УДК 515.122.536

© *Р. А. Головастов*

О ПРОСТРАНСТВЕ СТОУНА ОДНОЙ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

В данной работе рассматривается булева алгебра того же типа, что и алгебра, построенная Беллом, и пространство Стоуна этой булевой алгебры. Данное пространство является компактификацией счетного дискретного пространства N. Доказано существование изолированных точек в наросте данной компактификации, которые являются пределами некоторых сходящихся последовательностей. Также доказано, что любое открыто-замкнутое подмножество нашего пространства, которое гомеоморфно $\beta\omega$, является замыканием объединения конечного числа антицепей из N. В конце приведены два примера: замкнутое подмножество нароста без изолированных точек, которое не гомеоморфно $\beta\omega \setminus \omega$; подмножество нароста, которое гомеоморфно $\beta\omega \setminus \omega$, но не является замкнутым.

Ключевые слова: бикомпактное расширение, пространство Стоуна булевой алгебры, цепи, антицепи.

Введение

В работе [1] М. Белл построил бикомпактное расширение BN счётного дискретного пространства, нарост которого удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабелен. Это расширение построено как пространство Стоуна одной булевой алгебры, состоящей из подмножеств счётного множества. Мы продолжим построение М. Белла [1] и рассмотрим ещё одну булеву алгебру и порождаемое ею пространство Стоуна.

Пусть $L = \{k_n \colon n \in \omega\}$ — счётное множество и $k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

Обозначим $P(L) = \{f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(n) \leqslant k_n$ для $n \in \omega\}$, $N(L) = \{f|_n \colon f \in P(L), n \subset \omega\}$ — множество всех сужений $f \in P(L)$ на $n \subset \omega$. Здесь и далее буквой n обозначаем, в зависимости от контекста, как натуральное число, так и множество $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

На $N(L)$ естественным образом вводится отношение порядка: $s \leqslant t$, если t является продолжением s. Будем обозначать $s < t$, если $t|_{\mathrm{dom}(s)} = s$ и $t \neq s$. Соответственно можно ввести понятия цепи и антицепи.

Далее, обозначим $T(L) = \{\pi \in N(L)^\omega \colon \operatorname{dom} \pi(n) = n + 1$ для $n \in \omega\}$, где $\operatorname{dom} s$ — это область определения функции s. Для $s \in N(L)$ обозначим $C_s = \{t \in N(L) \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\}$. Для $\pi \in T(L)$ обозначим $C_\pi = \cup\{C_{\pi(n)} \colon n \in \omega\}$. Отметим, что C_π и $N(L) \setminus C_\pi$ бесконечны для всякого $\pi \in T(L)$. Для $\pi \in T(L)$ и $M \subseteq \omega$ положим $C_{\pi|_M} = \cup\{C_{\pi(n)} \colon n \in M\}$.

Пусть $B(L)$ — булева алгебра, порожденная множествами из $B'(L) = \{C_\pi \colon \pi \in T(L)\} \cup \{N(L) \setminus C_\pi \colon \pi \in T(L)\}$. Очевидно, что $\{\{s\} \colon s \in N(L)\} \cup \{C_s \colon s \in N(L)\} \subseteq B(L)$. Определим $b(N(L), B(L))$ как пространство Стоуна булевой алгебры $B(L)$.

Для расширения BN, рассмотренного М. Беллом [1], в множестве $L = \{k_n \colon n \in \omega\}$ всякое $k_n = n + 1$. В этом случае, следуя [1], соответствующие множества мы будем обозначать P, N, T, B. Расширение Белла изучалось в работах [2–5].

В данной работе мы рассматриваем случай, когда $k_n = 1$ для всех $k_n \in L$. Соответствующие множества будем обозначать P_2, N_2, T_2, B_2, а пространство Стоуна как B_2N_2. Отметим, что множество N_2 с введенным порядком является канторовым деревом с отброшенным наименьшим элементом. Нарост множества $A \subseteq N_2$ будем обозначать $A^* = [A] \setminus A$.

