi\mathcal{F}\|_{L^{q(n)}(K)} \ \leqslant\ C_{12}\,\|\Xi\mathcal{F}\|_{L^{q(n)}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.6}$$

Неравенство (3.3) теперь следует из (3.4), (3.5) и (3.6), при этом $C_{11} = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\, C_{10}\, C_{12}$. Теорема 8 доказана. □

Если $\mathcal{E}'_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$, и $|\mathcal{E}'_j - \mathcal{E}_j| < \frac{1}{n}$ при всех j, то векторы $\mathcal{E}'_j$ образуют (не обязательно ортогональный) базис в $\mathbb{R}^n$.

Для базиса $\{\mathcal{E}'_j\}$ (в $\mathbb{R}^n$) определим решетку
$$\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\}) = \Bigl\{x = \sum_{j=1}^{n} m_j\, \mathcal{E}'_j : m_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n\Bigr\}$$
и соответствующую ей элементарную ячейку
$$K(\{\mathcal{E}'_j\}) = \Bigl\{x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, \mathcal{E}'_j : 0 \leqslant \xi_j < 1,\ j = 1, \dots, n\Bigr\}.$$
В частности,
$$\Lambda(\{\mathcal{E}_j\}) = \mathbb{Z}^n, \quad K(\{\mathcal{E}_j\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_j < 1,\ j = 1, \dots, n\},$$
$$\Lambda(\{E_j\}) = \Lambda\,, \quad K(\{E_j\}) = K\,, \quad \Lambda(\{E^*_j\}) = \Lambda^*\,, \quad K(\{E^*_j\}) = K^*.$$

Для непустых множеств $X \subseteq \mathbb{R}^n$, чисел $r \in \mathbb{R}$ и векторов $y \in \mathbb{R}^n$ будем в дальнейшем обозначать
$$rX = \{rx : x \in X\}\,, \quad y + X = \{y + x : x \in X\}\,.$$

Для всех $r > 0$ множество $rK(\{\mathcal{E}'_j\}) = K(\{r\mathcal{E}'_j\})$ является элементарной ячейкой решетки $r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\}) = \Lambda(\{r\mathcal{E}'_j\})$.

Справедлива простая

Лемма 2. *Существует число $r_0 = r_0(n, \Lambda) > 0$ такое, что для любого числа $r \in (0, r_0]$ найдутся векторы $\mathcal{E}'_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$, для которых $|\mathcal{E}'_j - \mathcal{E}_j| < \frac{1}{2n}$ и $\Lambda \subseteq r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\})$.*

§ 4. Доказательство теоремы 6

Выберем и зафиксируем какую-либо функцию $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, для которой $\widehat{Y}(y) = (2\pi)^{-n}$ при всех $y \in B^n_1(0)$. Будем далее использовать краткое обозначение $C^{\sharp} \doteq \|Y\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Так как функция Y фиксируется (при каждом $n \geqslant 3$), то константа $C^{\sharp}$ зависит только от n, при этом $C^{\sharp} \geqslant (2\pi)^{n/2}\, \widehat{Y}^{\,1/2}(0) = 1$. Для всех $\varkappa > 0$ положим
$$Y^{(4\varkappa)}(x) \doteq (4\varkappa)^n\, Y(4\varkappa x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
и для функции $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \frac{n}{2}]$, определим функции
$$W^{\{\varkappa\}}(x) = \sqrt{\bigl|\bigl(|\mathcal{W}|^2 * Y^{(4\varkappa)}\bigr)(x)\bigr|}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $|\mathcal{W}|^2 \in \mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $Y^{(4\varkappa)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\|Y^{(4\varkappa)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|Y\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = (C^{\sharp})^2$, то $|\mathcal{W}|^2 * Y^{(4\varkappa)} \in \mathfrak{L}^{2,\,p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и
$$\mathfrak{F}_{2,\,p}\,(|\mathcal{W}|^2 * Y^{(4\varkappa)}; \tau) \ \leqslant\ (C^{\sharp})^2\, \mathfrak{F}_{2,\,p}\,(|\mathcal{W}|^2; \tau)$$

при всех $\varkappa > 0$ и $\tau \in [0,1]$. Следовательно, $W^{\{\varkappa\}} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\mathfrak{F}_{1,\,2p}\,(W^{\{\varkappa\}};\tau) \leqslant C^{\sharp}\,\mathfrak{F}_{1,\,2p}\,(\mathcal{W};\tau)$$

при всех $\varkappa > 0$ и $\tau \in [0,1]$.

