УДК 517.956

© *У. И. Балтаева*

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение с гиперболическим оператором

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-u_{yy}-\lambda u\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),$$

и нагруженное интегро-дифференциальное уравнение со смешанным оператором

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-\frac{1-\operatorname{sgn}y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn}y}{2}u_y-\lambda u\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),$$

где $D_{0x}^{\alpha_i}$ — интегро-дифференциальный оператор (в смысле Римана–Лиувилля), $a_i(x)$ — коэффициенты, λ,μ — действительные постоянные, причем $\lambda>0$. Данная работа посвящена постановке и исследованию однозначной разрешимости краевых задач (типа задачи Дарбу, задачи Трикоми) для нагруженного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с гиперболическим и параболо-гиперболическим оператором. Существование и единственность решения краевой задачи доказана методом интегральных уравнений. Задачи эквивалентным образом сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра со сдвигом. При достаточных условиях на заданные функции и коэффициенты доказывается однозначная разрешимость полученных интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнения смешанного типа, интегро-дифференциальное уравнение, интегральное уравнение со сдвигом, функция Бесселя.

Введение

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа благодаря важным приложениям при решении многих вопросов как прикладного, так и теоретического характера является одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Актуальность изучения краевых задач, когда в одной части области задано параболическое уравнение, а в другой — гиперболическое, была обоснована с практической точки зрения в 1959 году И. М. Гельфандом. Он привел пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его — уравнением диффузии.

Систематическое изучение уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов началось в начале семидесятых годов и интенсивно развивается во многих работах. Следует отметить работы Т. Д. Джураева, М. С. Салахитдинова и их учеников [4–6].

В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги возникла необходимость в изучении нового класса уравнений, получивших название нагруженное уравнение. Такие уравнения впервые исследованы в работах Н. Н. Назарова и Н. Н. Кочина. Но ими не был использован термин «нагруженное уравнение». Впервые этот термин был использован в работах А. М. Нахушева [1, 2], в которых дано наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения [1, 2].

Основные вопросы, возникающие в теории граничных задач для уравнений в частных производных, остаются таковыми же и для краевых задач для нагруженных уравнений. Однако наличие нагруженного оператора не всегда позволяет без изменений применять известную теорию краевых задач для нагруженных уравнений.

Заметим, что краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического, параболо-гиперболического, эллиптико-гиперболического типов третьего порядка, изучены сравнительно мало. Отметим только работы В. А. Елеева, Б. Исломова и Д. М. Курьязова (а также работы [9, 10, 11]), в которых нагруженная часть содержит только след или производную от искомой функции.

Как известно, краевые задачи (типа задачи Дарбу, задачи Трикоми, задачи Геллерстедта) для нагруженного дифференциального, интегро-дифференциального уравнения гиперболического и смешанного типов третьего порядка мало исследованы.

Исходя из этого, данная работа посвящена постановке и исследованию аналогов задачи Дарбу для нагруженного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-u_{yy}-\lambda u\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),$$

и краевых задач типа задачи Трикоми для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Lu\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),$$

где

$$Lu\equiv u_{xx}-\frac{1-\operatorname{sgn}y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn}y}{2}u_y-\lambda u\,,$$

$D_{0x}^{\alpha_i}$ — оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка α_i при $\alpha_i<0$ и дробного дифференцирования порядка α_i при $0<\alpha_i<1$ и задается формулой

$$D_{0x}^{\alpha_i}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha_i)}\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha_i}}, & \alpha_i<0,\\ \dfrac{d}{dx}D_{0x}^{\alpha_i-1}f(x), & 0<\alpha_i<1.\end{cases}$$

Предположим, что коэффициенты $a_i=a_i(x)\in C^1[0,1]\cap C^3\left(0,1\right)$, λ,μ — действительные постоянные, причем $\lambda>0$,.

§ 1. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа

Пусть Ω_1 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$, $x=0$, $y=h$ соответственно при $y>0$; Ω_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси OX и двумя характеристиками

$$AC: x+y=0,\quad BC: x-y=1$$

при $y<0$. Введем следующие обозначения: $I=\{(x,y):0<x<1,\ \ y=0\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I$.