Основным результатом данной работы является теорема 9, в которой описываются открыто-замкнутые подмножества B_2N_2 гомеоморфные $\beta\omega$.

§ 1. Предварительные сведения

В работе [6] была доказана теорема о том, что рассматриваемое нами пространство B_2N_2 вложимо в пространство BN в качестве замкнутого нигде не плотного подмножества.

Теорема 1 (см. [6]). *Существует гомеоморфизм $\phi\colon B_2N_2 \to [N_2]_{BN}$ такой, что $\phi|_{N_2}$ — тождественное отображение и $[N_2]_{BN}$ является нигде не плотным подмножеством BN.*

Также в [6] было доказано, что замыкание строгой антицепи из N_2, как и в пространстве Белла, гомеоморфно $\beta\omega$, и, кроме того, является открыто-замкнутым подмножеством B_2N_2. Антицепь $\{s_i \in N_2 : i \in \omega\}$ будем называть *строгой*, если для любых $i, j \in \omega$ и $i \neq j$ выполнено $\mathrm{dom}(s_i) \neq \mathrm{dom}(s_j)$.

Теорема 2 (см. [6]). *Для пространства B_2N_2 справедливы следующие утверждения.*
1. *Пусть $A = \{s_i \in N_2\colon i \in \omega\}$ — полная цепь. Тогда $A \in B_2$, $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в B_2N_2 и $[A] \setminus A$ состоит из одной точки.*
2. *Пусть $A = \{f|_n\colon n \in M\}$, где $f \in P_2$ и $M \subset \omega$: $|M| = |\omega \setminus M| = \omega$. Тогда $[A]$ не является открыто-замкнутым множеством в B_2N_2.*
3. *Пусть $A = \{\pi(n)\colon n \in M \subseteq \omega\}$ — строгая антицепь. Тогда $A \in B_2$ и $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в B_2N_2 и гомеоморфно βN.*

Следствие 1. *Если $A = \{f|_n\colon n \in M \subset \omega\} \subseteq N_2$ — бесконечная цепь, то $[A]_{B_2N_2} \setminus A = \{x\}$ является изолированной точкой в наросте $B_2N_2 \setminus N_2$.*

Для неизолированных точек нароста $B_2N_2 \setminus N_2$ в [6] была доказана следующая теорема:

Теорема 3 (см. [6]). *Пусть $x \in B_2N_2 \setminus N_2$ — неизолированная точка нароста. Тогда для любой её окрестности Ox найдется строгая антицепь $D \subset N_2$ такая, что $[D]_{B_2N_2} \subseteq Ox$.*

В [2] было доказано существование подмножеств BN, замыкания которых гомеоморфны $\beta\omega$.

Теорема 4 (см. [2]). *Пусть $\{C_{s_i} : i \in \omega\}$ — семейство дизъюнктных множеств, где $\mathrm{dom}\, s_i \neq \mathrm{dom}\, s_j$ для всех $i \neq j$, и $X = \{x_i : i \in \omega\} \subseteq BN$ такое, что $x_i \in [C_{s_i}]_{BN}$. Тогда $[X]_{BN}$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

В [5] описаны сходящиеся в BN последовательности из N.

Теорема 5 (см. [5]). *Если $A \subseteq N$ такое, что $|[A]_{BN} \setminus A| = 1$, то найдется конечное $K \subset A$ такое, что $A \setminus K$ является бесконечной цепью.*

В [5] были описаны подмножества N, замыкания которых в BN гомеоморфны $\beta\omega$.