Для функции $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \frac{n}{2}]$, и числа $\delta > 0$ выберем число $R_0 = R_0(n,p;\delta,\mathcal{W}) \in (0,1]$ такое, что

$$\mathfrak{F}_{1,\,2p}\,(\mathcal{W};R_0) \leqslant \bigl(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\bigr)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Тогда для всех $\varkappa > 0$, всех $R \in (0,R_0]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$R\left(\frac{1}{v(B_R)}\int_{B_R(x)}|W^{\{\varkappa\}}(y)|^{2p}\,dy\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant C^{\sharp}\bigl(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\bigr)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Лемма 3. *Для любых функции $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \frac{n}{2}]$, и числа $\delta > 0$ при всех $\varkappa \geqslant R_0^{-1}$ справедливо неравенство*

$$\|W^{\{\varkappa\}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{13}\,\varkappa\,\bigl(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\bigr)^{1/2}, \tag{4.3}$$

где $C_{13} = C_{13}(n) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varkappa \geqslant R_0^{-1}$. Существует константа $C_{14} = C_{14}(n) > 1$ такая, что для всех $r \geqslant \varkappa^{-1}$

$$\sup_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\int_{B_r(x)}|\mathcal{W}(y)|^{2p}\,dy \leqslant C_{14}\,(\varkappa r)^n \sup_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\int_{B_{1/\varkappa}(x)}|\mathcal{W}(y)|^{2p}\,dy \leqslant$$
$$\leqslant C_{14}\,v_n(B_1)\,\varkappa^{2p}\,r^n\,\mathfrak{F}^{2p}_{1,\,2p}(\mathcal{W};\varkappa^{-1}) \leqslant C_{14}\,v_n(B_1)\,\varkappa^{2p}\,r^n\bigl(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\bigr)^p. \tag{4.4}$$

Для выбранной функции $Y(.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначим

$$\alpha_0 = \max_{y\,\in\,\mathbb{R}^n:\,|y|\leqslant 4}|Y(y)|\,,\quad \alpha_j = \max_{y\,\in\,\mathbb{R}^n:\,2^{j+1}\leqslant|y|\leqslant 2^{j+2}}|Y(y)|\,,\quad j\in\mathbb{N}\,.$$

Тогда $\alpha(Y) \doteq \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}2^{jn}\,\alpha_j\right)^{1/2} < +\infty$. Для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\bigl(W^{\{\varkappa\}}(x)\bigr)^2 = \left|\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{W}(x-y)|^2\,Y^{(4\varkappa)}(y)\,dy\right| \leqslant (4\varkappa)^n\,\alpha_0\int_{B_{1/\varkappa}(x)}|\mathcal{W}(y)|^2\,dy +$$
$$+ (4\varkappa)^n\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\int_{B_{2^j/\varkappa}(x)\,\setminus\,B_{2^{j-1}/\varkappa}(x)}|\mathcal{W}(y)|^2\,dy \leqslant (4\varkappa)^n\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j\int_{B_{2^j/\varkappa}(x)}|\mathcal{W}(y)|^2\,dy\,. \tag{4.5}$$

С другой стороны, для всех $\varkappa \geqslant R_0^{-1}$ и всех $j \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$ с помощью оценки (4.4) получаем

$$\int_{B_{2^j/\varkappa}(x)}|\mathcal{W}(y)|^2\,dy \leqslant \bigl(v_n(B_{2^j/\varkappa})\bigr)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B_{2^j/\varkappa}(x)}|\mathcal{W}(y)|^{2p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant v_n(B_1)\,C_{14}^{1/p}\bigl(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\bigr)\,2^{jn}\,\varkappa^{2-n}.$$

Поэтому из (4.5) для всех $\varkappa \geqslant R_0^{-1}$ следует оценка (4.3), где $c_{13} = 2^n(v_n(B_1))^{1/2}\,C_{14}^{1/2}\,\alpha(Y)$. $\square$

Будем далее предполагать, что функция $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,\,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$, $n \geqslant 3$, является периодической с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Тогда функции $W^{\{\varkappa\}}$, $\varkappa > 0$, также являются периодическими с решеткой периодов Λ. Так как

$$\bigl(|\mathcal{W}|^2 * Y^{(4\varkappa)}\bigr)_N = (2\pi)^n\bigl(|\mathcal{W}|^2\bigr)_N\,\widehat{Y^{(4\varkappa)}}(2\pi N) = (2\pi)^n\bigl(|\mathcal{W}|^2\bigr)_N\,\widehat{Y}\left(\frac{\pi N}{2\varkappa}\right),\quad N\in\Lambda^*,$$

то

$$\left(|\mathcal{W}|^2 * Y^{(4\varkappa)}\right)_N = \left(|\mathcal{W}|^2\right)_N \tag{4.6}$$

при всех $N \in \Lambda^*$, для которых $2\pi|N| \leqslant 4\varkappa$.

Для решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ далее фиксируется базис $\{E_j\}$ и элементарная ячейка $K = K(\{E_j\})$, которым соответствуют базис $\{E_j^*\}$ и элементарная ячейка $K^* = K(\{E_j^*\})$ обратной решетки $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 9. *Пусть $\delta > 0$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$ и $\mathcal{W} \in \mathfrak{L}^{1,2p}_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}^n)$ — периодическая функция с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Тогда существует число $\widetilde{\varkappa}_0 = \widetilde{\varkappa}_0(n, p, \Lambda; \delta, \mathcal{W}) \geqslant 2\pi \operatorname{diam} K^*$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$, всех векторов $e \in S^{n-1}$ и $k \in \mathbb{R}^n$, всех чисел $a \in [\frac{\widetilde{\varkappa}_0}{4}, \frac{\varkappa}{4}]$ и всех функций $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_a(e, k; \varkappa))$ выполняется неравенство*

$$\|W^{\{\varkappa\}}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant C_{15}\left(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,2p})^2\right)^{\frac{1}{2}} (a\varkappa)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{\varkappa}\right)^{\frac{2p+1}{n}-1} \|\varphi\|_{L^2(K)}, \tag{4.7}$$