В области Ω рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Lu\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),\tag{1.1}$$

где

$$Lu \equiv u_{xx} - \frac{1-\operatorname{sgn} y}{2} u_{yy} - \frac{1+\operatorname{sgn} y}{2} u_y - \lambda u\,,$$

Уравнение (1.1) относится к классу уравнений, предложенных в [1–3]. Нагруженным дифференциальным уравнениям, нагруженная часть которых содержит лишь значение искомого решения в фиксированных точках области их задания, посвящены работы [9, 10].

Задача T. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$;

2) $u_x(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0 \cup AC$ $(AB \cup AC)$;

3) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1.1) в областях Ω_1 и Ω_2;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AA_0} = \varphi_1(y), \quad u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad u_x(x,y)|_{AA_0} = \varphi_3(y), \;\; 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{1.2}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{1.3}$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \;\; \varphi_j(y) \in C^1\,[0,1], \;\; j = 1,2, \quad \varphi_3(y) \in C\,[0,1] \cap C^1(0,1), \tag{1.4}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \;\; \psi_2(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{1.5}$$

Теорема 1. *Если $\lambda > 0$, $a_i = a_i(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1)$, и выполнены условия* (1.4), (1.5), *то в области Ω существует единственное решение задачи* T.

При доказательстве теоремы важную роль играет следующая лемма.

Лемма 1. *Любое регулярное решение $u(x,y)$ уравнения* (1.1) *представляется в виде*

$$u(x,y) = z(x,y) + w(x), \tag{1.6}$$

где $z(x,y)$ — решение уравнения

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{array}{ll} z_{xx} - z_y - \lambda z, & y > 0, \\ z_{xx} - z_{yy} - \lambda z, & y < 0, \end{array}\right. \tag{1.7}$$

$w(x)$ — решение следующего обыкновенного интегро-дифференциального уравнения

$$w'''(x) - \lambda w'(x) = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i D_{0x}^{\alpha_i} z_y(x,0). \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x,y)$, представленная формулой (1.6), есть решение уравнения (1.1). Тогда, подставляя (1.6) в (1.1), при $y > 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} - u_y - \lambda u\right) - \mu \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{0x}^{\alpha_i} u_y(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(z_{xx} - z_y - \lambda z\right) +$$

$$+ w'''(x) - \lambda w'(x) - \mu \sum_{i=1}^{n} a_i D_{0x}^{\alpha_i} z_y(x,0) = 0,$$

то есть $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $y > 0$.

Теперь, наоборот, пусть $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1.1) при $y > 0$, а $w(x)$ — некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$w'''(x) - \lambda w'(x) = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i D_{0x}^{\alpha_i} u_y(x,0). \tag{1.9}$$

Докажем справедливость соотношения (1.6). Очевидно, что функция

$$u(x,y)=z(x,y)-\frac{\mu}{\lambda}\int_0^x(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-t))\sum_{i=1}^n a_iD_{0t}^{\alpha_i}u_y(t,0)\,dt \tag{1.10}$$

есть решение уравнения (1.1) при $y<0$, где $z(x,y)$ – решение уравнения (1.7) при $y>0$, а функция

$$u(x,y)=-\frac{\mu}{\lambda}\int_0^x(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-t))\sum_{i=1}^n a_iD_{0t}^{\alpha_i}u_y(t,0)\,dt$$

есть частное решение уравнения (1.1) при $y>0$. Следовательно, из (1.9) следует справедливость представления (1.6), то есть $u(x,y)=z(x,y)+w(x)$. Отсюда следует, что $u_y(x,0)=z_y(x,0)$. Тогда из (1.9) имеем

$$w'''(x)-\lambda w'(x)-\mu\sum_{i=1}^n a_iD_{0x}^{\alpha_i}z_y(x,0)=0,$$

а функция $z(x,y)=u(x,y)-w(x)$ удовлетворяет уравнению (1.7).

Аналогично доказывается случай при $y<0$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. При рассмотрении задачи T без ограничения общности можно предполагать, что

$$w(0)=w'(0)=w''(0)=0. \tag{1.11}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1.8) с условиями (1.11) имеет вид

$$w(x)=-\frac{\mu}{\lambda}\int_0^x\Big(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-t)\Big)\sum_{i=1}^n a_iD_{0t}^{\alpha_i}z_y(t,0)\,dt \tag{1.12}$$

В силу представления (1.6), с учетом [8] уравнение (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3) принимают вид (1.7),

$$z(x,y)|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad z(x,y)|_{x=1}=\varphi_2(y)-w(1),\quad \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_3(y), \tag{1.13}$$

$$z(x,y)|_{AC}=\psi_1(x)-w(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \tag{1.14}$$