Теорема 6 (см. [5]). *Если $A \subseteq N$ и $[A]_{BN}$ гомеоморфно $\beta\omega$, то A является объединением конечного числа антицепей из N.*

Следствие 2 (см. [5]). *Если $A \subseteq N$ и $[A]_{BN}$ гомеоморфно $\beta\omega$, то длины цепей, входящих в A, ограничены одной константой.*

§ 2. Основные результаты

В BN были введены понятия u-точки и l-точки [3, 4]. Аналогичные построения можно провести и для B_2N_2:

Определение 1. Точку $x \in B_2N_2 \setminus N_2$ назовем u-точкой, если $x = \cap\{C^*_{\pi|_M} : C_{\pi|_M} \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|_M} \in \xi\}\}$ в семействе множеств

$$\{C_{\pi|_M} \colon \pi \in T_2, M \subseteq \omega\}.$$

Определение 2. Точку $x \in B_2N_2 \setminus N_2$ назовем l-точкой, если $x = \cap\{C^*\colon C \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C\}$ в семействе множеств

$$\{N_2 \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\colon n \in \omega, \pi_i \in T_2\}.$$

Доказательства существования u и l-точек в пространстве B_2N_2 полностью повторяют соответствующие доказательства, проведенные для пространства BN [4, теоремы 4, 5 и 6].

В B_2N_2, как и в пространстве Белла [3, теорема 1], полностью перенеся соответствующее доказательство, можно доказать следующую теорему:

Теорема 7. *Для точки $x \in B_2N_2 \setminus N_2$ следующие утверждения эквивалентны.*
1. *Точка x является l-точкой, то есть имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида $[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$.*
2. *Точка x является пределом сходящейся последовательности $\{\, f|_n\colon n \in \omega\,\} \subseteq N_2$.*

Отсюда получаем, что каждое из условий (1) или (2) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in B_2N_2 \setminus N_2$ была l-точкой.

Теорема 8. *Если $x \in B_2N_2$, то x не является u-точкой в пространстве BN.*

Доказательство. Построим строгую антицепь $D \subseteq N \setminus N_2$. Сначала упорядочим $N_2 = \{t_n\colon n \in \omega\}$. Для всякого $t_n \in N_2$ фиксируем $\tilde{t}_n \in N \setminus N_2$: $t_n < \tilde{t}_n$, $\mathrm{dom}(\tilde{t}_n) > \mathrm{dom}(\tilde{t}_{n-1})$ и $\tilde{t}_n(m) = 2$, где $m = \mathrm{dom}(t_n) + 1$. Таким образом в качестве $\tilde{t}_n$ берем достаточно длинное продолжение t_n, которое уже в точке $m = \mathrm{dom}(t_n) + 1$ выходит из N_2. Построенное таким образом D является строгой антицепью, поскольку в противном случае нашлись бы $t_{n_1} \neq t_{n_2}$ из N_2 такие, что $\tilde{t}_{n_1} < \tilde{t}_{n_2}$. Поэтому либо $\tilde{t}_{n_1} \leqslant t_{n_2}$ (чего быть не может, поскольку $\tilde{t}_{n_1} \notin N_2$), либо $t_{n_2} < \tilde{t}_{n_1}$. Тогда либо $t_{n_1} < t_{n_2}$ (в этом случае $t_{n_2}(\mathrm{dom}(t_{n_1}) + 1) = 2$), либо $t_{n_2} < t_{n_1}$. Получаем, что $\tilde{t}_{n_2}|_m = t_{n_1}|_m$, где $m = \mathrm{dom}(t_{n_2}) + 1$. А это противоречит тому, что $t_{n_1} \in N_2$. Антицепь D является строгой в силу того, что $\mathrm{dom}(\tilde{t}_n) < \mathrm{dom}(\tilde{t}_{n+1})$. В силу теоремы 2 $[D]_{B_2N_2}$ является открыто-замкнутым множеством. Тогда $[D]_{BN} \cap [N_2]_{BN} = \varnothing$.