где $C_{15} = C_{15}(n) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r_0 = r_0(n, \Lambda)$ — число из леммы 2 и $R_0 = R_0(n, p; \delta, \mathcal{W}) \in (0, 1]$ — число, для которого справедливо неравенство (4.1). Обозначим

$$\widetilde{\varkappa}_0 = \max\{2\pi \operatorname{diam} K^*, 4r_0^{-1}, 4nR_0^{-1}\}.$$

Будем далее считать, что $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$ (тогда $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0 > R_0^{-1}$ и, следовательно, выполняется неравенство (4.3) из леммы 3). Для чисел $a \in [\frac{\widetilde{\varkappa}_0}{4}, \frac{\varkappa}{4}]$ определим числа $r = a^{-1}$. При этом $0 < r \leqslant \min\{r_0, \frac{R_0}{n}\} \in (0, 1)$, где число $\min\{r_0, \frac{R_0}{n}\}$ зависит от n, p, Λ, числа $\delta > 0$ и функции $\mathcal{W}$. В дальнейшем удобно будет также использовать обозначение $R \doteq nr$ (тогда $R \leqslant R_0$).

Для чисел r выберем в соответствии с леммой 2 (какие-либо) векторы $\mathcal{E}'_j = \mathcal{E}'_j(r)$, $j = 1, \ldots, n$. При таком выборе

$$L = L(r) \doteq \frac{v(K)}{r^n\, v(K(\mathcal{E}'_j))} \in \mathbb{N}.$$

Определим последовательно при $\lambda = 1, \ldots, L$ векторы $N^{(\lambda)} \in r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\})$. Положим $N^{(1)} = 0 \in r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\})$. Если $L \geqslant 2$ и векторы $N^{(\lambda)}$ уже определены для всех индексов $\lambda = 1, \ldots, \lambda_1$, где $\lambda_1 \in \{1, \ldots, L-1\}$, то выберем любой вектор

$$N^{(\lambda_1+1)} \in r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\}) \setminus \bigcup_{\lambda=1}^{\lambda_1} (N^{(\lambda)} + \Lambda)$$

(что всегда можно сделать при $\lambda_1 \leqslant L-1$, так как множество в правой части последнего включения непусто). В результате векторы $N^{(\lambda)}$ определяются при всех $\lambda = 1, \ldots, L$. Для векторов $N^{(\lambda)}$ множества $N^{(\lambda)} + r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\}) + \Lambda$, $\lambda = 1, \ldots, L$, попарно не пересекаются и

$$\bigcup_{\lambda=1}^{L} (N^{(\lambda)} + r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\}) + \Lambda) = \mathbb{R}^n.$$

Поэтому для любой функции $\varphi \in L^2(K)$ справедливо равенство

$$\|W^{\{\varkappa\}}\varphi\|^2_{L^2(K)} = \sum_{\lambda=1}^{L} \int_{N^{(\lambda)} + rK(\{\mathcal{E}'_j\})} |W^{\{\varkappa\}}(x)\,\varphi(x)|^2\, dx. \tag{4.8}$$

Для функции $\Omega(.)$ (из леммы 1) определим функцию

$$\Omega_r(x) = \Omega\left(\frac{x}{r}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(При этом $\widehat{\Omega_r}(y) = r^n\, \widehat{\Omega}(ry)$, $y \in \mathbb{R}^n$.) Обозначим

$$\widetilde{\Omega}_r(x) \,=\, \sum_{N' \in \Lambda} \Omega_r(x - N')\,, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $\widetilde{\Omega}_r(.) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ является периодической с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Из выбора функции $\Omega(.)$ и векторов $\mathcal{E}'_j = \mathcal{E}'_j(r)$, $j = 1, \ldots, n$, следует существование констант $C_{16} = C_{16}(n;\Omega) > 0$ и $C_{17} = C_{17}(n;\Omega) > 0$ таких, что для всех $x \in rK(\{\mathcal{E}'_j\})$

$$\widetilde{\Omega}_r(x) \,\geqslant\, \Omega_r(x) \,\geqslant\, C_{16} \tag{4.9}$$

и для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\widetilde{\Omega}_r(x) \,\leqslant \sum_{N' \in r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\})} \Omega_r(x - N') \,\leqslant\, C_{17}\,. \tag{4.10}$$

Так как функция Ω фиксируется (для каждого $n \geqslant 3$), то константы C_{16} и C_{17} фактически зависят только от n. Из неравенства (4.10), в частности, вытекает неравенство

$$\sum_{\lambda=1}^{L} \widetilde{\Omega}^2_r(x - N^{(\lambda)}) \,\leqslant\, \biggl(\,\sum_{N' \in r\Lambda(\{\mathcal{E}'_j\})} \Omega_r(x - N')\biggr)^2 \,\leqslant\, C^2_{17}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