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}. \tag{1.15}$$

Как нам известно [10], решение уравнения (1.7) при $y<0$, с краевыми условиями (1.14), (1.15) и

$$z(x,y)|_{y=0}=\tau(x)-w(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1.16}$$

дается формулой

$$\begin{gathered}
z(x,y)=\tau^*(x+y)+\psi_1^*\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi_1^*\left(\frac{x+y}{2}\right)-\\
-\lambda y\int_0^{x+y}\tau^*(t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda(x-y-t)(x+y-t)}\right]dt+\sqrt{\lambda}\int_0^y\sin\sqrt{\lambda}\,(y-t)\,\psi_1^*(-t)\,dt+\\
+\sqrt{2}\int_0^y\cos\sqrt{\lambda}(y-t)\psi_2^*(-t)\,dt+\lambda\int_0^{\frac{x-y}{2}}g_1\,(x-y,x+y,t)\,\psi_1^*(t)\,dt-\\
-\lambda\int_0^{\frac{x+y}{2}}g_1\,(x+y,x-y,t)\,\psi_1^*(t)\,dt+\sqrt{2}\int_0^{\frac{x-y}{2}}g_2\,(x-y,x+y,t)\,\psi_2^*(t)\,dt-\\
-\sqrt{2}\int_0^{\frac{x-y}{2}}g_2\,(x+y,x-y,t)\,\psi_2^*(t)\,dt-\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\psi_2^*(0)\Big\{\sin\sqrt{\lambda}\left(\frac{x-y}{2}\right)-\\
-\sin\sqrt{\lambda}\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\sqrt{\lambda}y+\lambda(x+y)\int_0^{\frac{x-y}{2}}\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda(x+y)(x-y-2t)}\right]\sin\sqrt{\lambda}t\,dt-
\end{gathered} \tag{1.17}$$

$$-\lambda(x-y)\int_0^{\frac{x+y}{2}}\bar I_1\left[\sqrt{\lambda(x-y)(x+y-2t)}\right]\sin\sqrt{\lambda}\,t\,dt\Big\},$$

где

$$g_1(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\left(t-\frac{x}{2}\right)+y\bar I_1\left[\sqrt{\lambda y(x-2t)}\right]+$$
$$+\sqrt{\lambda}y\int_t^{x/2}\sin\sqrt{\lambda}(t-s)\bar I_1\left[\sqrt{\lambda y(x-2s)}\right]ds, \tag{1.18}$$

$$g_2(x,y,t)=\cos\sqrt{\lambda}\left(t-\frac{x}{2}\right)+\lambda y\int_t^{x/2}\cos\sqrt{\lambda}(t-s)\bar I_1\left[\sqrt{\lambda y(x-2s)}\right]ds. \tag{1.19}$$

$$\psi_1^*(x)=\psi_1(x)-w(x),\quad \psi_2^*(x)=\psi_2(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x),\quad \tau^*(x)=\tau(x)-w(x), \tag{1.20}$$

$\bar I_1(x)=I_1(x)/x$, $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

Дифференцируя равенство (1.17) по y, а затем перейдя к пределу, при $y\to 0$, с учетом (1.11), (1.12), (1.20) получим следующее соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB:

$$\nu(x)+\mu\int_0^x\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}(x-t)+\int_t^x\left(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}(s-t)\right)\bar I_1\left[\sqrt{\lambda}(x-s)\right]ds\right\}\sum_{i=1}^n a_iD_{0t}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt-$$
$$-\mu\int_0^{x/2}L(x,t)\sum_{i=1}^n a_iD_{0t}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt=\tau'(x)-\lambda\int_0^x\tau(t)\bar I_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt+f(x), \tag{1.21}$$