Докажем, что $x \in [N_2]_{BN}$ не может быть u-точкой в BN. Предположим противное, тогда у точки x есть база из множеств вида $C_{\pi|_M}$. Поэтому если $t \in N_2 \cap O_x$, то $\tilde{t} \in D \cap O_x$. Поскольку $x \in [N_2]_{BN}$, то $x \in [D]_{BN}$, а это противоречит тому, что $[D]_{BN} \cap [N_2]_{BN} = \varnothing$ □

Следствие 3. *Если x является u-точкой из B_2N_2, то x не является u-точкой в пространстве BN.*

Предложение 1. 1. *Если x является l-точкой в B_2N_2, то x является l-точкой и в объемлющем пространстве BN.*
2. *Если x является l-точкой в B_2N_2, тогда для любого $X \subseteq N$ такого, что $[X]_{BN} \setminus X = \{x\}$, выполнено $|X \setminus N_2| < \omega$.*

Доказательство. 1. Поскольку любая цепь из N_2 также является цепью и в N, а B_2N_2 вложимо в BN как замкнутое подмножество (теорема 1), то теорема верна согласно эквивалентному определению l-точки (теорема 7).
2. Из теоремы 5 получаем, что найдется бесконечное $X' \subseteq X$ такое, что $|X \setminus X'| < \omega$ и X' является цепью из N, которая сходится к x. С другой стороны, согласно теореме 7 найдется бесконечная цепь $X'' \subset N_2$, которая также сходится к x. Если $|X' \setminus N_2| = \omega$, тогда найдется $s' \in X'$ такое, что $C_{s'} \cap X'' = \varnothing$ и $|X' \setminus C_{s'}| < \omega$. Таким образом, цепи X' и X'' можно отделить базисными окрестностями, что противоречит тому, что они сходятся к одной точке. Получаем, что $|X' \setminus N_2| < \omega$, а значит, и $|X \setminus N_2| < \omega$. □

Теорема 9. *Если $A \subseteq N_2$: $[A]_{B_2N_2}$ открыто-замкнутое в B_2N_2 множество и $[A]_{B_2N_2}$ гомеоморфно $\beta\omega$. Тогда $A = \bigcup\{D_i \colon i \leqslant n\}$, где D_i — строгая антицепь из N_2.*

Доказательство. Согласно теореме 1 и следствию 2 длины всех цепей, входящих в A, ограничены некоторой константой h. Поскольку $[A]_{B_2N_2}$ открыто в B_2N_2 и является бикомпактом, то существует конечное покрытие $[A]_{B_2N_2} = \bigcup\limits_{i\leqslant\tilde{n}}[U_i]$, где $U_i = C_{\pi_i|_{M_i}} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$.

Напомним, что $U_i = \bigcup\limits_{n\in M_i}(C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j})$ и при этом длины цепей, входящих в U_i, ограничены одной константой h. Заметим, что для любых $s_1 < s_2 \in U_i$ и произвольного $t \in N_2$ такого, что $s_1 \leqslant t \leqslant s_2$ выполнено $t \in U_i$ (другими словами, в цепях, содержащихся в U_i, нет «дырок»), поскольку в противном случае $t \in \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$, но тогда $s_2 \in C_t \subseteq \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $s_2 \notin U_i$. Отсюда следует, что для всех $n \in M_i$ и любого $t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $n \leqslant \operatorname{dom}(t) \leqslant n + h - 1$. Поскольку у каждого элемента продолжений на следующий шаг ровно 2, то $|\{t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j} \colon \operatorname{dom}(t) = n + k\}| \leqslant 2^k$. Тогда для всех $n \in M_i$ выполнено $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leqslant 2^h$.

Представим M_i в виде объединения h непересекающихся подмножеств $M_i = \bigcup\limits_{l\leqslant h} M_i^l$, таких, что для всякого $l \leqslant h$ и для любых $m_1, m_2 \in M_i^l$ и $m_1 \neq m_2$ выполнено $|m_2 - m_1| \geqslant h$. Рассмотрим множество $U_i^l = C_{\pi_i|_{M_i^l}} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$. Заметим, что для любых двух различных $m_1, m_2 \in M_i^l$ и любых $t_1 \in C_{\pi_i(m_1)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $t_2 \in C_{\pi_i(m_2)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $\operatorname{dom}(t_1) \neq \operatorname{dom}(t_2)$. Тогда построим разбиение U_i^l на конечное число строгих антицепей. Для каждого $n \in M_i^l$ отметим по точке в $C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ (если данное множество не пусто). Это и будет первой строгой антицепью $D_1^{i,l}$. Затем для каждого $n \in M_i^l$ отмечаем по точке в непустых $(C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}) \setminus D_1^{i,l}$, это будет $D_2^{i,l}$. И так далее. Процесс остановится не более чем через 2^h шагов, так как $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leqslant 2^h$, для всех $n \in M_i$. Значит U_i^l можно представить в виде объединения не более чем 2^h строгих антицепей, а U_i — в виде объединения не более чем $h \cdot 2^h$ строгих антицепей.