Для функций $\varphi \in L^2(K)$ будем далее использовать обозначение

$$\varphi^{(\lambda)}_r(x) \,=\, \widetilde{\Omega}_r(x - N^{(\lambda)})\,\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для любой функции $\varphi \in L^2(K)$ из (4.8) и (4.9) получаем

$$\|W^{\{\varkappa\}}\varphi\|^2_{L^2(K)} \,\leqslant\, C^{-2}_{16} \sum_{\lambda=1}^{L} I^{\{\varkappa\}}_\lambda(r;\varphi), \tag{4.12}$$

где

$$I^{\{\varkappa\}}_\lambda(r;\varphi) \,\doteq\, \int_{N^{(\lambda)}+rK(\{\mathcal{E}'_j\})} |W^{\{\varkappa\}}(x)\,\varphi^{(\lambda)}_r(x)|^2\,dx\,.$$

При этом (см. (4.11))

$$\sum_{\lambda=1}^{L} \int_K |\varphi^{(\lambda)}_r(x)|^2\,dx \,\leqslant\, C^2_{17}\,\|\varphi\|^2_{L^2(K)}\,. \tag{4.13}$$

Оценим интегралы $I^{\{\varkappa\}}_\lambda(r;\varphi)$. Так как $nr = R \leqslant R_0$, то (для всех $\lambda = 1, \ldots, L$) $N^{(\lambda)} + rK(\{\mathcal{E}'_j\}) \subset B_R(N^{(\lambda)})$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} I^{\{\varkappa\}}_\lambda(r;\varphi) \,&\leqslant\, \biggl(\int_{N^{(\lambda)}+rK(\{\mathcal{E}'_j\})} |W^{\{\varkappa\}}(x)|^n\,dx\biggr)^{\frac{2}{n}} \biggl(\int_{N^{(\lambda)}+rK(\{\mathcal{E}'_j\})} |\varphi^{(\lambda)}_r(x)|^{q(n)}\,dx\biggr)^{\frac{2}{q(n)}} \leqslant \\ &\leqslant\, \biggl(\int_{B_R(N^{(\lambda)})} |W^{\{\varkappa\}}(x)|^n\,dx\biggr)^{\frac{2}{n}} \|\varphi^{(\lambda)}_r\|^2_{L^{q(n)}(K)}\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Более того, используя интерполяцию между пространствами $L^{2p}(B_R(N^{(\lambda)}))$ и $L^\infty(B_R(N^{(\lambda)}))$, с помощью неравенств (4.2) и (4.3) получаем

$$\begin{aligned} &\biggl(\int_{B_R(N^{(\lambda)})} |W^{\{\varkappa\}}(x)|^n\,dx\biggr)^{\frac{1}{n}} \leqslant \\ &\leqslant\, \bigl(v_n(B_1)\bigr)^{\frac{1}{n}} \bigl(R\,\|W^{\{\varkappa\}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\bigr)^{1-\frac{2p}{n}} \Biggl(R\biggl(\frac{1}{v(B_R)}\int_{B_R(N^{(\lambda)})} |W^{\{\varkappa\}}(x)|^{2p}\,dx\biggr)^{\frac{1}{2p}}\Biggr)^{\frac{2p}{n}} \leqslant \\ &\leqslant\, \bigl(v_n(B_1)\bigr)^{\frac{1}{n}} (nC_{13})^{1-\frac{2p}{n}} (C^\sharp)^{\frac{2p}{n}} \bigl(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\bigr)^{\frac{1}{2}} \Bigl(\frac{\varkappa}{a}\Bigr)^{1-\frac{2p}{n}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_a)$. Для всех $N \in \Lambda^*$

$$\big(\widetilde{\Omega}_r(.-N^{(\lambda)})\big)_N = \frac{(2\pi)^n}{v(K)}\, e^{-2\pi i\,(N,N^{(\lambda)})}\, r^n\, \widehat{\Omega}(2\pi r N).$$

Следовательно, $\big(\widetilde{\Omega}_r(.-N^{(\lambda)})\big)_N = 0$ при $2\pi|N| \geqslant r^{-1} = a$. С другой стороны, для всех $N \in \Lambda^*$

$$(\varphi_r^{(\lambda)})_N = \sum_{M\,\in\,\Lambda^*} \big(\widetilde{\Omega}_r(.-N^{(\lambda)})\big)_M\, \varphi_{N-M}\,.$$

Поэтому (при всех $\lambda = 1,\dots,L$) справедливо также включение $\varphi_r^{(\lambda)} \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_{2a})$. Так как выполняются ограничения $\pi\,\mathrm{diam}\,K^* \leqslant \frac{\widetilde{\varkappa}_0}{2} \leqslant 2a \leqslant \frac{\varkappa}{2}$, то из теоремы 8 следует, что

$$\|\varphi_r^{(\lambda)}\|_{L^{q(n)}(K)} \leqslant C_{11}\,(2a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\,\varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\,\|\varphi_r^{(\lambda)}\|_{L^2(K)} \tag{4.16}$$