где

$$\nu(x)=z_y(x,0), \tag{1.22}$$

$$L(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}\left(\frac{x}{2}-t\right)+\sin\sqrt{\lambda}\left(\frac{x}{2}-t\right)\right)+$$
$$+\frac{x}{2}\left(\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}\left(\frac{x}{2}-t\right)-\cos\sqrt{\lambda}\left(\frac{x}{2}-t\right)\right)+2\int_t^{x/2}\left[\cos\sqrt{\lambda}(t-s)-\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}(s-t)\right]\times \tag{1.23}$$
$$\times\left(\bar I_1\left[\sqrt{\lambda x(x-2s)}\right]-\lambda xs\bar I_2\left[\sqrt{\lambda x(x-2s)}\right]\right)ds,$$

$$f(x)=-2\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\lambda x}{2}\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)+\int_0^{x/2}\left(\lambda\psi_1(t)-\sqrt{2}\psi_2'(t)\right)\times$$
$$\times\left(\cos\sqrt{\lambda}\left(t-\frac{x}{2}\right)-\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\sin\sqrt{\lambda}\left(t-\frac{x}{2}\right)\right)dt+$$
$$+2\lambda\int_0^{x/2}\left(\bar I_1\left[\sqrt{\lambda x(x-2t)}\right]-\lambda xt\,\bar I_2\left[\sqrt{\lambda x(x-2t)}\right]\right)[\psi_1(t)+ \tag{1.24}$$
$$+\int_0^t\left(\sqrt{2}\psi_2(s)\cos\sqrt{\lambda}(s-t)+\sqrt{\lambda}\,\psi_1(s)\sin\sqrt{\lambda}(s-t)\right)ds\Big]dt-$$
$$-\sqrt{2\lambda}\psi_2(0)\int_0^{x/2}\left(\bar I_1\left[\sqrt{\lambda x(x-2t)}\right]-\lambda xt\bar I_2\left[\sqrt{\lambda x(x-2t)}\right]\right)\sin\sqrt{\lambda}t\,dt.$$

В силу непрерывности $\nu(x)$ и на основании (1.7) при $y>0$ получаем соотношение

$$\tau''(x)-\lambda\tau(x)=k+\nu(x)+w''(x)-\lambda w(x), \tag{1.25}$$

где k — неизвестная постоянная. Считая правую часть известной, общее решение уравнения (1.25) с условиями $\tau(0)=\varphi_1(0)$, $\tau'(0)=\varphi_3(0)$ и с учетом (1.11), (1.12) имеет вид

$$\tau(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\nu(t)\,dt+\frac{\mu}{\lambda}\int_0^x\left(\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}(x-t)-1\right)\sum_{i=1}^n a_iD_{ot}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt+$$
$$+\frac{k}{\lambda}\left(\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}x-1\right)+\varphi_1(0)\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}x. \tag{1.26}$$

Подставляя (1.26) в (1.21), получим следующее интегральное уравнение

$$\nu(x)-\int_0^x\left[\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-t)-\sqrt{\lambda}\int_t^x\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(s-t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-s)\right]ds\right]\nu(t)\,dt-$$
$$-\mu\int_0^{x/2}L(x,t)\sum_{i=1}^{n}a_iD_{ot}^{\alpha_i}\nu(t)\ dt=kf_1(x)+f_2(x), \tag{1.27}$$

где

$$f_1(x)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x\left(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t\right)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt, \tag{1.28}$$

$$\begin{gathered}f_2(x)=f(x)+\sqrt{\lambda}\varphi_1(0)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,x+\varphi_3(0)\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,x-\\-\lambda\int_0^x\left[\varphi_1(0)\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,t+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t\right]\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right]dt,\end{gathered} \tag{1.29}$$

Полагая

$$\beta(x)=\mu\int_0^{x/2}L(x,t)\sum_{i=1}^{n}a_iD_{ot}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt+kf_1(x)+f_2(x), \tag{1.30}$$

уравнение (1.27) запишем в виде [7]

$$\nu(x)+\int_0^x L_1(x,t)\nu(t)\,dt=\beta(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{1.31}$$

где

$$L_1(x,t)=\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-t)-\sqrt{\lambda}\int_t^x\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(s-t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-s)\right]ds$$

Считая правую часть известной, решение уравнения (1.31) запишем в виде

$$\nu(x)=\beta(x)+\int_0^x R_1(x,t)\beta(t)\,dt,$$

где $R_1(x,t)$ — резольвента ядра $L_1(x,t)$.