В итоге получаем, что $A = \bigcup\limits_{i\leqslant n_0} D'_i$, где D'_i — строгая антицепь, а $n_0 \leqslant \tilde{n} \cdot h \cdot 2^h$. □

Таким образом, теорема 9 описывает открыто-замкнутые копии $\beta\omega$ из B_2N_2. Естественно возникает вопрос: «Существуют ли в B_2N_2 не открыто-замкнутые копии $\beta\omega$?» На этот вопрос отвечает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим произвольную бесконечную строгую антицепь $F = \{\pi(i) \colon i \in M, M \subseteq \omega\}$. Представим её в виде счетного объединения конечных не пересекающихся множеств возрастающей мощности, то есть $F = \bigcup\limits_{i\in\omega} F_i$, где $|F_i| = i$. Для каждого F_i определим мажорирующую ее нестрогую антицепь A_i, для этого каждому $s \in F_i$ сопоставим его продолжение s' такое, что $\operatorname{dom}(s') = \max\{\operatorname{dom}(t) \colon t \in F_i\} = n(i)$.

Рассмотрим $A = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$. Согласно теоремам 1 и 4 $[A]_{B_2N_2}$ гомеоморфно $\beta\omega$, при этом открыто-замкнутым в B_2N_2 оно быть не может, так как в противном случае A, согласно теореме 9, можно было бы представить в виде конечного объединения строгих антицепей, то есть количество элементов антицепи, имеющих один и тот же dom, не превосходило бы количества строгих антицепей. А это невозможно в силу того, что для любого $n \in \omega$ найдется $i(n) \in \omega \colon |A_{i(n)}| > n$, а все элементы $A_{i(n)}$ имеют одинаковый dom. В итоге мы получили подмножество N_2, замыкание которого гомеоморфно $\beta\omega$, но при этом не является открыто-замкнутым подмножеством B_2N_2.

Замечание 1. Согласно теореме 3 нарост нашего пространства представим следующим образом: $B_2N_2 \setminus N_2 = [A \cup B]$, где A — множество всех изолированных точек нароста, B — объединение наростов отрыто-замкнутых копий $\beta\omega$, A, B открытые подмножества B_2N_2, $A \cap B = \varnothing$; $[B] = (B_2N_2 \setminus N_2) \setminus A$ и, в силу примера 1, $[A] \neq (B_2N_2 \setminus N_2) \setminus B$.

Теперь построим подмножество N_2, замыкание которого является открыто-замкнутым в B_2N_2, не гомеоморфно $\beta\omega$ и нарост которого не содержит изолированных точек.

Пример 2. Рассмотрим произвольную бесконечную строгую антицепь $F = \{\pi(i) \colon i \in \omega\}$. По индукции построим семейство конечных цепей со следующими свойствами:
1. $A_i \subset C_{\pi(i)}$ и $|A_i| = i$;
2. A_i — цепь без «дырок», то есть для любых $s, t \in A_i$ и произвольного $k \in N_2$ из того, что $s \leqslant k \leqslant t$ следует $k \in A_i$;
3. Для произвольных $i \in \omega$, $t \in A_i$ и $s \in A_{i+1}$ выполнено $\mathrm{dom}(t) < \mathrm{dom}(s)$.