(где $C_{11} = C_{11}(n) > 0$). Теперь из (4.14), (4.15) и (4.16) для функций $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_a)$ при всех $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$ и $\lambda = 1,\dots,L$ вытекает оценка

$$I_\lambda^{\{\varkappa\}}(r;\varphi) \leqslant C_{18}^2\,\big(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\big)\,(a\varkappa)\left(\frac{a}{\varkappa}\right)^{2\left(\frac{2p+1}{n}-1\right)} \|\varphi_r^{(\lambda)}\|^2_{L^2(K)}\,, \tag{4.17}$$

где $C_{18} = C_{18}(n) > 0$. Тогда в силу (4.12), (4.13) и (4.17) (при $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$ и для любой функции $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_a)$, $\frac{\widetilde{\varkappa}_0}{4} \leqslant a \leqslant \frac{\varkappa}{4}$) справедливо доказываемое неравенство (4.7), при этом $C_{15} = C_{15}(n) = C_{16}^{-1}\,C_8\,C_9 > 0$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6. Пусть $\widetilde{\varkappa}_0 = \widetilde{\varkappa}_0(n,p,\Lambda;\delta,\mathcal{W}) \geqslant 2\pi\,\mathrm{diam}\,K^*$ — число из теоремы 9. Для всех $\varkappa \geqslant \max\{16, 4\widetilde{\varkappa}_0\}$ выберем числа $l = l(\varkappa) \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ так, что $\frac{\varkappa}{8} < 2^l \leqslant \frac{\varkappa}{4}$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ — минимальное число, для которого $2^m \geqslant \frac{\widetilde{\varkappa}_0}{4}$ (тогда $m < l$). Обозначим $\varepsilon_1 = \frac{2p+1}{n} - 1 - \varepsilon > 0$. Для функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ определим функции

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{N\,\in\,\mathcal{K}_{2^m}} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi^{(j)}(x) = \sum_{N\,\in\,\mathcal{K}_{2^j}\,\setminus\,\mathcal{K}_{2^{j-1}}} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad j = m+1,\dots,l\,,$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{N\,\in\,\mathcal{K}_{2^l}} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)} = \sum_{j\,=\,m}^{l} \varphi^{(j)}(x)\,, \quad \widetilde{\widetilde{\varphi}}(x) = \varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x) = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\,\setminus\,\mathcal{K}_{2^l}} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(где $\mathcal{K}_{2^j} = \mathcal{K}_{2^j}(e,k;\varkappa) \subset \Lambda^*$, $j = m,\dots,l$, — множества из (3.2)).

Оценим вначале норму $\|\mathcal{W}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)}$. Справедливо равенство

$$\|\mathcal{W}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)} = \|W^{\{\varkappa\}}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)}\,. \tag{4.18}$$

Действительно,

$$\|\mathcal{W}\widetilde{\varphi}\|^2_{L^2(K)} - \|W^{\{\varkappa\}}\widetilde{\varphi}\|^2_{L^2(K)} = \int_K \big(|\mathcal{W}(x)|^2 - (W^{\{\varkappa\}}(x))^2\big)\,|\widetilde{\varphi}(x)|^2\,dx =$$
$$= v(K) \sum_{M,\,N\,\in\,\mathcal{K}_{2^l}} \big((|\mathcal{W}|^2)_{M-N} - ((W^{\{\varkappa\}})^2)_{M-N}\big)\,\overline{\varphi_M}\varphi_N\,.$$

Но, с другой стороны, если $N \in \mathcal{K}_{2^l}$, то

$$|k + 2\pi N| \leqslant |k_\perp + 2\pi N_\perp| + |k_\| + 2\pi N_\|| \leqslant \varkappa + 2^{l+1} \leqslant \frac{3}{2}\,\varkappa\,.$$

Поэтому $2\pi|M-N| \leqslant 3\varkappa$ и, следовательно (см. (4.6)),

$$(|\mathcal{W}|^2)_{M-N} = ((W^{\{\varkappa\}})^2)_{M-N}$$

при всех $M,\, N \in \mathcal{K}_{2^l}$, что и доказывает равенство (4.18).

Для всех $\theta \in [0,1]$ выполняются оценки

$$\left(\frac{\pi}{|\gamma|}\right)^{\theta} \|\varphi^{(m)}\|_{L^2(K)} \leqslant \|\widehat{G}_-^{\,\theta}\varphi^{(m)}\|_{L^2(K)}\,, \tag{4.19}$$

$$2^{(j-1)\theta}\,\|\varphi^{(j)}\|_{L^2(K)} \leqslant \|\widehat{G}_-^{\,\theta}\varphi^{(j)}\|_{L^2(K)}\,, \quad j = m+1,\dots,l\,. \tag{4.20}$$