Последнее равенство с учетом (1.30) и формулы Дирихле принимает вид

$$\nu(x)-\mu\int_0^{x/2}L_2(x,t)\sum_{i=1}^{n}a_iD_{ot}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt=F_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1.32}$$

где

$$L_2(x,t)=L(x,t)-\int_{2t}^x R_1(x,s)L(s,t)\,ds, \tag{1.33}$$

$$F_1(x)=k\left[f_1(x)-\int_0^x R_1(x,t)f_1(t)\,dt\right]+f_2(x)-\int_0^x R_1(x,t)f_2(t)\,dt. \tag{1.34}$$

Уравнения (1.32) с учетом свойства интегро-дифференциального оператора можно записать в виде

$$\nu(x)-\mu\int_0^{x/2}L_2^*(x,t)\nu(t)\,dt=F_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1.35}$$

где

$$L_2^*(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_t^{x/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_iL_2(x,s)}{\Gamma(-\alpha_i)\,(s-t)^{1+\alpha_i}}\,ds & \text{при}\quad \alpha_i<0,\\ \displaystyle\int_t^{x/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_iL_2'(x,s)}{\Gamma(1-\alpha_i)\,(s-t)^{\alpha_i}}\,ds & \text{при}\quad 0<\alpha_i<1.\end{cases} \tag{1.36}$$

В силу (1.5), (1.23), (1.24), (1.28), (1.29), (1.33) и (1.34) заключаем, что

$$|L_2^*(x,t)| \leqslant const, \qquad |F_1(x)| \leqslant const. \tag{1.37}$$

Таким образом, уравнение (1.35) является интегральным уравнением со сдвигом и с учетом (1.37) оно однозначно разрешимо. Решение уравнения (1.35) имеет вид

$$\nu(x) = F_1(x) + \mu \int_0^{x/2} R^*(x,t;\mu) F_1(t)\,dt,$$

где $R^*(x,t,\mu)$ — резольвента ядра уравнения (1.35). Пользуясь соотношениями (1.12), (1.26), с учетом (1.11) по найденной функции $\nu(x)$ однозначно определяем функции $\tau(x), w(x)$. Из условия $\tau(1) = \varphi_2(0) - w(1)$ определим постоянную k по формуле

$$k = \frac{1}{\rho}\Bigg\{ -\sqrt{\lambda}\int_0^1 \mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}\,(1-t) f_2^*(t)\,dt - 2\mu\int_0^1 \Big(\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}\,(1-t) - 1\Big)\sum_{i=1}^n a_i D_{0t}^{\alpha_i} f_2^*(t)\,dt +$$
$$+\lambda\varphi_2(0) - \lambda\varphi_1(0)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\varphi_3(0)\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}\Bigg\}, \qquad \text{где}$$

$$\rho = \mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda} - 1 + \sqrt{\lambda}\int_0^1 \mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}\,(1-t) f_1^*(t)\,dt + 2\mu\int_0^1 \Big(\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}\,(1-t) - 1\Big)\sum_{i=1}^n a_i D_{0t}^{\alpha_i} f_1^*(t)\,dt \neq 0$$

$$f_1^*(x) = f_1(x) - \int_0^x R_1(x,t) f_1(t)\,dt + \mu\int_0^{x/2} R^*(x,t;\mu)\left[f_1(t) - \int_0^t R_1(t,s) f_1(s)\,ds\right]dt,$$
$$f_2^*(x) = f_2(x) - \int_0^x R_1(x,t) f_2(t)\,dt + \mu\int_0^{x/2} R^*(x,t;\mu)\left[f_2(t) - \int_0^t R_1(t,s) f_2(s)\,ds\right]dt.$$

Решение задачи T в области Ω_2 восстанавливается по формуле (1.6) с учетом (1.12), (1.17), а в области Ω_1 приводится к задаче (1.7), (1.13) и $z(x,+0) = \tau(x)$, которая исследована в [4].

Таким образом, заключаем, что задача T однозначно разрешима. Теорема 1 доказана.

§ 2. Аналог задачи Дарбу для нагруженного уравнения гиперболического типа

Пусть D — область, ограниченная характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} - u_{yy} - \lambda u\right) - \mu\sum_{i=1}^n a_i(x) D_{0x}^{\alpha_i} u_y(x,0) = 0, \tag{2.1}$$

и отрезком AB оси $y = 0$.