В качестве A_1 возьмем $\{\pi(1)\}$. Пусть построены A_i для всех $i \leqslant n$, тогда в качестве первого элемента цепи A_{i+1} возьмем то продолжение $\pi(n+1)$, для которого выполнено условие (3), далее нетрудно достроить цепь до нужной длинны ($|A_{i+1}| = i + 1$) с выполнением условия (2).

Все элементы цепи A_i, за исключением последнего, имеют в качестве одного продолжения на следующий шаг другой элемент A_i, а в качестве второго продолжения элемент из дополнения к данной цепи. И только оба продолжения последнего элемента цепи не будут элементом данной цепи.

Рассмотрим $A = \bigcup\limits_{i \in \omega} A_i$. Нетрудно показать, что A является элементом булевой алгебры B_2. Легко построить $\tilde{\pi} \in T_2$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\tilde{\pi}(M) = A$. Тогда $A = C_{\tilde{\pi}|_M} \setminus (C_{\pi'|_{M'}} \cup C_{\pi''|_{M''}})$, где $C_{\pi'|_{M'}}$ обрезает те продолжения элементов наших цепей, которые туда не попадут, $C_{\pi''|_{M''}}$ нужно для удаления вторых продолжений последних элементов наших цепей. Как и для пространства Белла, нетрудно показать, что для любого $\pi \in T_2$ и произвольного $M \subseteq \omega$ выполнено $C_{\pi|_M} \in B_2$. Согласно теореме 1 и следствию 2 $[A]_{BN}$ не гомеоморфно $\beta\omega$. То, что $[A]_{BN}$ не гомеоморфно $\beta\omega$, можно доказать и по-другому: разбить A на два непересекающихся множества, замыкания которых будут пересекаться. Заметим также, что A не содержит ни одной бесконечной цепи, а значит, в силу теорем 5 и 1, $A^* = [A]_{B_2N_2} \setminus A$ не содержит изолированных точек. В итоге мы получили подмножество N_2, замыкание которого открыто в B_2N_2 и не гомеоморфно $\beta\omega$, а нарост не содержит изолированных точек.

Таким образом, нарост нашего пространства B_2N_2, помимо копий $\beta\omega \setminus \omega$ и изолированных точек, содержит и другие точки. И при этом, в отличие от пространства Белла, пределы сходящихся последовательностей не образуют здесь всюду плотного подмножества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.
2. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. P. 177–185.
3. Бастрыков Е.С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6.
4. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
5. Gryzlov A.A. On convergent sequences and copies of βN in one compactification of N // XI Prague Symposium on General Topology. Prague, Czech Rep. 2011. P. 29.
6. Головастов Р.А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2011. Вып. 1. С. 14–19.

Поступила в редакцию 30.05.2012

Головастов Роман Александрович, старший преподаватель, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rpa4@bk.ru

R. A. Golovastov
About Stone space of one Boolean algebra

Keywords: compactification, Stone space of Boolean algebra, chain, antichain.

Mathematical Subject Classifications: 54D35

We consider the Boolean algebra of the same type as algebra constructed by Bell, and the Stone space of this Boolean algebra. This space is a compactification of a countable discrete space N. We prove that there are isolated points in a remainder of this compactification, which are limits of some convergent sequences. We prove that a clopen subset of our space, which is homeomorphic to $\beta\omega$, is a closure of the union of finitely many antichains from N. We construct two examples: a clopen subset of the remainder without isolated points, which is not homeomorphic to $\beta\omega \setminus \omega$; a subset of the remainder which is homeomorphic to $\beta\omega \setminus \omega$, but is not a clopen.

REFERENCES

1. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25.

2. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N, *Topology Proceedings*, 2010, vol. 35, pp. 177–185.

3. Bastrykov E.S. About some points of Bell's compactification of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 4, pp. 3–6.

4. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17.

5. Gryzlov A.A. On convergent sequences and copies of βN in one compactification of N, *XI Prague Symposium on General Topology*, Prague, Czech Rep, 2011, p. 29.

6. Golovastov R.A. About one compactifications of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 14–19.

Received 30.05.2012

Golovastov Roman Aleksandrovich, Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rpa4@bk.ru