Используя теорему 9, оценки (4.19), (4.20) и оценку $G_N^+(k;\varkappa) \geqslant \varkappa$, $N \in \Lambda^*$, для любого $\varkappa \geqslant \max\{16, 4\widetilde{\varkappa}_0\}$ (и любого вектора $k \in \mathbb{R}^n$, для которого $|(k,\gamma)| = \pi$), получаем

$$\|W^{\{\varkappa\}}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)} \leqslant \sum_{j=m}^{l} \|W^{\{\varkappa\}}\varphi^{(j)}\|_{L^2(K)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}\left(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\right)^{\frac12} \sum_{j=m}^{l} (2^j\varkappa)^{\frac12}\left(\frac{2^j}{\varkappa}\right)^{\frac{2p+1}{n}-1} \|\varphi^{(j)}\|_{L^2(K)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}\left(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\right)^{\frac12}\left(2^{m\left(\frac{2p+1}{n}-\frac12\right)}\left(\frac{|\gamma|}{\pi}\right)^{\frac12+\varepsilon}\varkappa^{-\varepsilon_1}\,\|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\varphi^{(m)}\|_{L^2(K)} + \right.$$
$$\left. + \,2^{\frac12+\varepsilon}\sum_{j=m+1}^{l}\varkappa^{-\varepsilon_1}\,2^{j\varepsilon_1}\,\|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\varphi^{(j)}\|_{L^2(K)}\right).$$

При этом число $m \in \mathbb{N}$ определяется числом $\widetilde{\varkappa}_0 = \widetilde{\varkappa}_0(n,p,\Lambda;\delta,\mathcal{W})$,

$$\sum_{j=m+1}^{l}\varkappa^{-\varepsilon_1}\,2^{j\varepsilon_1} \leqslant 2^{-2\varepsilon_1}\sum_{j=m+1}^{l}2^{-(l-j)\varepsilon_1} < 2^{-\varepsilon_1}(2^{\varepsilon_1}-1)^{-1}$$

и для всех $j = m,\dots,l$

$$\|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\varphi^{(j)}\|_{L^2(K)} \leqslant \|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)}\,.$$

Следовательно, найдется число $\varkappa_0' = \varkappa_0'(n,p,\varepsilon,\Lambda;\gamma,\delta,\mathcal{W}) \geqslant \max\{16, 4\widetilde{\varkappa}_0\}$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0'$ (и всех векторов $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$) справедлива оценка

$$\|W^{\{\varkappa\}}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)} \leqslant C_{19}\left(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\right)^{\frac12}\|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\widetilde{\varphi}\|_{L^2(K)}\,, \tag{4.21}$$

где константу C_{19} можно выбрать в виде $C_{19} = C_{19}(n,p,\varepsilon) = 2^{\,\frac12+\frac1n}(\ln 2)^{-1}\,C_{15}\left(\frac{2p+1}{n}-1-\varepsilon\right)^{-1}$.

Так как $G_N^+(k;\varkappa) \geqslant \varkappa$ и $G_N^-(k;\varkappa) \geqslant \pi|\gamma|^{-1}$, $N \in \Lambda^*$, то

$$\left(\frac{\pi}{|\gamma|}\right)^{\frac12+\varepsilon}\varkappa^{\,\frac12-\varepsilon}\,\|\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_{L^2(K)} \leqslant \|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_{L^2(K)}\,. \tag{4.22}$$

Кроме того, для всех $N \in \Lambda^*\backslash\mathcal{K}_{2^l}$

$$G_N^+(k;\varkappa) \geqslant G_N^-(k;\varkappa) > \frac{2^l}{\varkappa+2^l}\,|k+2\pi N| > \frac19\,|k+2\pi N|\,.$$

Поэтому из теоремы 1.1, в которой можно положить $\mathfrak{F}(.) \doteq \mathfrak{F}_{1,\,2p}(\mathcal{W};.)$, и оценки (4.22) следует существование числа $\varkappa_0'' = \varkappa_0''(n,p,\Lambda;\gamma,\delta,\mathcal{W}) > 0$ такого, что при всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0''$ (и при всех векторах $k \in \mathbb{R}^n$, для которых $|(k,\gamma)| = \pi$) имеет место оценка

$$\|\mathcal{W}\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_{L^2(K)} \leqslant v^{\frac12}(K)\,C_2\left(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{N\in\Lambda^*\setminus\mathcal{K}_{2^l}}|k+2\pi N|^2\,|\varphi_N|^2\right)^{\frac12} + \widetilde{C}_2\|\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_{L^2(K)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{20}\left(\delta + (\|\mathcal{W}\|^*_{1,\,2p})^2\right)^{\frac12}\|\widehat{G}_+^{\,\frac12-\varepsilon}\widehat{G}_-^{\,\frac12+\varepsilon}\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_{L^2(K)}\,, \tag{4.23}$$