Задача Дарбу. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (2.1), непрерывное в $\bar{D}$, обладающее непрерывными производными u_x, u_y вплоть до $AB \cup AC$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x,y)|_{AB} = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.2}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.3}$$

где n — внутренняя нормаль, $\tau(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ — заданные функции, причем

$$\tau(0) = \psi_1(0), \quad \tau'(0) = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(0), \quad \tau(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1), \tag{2.4}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Если $\lambda \neq 0$, $a_i = a_i(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1)$, и выполнены условия (2.4), (2.5), то в области D существует единственное решение задачи Дарбу.*

Лемма 2. *Любое регулярное решение уравнения* (2.1) *представляется в виде*

$$u(x,y) = z\,(x,y) + w(x), \tag{2.6}$$

где $z(x,y)$ *— решение уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_{xx} - z_{yy} - \lambda z) = 0, \tag{2.7}$$

а $w(x)$ *— решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения*

$$w'''(x) - \lambda w'(x) = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{0x}^{\alpha_i} z_y(x,0). \tag{2.8}$$

Доказательство. Учитывая, что функция $a\,\cos\sqrt{\lambda}x + b\,\sin\sqrt{\lambda}x + c$ удовлетворяет уравнению (2.7), при исследовании задачи без ограничения общности можно предполагать, что

$$w(0) = w'(0) = w''(0) = 0. \tag{2.9}$$

Решение задачи Коши для уравнения (2.8) с условиями (2.9) имеет вид

$$w(x) = -\frac{\mu}{\lambda}\int_0^x (1 - \mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}(x-t)) a_i(t) D_{0t}^{\alpha_i} z_y(t,0)\,dt, \tag{2.10}$$

В силу представления (2.6) задача Дарбу редуцируется к задаче A* нахождения регулярного в области D решения $z(x,y)$ уравнения (2.7), удовлетворяющего условиям

$$z(x,y)|_{AB} = \tau(x) - \omega(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.11}$$

$$z(x,y)|_{AC} = \psi_1(x) - w(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.12}$$

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} w'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Решение уравнения (2.7) в D с условиями (2.11), (2.12) и (2.13) представимо в виде формулы (1.17), введенной в § 1. □

Доказательство теоремы 2. Дифференцируя решения (1.17) по y, а затем переходя к пределу при $y \to 0$, с учетом (2.9), (2.10) получим следующее соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\begin{gathered} \nu(x) + \mu\int_0^x k_{1j}(x,t) D_{0t}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt - \mu\int_0^{x/2} k_{2j}(x,t) D_{0t}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt = \\ = \tau'(x) - \lambda\int_0^x \tau(t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] dt + f(x), \end{gathered} \tag{2.14}$$

где $\nu(x) = z_y(x,0)$, $k_{1j}(x,t) = a_i(t)\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}(x-t) + \int_t^x \left(1 - \mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}(s-t)\right)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-s)\right] ds\right\}$, $k_{2j}(x,t) = a_i(t)L(x,t)$, $f(x)$ зависят от заданных функций, введенных в § 1; по индексу подразумевается суммирование от 1 до n. Полагая

$$\beta(x) = \mu\int_0^{x/2} k_{2j}(x,t) D_{0t}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt + \tau'(x) - \lambda\int_0^x \tau(t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] dt + f(x), \tag{2.15}$$

уравнения (2.14) запишем в виде [7]

$$\nu(x) + \mu\int_0^x k_{1j}(x,t) D_{0t}^{\alpha_i}\nu(t)\,dt = \beta(x). \tag{2.16}$$

Считая правую часть известной, не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $\alpha_i < 0$ при $i = m + 1, \dots, n$.

1) Пусть $i \geqslant m+1$. Тогда для любой функции $\nu(x) - C[0,1]$ применяя формулу перестановки интегрирования Дирихле, из (2.16) имеем

$$\nu(x) + \frac{\mu}{\Gamma(-\alpha_i)} \int_0^x \nu(t)\, dt \int_t^x \frac{k_{1j}(x,\xi) d\xi}{(\xi - t)^{1+\alpha_i}} = \beta(x). \tag{2.17}$$

2) Пусть $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда уравнение (2.16) с учетом [3] имеет вид:

$$\nu(x) - \mu \int_0^x \nu(t)\, dt \int_t^x \frac{\partial k_{1j}(x,\xi)/\partial \xi}{\Gamma(1-\alpha_i)(\xi - t)^{\alpha_i}} = \beta(x). \tag{2.18}$$