где $C_{20} = C_{20}(n,p) = 10\,C_2$. Из (4.21) и (4.23) при $\varkappa \geqslant \varkappa_0 \doteq \max\{\varkappa_0', \varkappa_0''\}$ следует оценка (2.4), при этом $C_8 = C_8(n,p,\varepsilon) = C_{19} + C_{20}$. Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л.И. О спектре периодического оператора Дирака // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 124. № 1. С. 3–17.
2. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. I / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 2000. 76 с. Деп. в ВИНИТИ 15.06.2000, № 1683-В00.
3. Данилов Л.И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 233–240.
4. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. 275204.
5. Chanillo S., Sawyer E. Unique continuation for $\Delta + v$ and the C. Fefferman–Phong class // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318. № 1. P. 275–300.
6. Chiarenza F., Ruiz A. Uniform L^2-weighted Sobolev inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 112. № 1. P. 53–64.
7. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class // J. Funct. Anal. 2002. Vol. 193. P. 314–345.
8. Fefferman C. The uncertainty principle // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1983. Vol. 9. № 2. P. 129–206.
9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
10. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Commun. Math. Phys. 1973. Vol. 33. P. 335–343.
11. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
12. Kuchment P., Levendorskiĭ S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. № 2. P. 537–569.
13. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
14. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 7593–7601.
15. Shen Z. Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class // Illinois J. Math. 2001. Vol. 45. № 3. P. 873–893.
16. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. об–ва. 2001. Т. 9. С. 199–233.
17. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера // Теор. и матем. физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459.
18. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шредингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320.
19. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шредингера // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84.
20. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators // Int. Math. Res. Notices. 2001. № 1. P. 1–31.
21. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360. № 4. P. 1741–1758.
22. Kenig C.E., Ruiz A., Sogge C.D. Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators // Duke Math. J. 1987. Vol. 55. P. 329–347.
23. Koch H., Tataru D. Sharp counterexamples in unique continuation for second order elliptic equations // J. Reine Angew. Math. 2002. Issue 542. P. 133–146.
24. Sobolev A.V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator // Invent. Math. 1999. Vol. 137. P. 85–112.
25. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 1. С. 49–62.
26. Тихомиров М., Филонов Н. Абсолютная непрерывность «четного» периодического оператора Шредингера с негладкими потенциалами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. № 3. С. 201–210.
27. Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 5. С. 197–240.

28. Shen Z. Absolute continuity of generalized periodic Schrödinger operators // Contemp. Math. 2001. Vol. 277. P. 113–126.
29. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators // Commun. Math. Phys. 2002. Vol. 229. P. 49–55.
30. Данилов Л.И. Абсолютная непрерывность спектра многомерного периодического магнитного оператора Дирака // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 61–96.
31. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a d-dimensional periodic magnetic Dirac operator // Preprint arXiv: 0805.0399 [math-ph], 2008. URL: `http://arXiv.org/abs/0805.0399`
32. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 43. 215201.
33. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
34. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
35. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations // Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 60. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.
36. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.1996, № 3855-В96.
37. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 298–307.
38. Tomas P. A restriction theorem for the Fourier transform // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 81. P. 477–478.
39. Stein E.M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals // Princeton Math. Ser. Vol. 43. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
40. Zygmund A. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables // Studia Math. 1974. Vol. 50. P. 189–201.
41. Tao T. Recent progress on the restriction conjecture // Preprint arXiv: math/0311181 [math.CA], 2003. URL: `http://arXiv.org/abs/math/0311181`

Поступила в редакцию 23.12.2011

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru

L. I. Danilov

On the spectrum of a periodic Schrödinger operator with potential in the Morrey space

Keywords: Schrödinger operator, absolute continuity of the spectrum, periodic potential, Morrey space.

Mathematical Subject Classifications: 35P05

We consider the periodic Schrödinger operator $\widehat{H}_A + V$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. The vector potential A is supposed to satisfy some conditions which are fulfilled whenever the potential A belongs to the Sobolev class $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $q > \frac{n-1}{2}$, and also in the case where $\sum \|A_N\|_{\mathbb{C}^n} < +\infty$. Here A_N are the Fourier coefficients of the potential A. We prove absolute continuity of the spectrum of the periodic Schrödinger operator $\widehat{H}_A + V$ provided that the scalar potential V belongs to the Morrey space $\mathfrak{L}^{2,\,p}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$, and

$$\varlimsup_{r \to +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^2 \left(\frac{1}{v(B_r)} \int_{B_r(x)} |V(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon_0 \,,$$

where the number $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p;A) > 0$ depends on the vector potential A, $B_r(x)$ is a closed ball of radius $r > 0$ centered at the point $x \in \mathbb{R}^n$, $v(B_r)$ is the n-dimensional volume of the ball $B_r = B_r(0)$. Let K be the fundamental domain of the period lattice (which is common for the potentials A and V), K^* the fundamental domain of the reciprocal lattice. The operator $\widehat{H}_A + V$ is unitarily equivalent to the direct integral of operators

$\widehat{H}_A(k)+V$, $k \in 2\pi K^*$, acting on the space $L^2(K)$. The last operators are also considered for complex vectors $k+ik' \in \mathbb{C}^n$. To prove absolute continuity of the spectrum of the operator $\widehat{H}_A+V$, we use the Thomas method. The main ingredient in the proof is the following inequality:

$$\| \, |\widehat{H}_0(k+ik')|^{-1/2} \left(\widehat{H}_A(k+ik')+V-\lambda\right)\varphi \, \|_{L^2(K)} \geqslant \widetilde{C}_1 \, \| \, |\widehat{H}_0(k+ik')|^{1/2}\varphi \, \|_{L^2(K)} , \quad \varphi \in D(\widehat{H}_A(k+ik')+V),$$

which holds for some appropriate chosen complex vectors $k+ik' \in \mathbb{C}^n$ (depending on A, V, and the number $\lambda \in \mathbb{R}$) with sufficiently large imaginary part k', where $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_1\,(n; A) > 0$ and $\widehat{H}_0(k+ik')$ is the operator $\widehat{H}_A(k+ik')$ for $A \equiv 0$.