Считая правую часть известной, решение уравнений (2.17) ((2.18)) с учетом (2.4), (2.5) запишем в виде

$$\nu(x) = \beta(x) + \int_0^x R_{1j}(x,t)\beta(t)\, dt,$$

где $R_{1j}(x,t)$ — резольвента ядра уравнения (2.17) ((2.18)). Последнее равенство с учетом (2.15) и формулы Дирихле, легко можно перевести в интегральное уравнение Вольтера второго рода со сдвигом [10], ядро которого имеет слабую особенность. Таким образом, методом последовательных приближений [2] и на основе теории интегральных уравнений [7], при выполнении условий (2.4), (2.5) при $\lambda \neq 0$, $a_i = a_i(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1)$, доказывается однозначная разрешимость полученных уравнений. Отсюда заключаем, что задача Дарбу однозначно разрешима. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 181–184.
4. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
6. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 224 с.
8. Сабитов К.Б. Построения в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. 1 // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
9. Балтаева У.И. О некоторых краевых задачах для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором // Узб. мат. журн. Ташкент, 2007. № 3. С. 26–37.
10. Балтаева У.И. Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа третьего порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 2008. 111 с.
11. Балтаева У.И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка // Уфим. мат. журнал. 2011. Т. 3. № 3. С. 15–25.

Поступила в редакцию 07.04.2012

Балтаева Умида Исмаиловна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики и прикладной математики, Ургенчский государственный университет, 740000, Узбекистан, Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14.
E-mail: umida_baltayeva@mail.ru

U. I. Baltaeva

On some boundary value problems for a third order loaded integro-differential equation with real parameters

Keywords: loaded equation, equations of mixed type, integro-differential equation, integral equation with a shift, Bessel functions.

Mathematical Subject Classifications: 35M10, 35L35

We consider a linear loaded integro-differential equation with hyperbolic operator

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-u_{yy}-\lambda u\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),$$

and loaded integro-differential equation with mixed operator

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-\frac{1-\operatorname{sgn}y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn}y}{2}u_y-\lambda u\right)=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u_y(x,0),$$

where $D_{0x}^{\alpha_i}$ is integro-differential operator (in the sense of Riemann–Liouville), $a_i(x)$ are coefficients, λ,μ are given real parameters, and $\lambda>0$.

In this paper, the unique solvability of the boundary value problems (of a type similar to the Darboux problem and the Tricomi problem) of a loaded third order integro-differential equation with hyperbolic and parabolic-hyperbolic operators is proved by method of integral equations. The problem is similarly reduced to a Volterra integral equation with a shift. Under sufficient conditions for given functions and coefficients the unique solvability is proved for the solution of obtained integral equations.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. Darboux problem for a one degenerating loaded integro-differential equation of the second order, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 103–108.

2. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* (The equations of mathematical biology), Moscow: Vysshaya shkola, 1995, 301 p.

3. Kaziev V.M. About Darboux problem for a one loaded integro-differential equation of the second order, *Differ. Uravn.*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 181–184.

4. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipa* (Boundary value problems for the equation of mixed and mixed-composite type), Tashkent: Fan, 1971, 240 p.

5. Dzhurayev T.D., Sopuev A., Mamazhonov M. *Kraevye zadachi dlya uravnenii parabolo-giperbolichesko-go tipa* (Boundary value problems for the parabolic-hyperbolic type equations), Tashkent: Fan, 1986, 576 p.

6. Salakhitdinov M.S. *Uravnenie smeshanno-sostavnogo tipa* (Equation of mixed-composite type), Tashkent: Fan, 1974, 156 p.

7. Mikhlin S.G. *Lektsii po lineinym integral‘nym uravneniyam* (Lecture on linear integral equations), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 224 p.

8. Sabitov K.B. Construction of solution explicit form of Darboux problem for telegraph equation and application for inversion of integral equations, *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 6, pp. 1023–1032.

9. Baltaeva U.I. On some boundary value problems for a third order loaded equation with a parabolic-hyperbolic operator, *Uzbek. Mat. Journal*, Tashkent, 2007, no. 3, pp. 26–37.

10. Baltaeva U.I. Boundary value problems for the loaded third order equations of the mixed type, *Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Tashkent, 2008, 111 p.

11. Baltaeva U.I., Islomov B. Boundary value problems for the loaded third order differential equations of the hyperbolic and mixed types, *Ufim. Mat. J.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 15–25.

Received 07.04.2012

Baltaeva Umida Ismailovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Urgench State University, ul. H. Olimjon, 14, Urgench, 740000, Uzbekistan.
E-mail: umida_baltayeva@mail.ru