REFERENCES

1. Danilov L.I. On the spectrum of the periodic Dirac operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 2000, vol. 124, no. 1, pp. 859–871.

2. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of periodic Schrödinger and Dirac operators. I, Physical–Technical Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 2000, 76 p. Deposited at VINITI 15.06.2000, no. 1683-B00.

3. Danilov L.I. Absolute continuity of the spectrum of a periodic Dirac operator, *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 262–271.

4. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, 275204.

5. Chanillo S., Sawyer E. Unique continuation for $\Delta+v$ and the C. Fefferman–Phong class, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 318, no. 1, pp. 275–300.

6. Chiarenza F., Ruiz A. Uniform L^2-weighted Sobolev inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1991, vol. 112, no. 1, pp. 53–64.

7. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class, *J. Funct. Anal.*, 2002, vol. 193, pp. 314–345.

8. Fefferman C. The uncertainty principle, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1983, vol. 9, no. 2, pp. 129–206.

9. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics.* IV. *Analysis of operators*, New York – London: Academic Press, 1978. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki.* IV. *Analiz operatorov*, Moscow: Mir, 1982. 428 p.

10. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, *Commun. Math. Phys.*, 1973, vol. 33, pp. 335–343.

11. Birman M.Sh., Suslina T.A. Periodic magnetic Hamiltonian with variable metric. The problem of absolute continuity, *St. Petersburg Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 203–232.

12. Kuchment P., Levendorskiĭ S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569.

13. Birman M.Sh., Suslina T.A. Absolute continuity of the two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian with discontinuous vector valued potential, *St. Petersburg Math. J.*, 1999, vol. 10, no. 4, pp. 579–601.

14. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1998, vol. 31, pp. 7593–7601.

15. Shen Z. Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class, *Illinois J. Math.*, 2001, vol. 45, no. 3, pp. 873–893.

16. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of a two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *Trudy S.-Peterburg. Mat. Obshch.*, 2001, vol. 9, pp. 199–233.

17. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional periodic Schrödinger operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 2003, vol. 134, no. 3, pp. 392–403.

18. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator with strongly subordinate magnetic potential, *J. Math. Sci.*, 2005, vol. 129, pp. 4087–4109.

19. Danilov L.I. On the absence of eigenvalues in the spectrum of two-dimensional periodic Dirac and Schrödinger operators, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, Izhevsk, 2004, no. 1 (29), pp. 49–84.

20. Shen Z. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators, *Int. Math. Res. Notices.*, 2001, no. 1, pp. 1–31.

21. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 360, no. 4, pp. 1741–1758.

22. Kenig C.E., Ruiz A., Sogge C.D. Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators, *Duke Math. J.*, 1987, vol. 55, pp. 329–347.

23. Koch H., Tataru D. Sharp counterexamples in unique continuation for second order elliptic equations, *J. Reine Angew. Math.*, 2002, issue 542, pp. 133–146.

24. Sobolev A.V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator, *Invent. Math.*, 1999, vol. 137, pp. 85–112.

25. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic Schrödinger operator, *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 1, pp. 46–57.

26. Tikhomirov M., Filonov N. Absolute continuity of the «even» periodic Schrödinger operator with nonsmooth coefficients, *St. Petersburg Math. J.*, 2005, vol. 16, no. 3, pp. 583–589.

27. Suslina T.A., Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the Schrödinger operator with the potential concentrated on a periodic system of hypersurfaces, *St. Petersburg Math. J.*, 2002, vol. 13, no. 5, pp. 859–891.

28. Shen Z. Absolute continuity of generalized periodic Schrödinger operators, *Contemp. Math.*, 2001, vol. 277, pp. 113–126.

29. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators, *Commun. Math. Phys.*, 2002, vol. 229, pp. 49–55.

30. Danilov L.I. Absolute continuity of the spectrum of a multidimensional periodic magnetic Dirac operator, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, no. 1, pp. 61–96.

31. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a d-dimensional periodic magnetic Dirac operator, *Preprint arXiv* : 0805.0399 [math-ph], 2008. `http://arXiv.org/abs/0805.0399`

32. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2010, vol. 43, 215201.

33. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin: Springer, 1976. Translated under the title Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov, Moscow: Mir, 1972.

34. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics.* II. *Fourier analysis. Self-adjointness*, New York: Academic, 1975. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki.* II. *Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978. 400 p.

35. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations, *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol. 60. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.

36. Danilov L.I. The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. VI, Physical–Technical Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1996, 45 p. Deposited at VINITI 31.12.1996, no. 3855-B96.

37. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals, *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 136, pp. 3826–3831.

38. Tomas P. A restriction theorem for the Fourier transform, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 81, pp. 477–478.

39. Stein E.M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, *Princeton Math. Ser.*, vol. 43. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

40. Zygmund A. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables, *Studia Math.*, 1974, vol. 50, pp. 189–201.

41. Tao T. Recent progress on the restriction conjecture, *Preprint arXiv* : math/0311181 [math.CA], 2003. `http://arXiv.org/abs/math/0311181`

Received 23.12.2011

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical–Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru