КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 519.712 : 510.25 : 510.67

© *Н. И. Калядин*

РАСПОЗНАВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ МЕТОДОМ КОЛЛЕКТИВНОГО ГОЛОСОВАНИЯ

Исследуются методы представления отношений предикатами Радемахера, предлагается метод коллективного голосования для распознавания отношений.

Ключевые слова: предикат Радемахера, конечные отношения, сигнатура модели, полнота, обучающая выборка.

Введение

Многие задачи компьютерного распознавания образов, как правило, требуют в конечном счете построения того или иного классификатора (распознающего автомата) [1–3]. Основными составляющими классификатора являются блок памяти с эталонами объектов и процессор, осуществляющий принятие решения по тем или иным решающим правилам. Обычно классификаторы строят на базе некоторого компьютера, где роль процессора заменяет программа, последовательно обрабатывающая массив эталонов для выявления наиболее близкого эталона к предъявленной реализации. Такая процедура на этапе классификации занимает много времени (массивы эталонов, как правило, достаточно велики).

В целях сокращения времени для принятия решений предлагается один из вариантов построения классификатора последовательно–параллельного действия, в качестве эталонов которого взяты отношения. Конструктивно эталонные отношения строятся на основе обучения как регистры, реализующие полную систему предикатов Радемахера, связанные комбинационными схемами. Количество регистров-счетчиков соответствует местности отношений, а число выходов комбинационной схемы — числу эталонов–отношений.

Принятие решения осуществляется последовательно–параллельным методом: на регистры подаются последовательно все возможные комбинации чисел, то есть задаются все координаты эталонов–отношений, и соответствующие этим отношениям предикаты параллельно сравниваются с предъявленными отношениями (предикатами).

Результаты сравнения накапливаются в счетчиках. Как только все комбинации будут проверены, счетчики опрашиваются и максимально заполненный счетчик вырабатывает сигнал идентифицированного эталона.

Такой подход к построению классификатора отношений тем эффективнее, чем больше массив эталонов, так как время для принятия решений при этом не зависит от мощности обучающей выборки, тогда как при последовательной обработке эталонов время для принятия решения возрастает прямо пропорционально количеству эталонов.

§ 1. Решающие правила для классификаторов отношений

Рассмотрим решающие правила для классификации отношений, ориентированные на синтез структуры классификатора (распознающего автомата) минимальной сложности [1, 7].

1. Метод коллективного голосования для отношений

Пусть $M \rightleftharpoons \{a_1, a_2, \dots, a_{2^n}\}$ — основное множество конструктивных объектов, число которых равно целой степени двойки.

На m-й декартовой степени множества M заданы эталоны обучающей выборки $O_1, O_2, \ldots, O_l \subseteq M^m$, классифицирующая функция $f : \mathfrak{I}_l \to \mathfrak{I}_t$, где $\mathfrak{I}_l \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, l\}$, $\mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}$, l — число объектов классификации, t — число эталонов $t \in N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Для предъявленного отношения $\mathfrak{X} \subseteq M^m$ вычисляются величины:

а) мера близости между эталонными $O_i(\overline{x})$ и предъявленными $\mathfrak{X}(\overline{x})$ описаниями объекта $\overline{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ — одной из реализаций отношения $\mathfrak{X}$, $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ — набор признаков x_j, $j = \overline{1, n}$, n — число признаков

$$P\left(O_i(\overline{x}), \mathfrak{X}(\overline{x})\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } O_i(\overline{x}) = \mathfrak{X}(\overline{x}), \ \left(i = \overline{1, t}\right); \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}(\overline{x}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \overline{x} \in \mathfrak{X}; \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $\quad O_i(\overline{x}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \overline{x} \in O_i; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

б) $S_i = \sum\limits_{\overline{x} \in M^m} P\left(O_i(\overline{x}), \mathfrak{X}(\overline{x})\right)$ — суммарная величина сходства (похожести) по всем реализациям $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathfrak{X}$ предъявленного на распознование описания отношения $\mathfrak{X}(\overline{x})$ с эталонным $O_i(\overline{x})$ для i-го класса.

Пусть $S_0 = \max(S_1, S_2, \ldots, S_l)$. Тогда частные решающие предикаты вычисляются следующим образом: $Q_i(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \text{ если } S_0 = S_i; \ \left(i = \overline{1, l}\right); \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Общее решение по классификации определяется по формуле $R_k(\mathfrak{X}) = \bigvee\limits_{i \in D_k} Q_i(\mathfrak{X})$, $\left(k = \overline{1, t}\right)$, где $D_k = \{i | f(i) = k\}$ — множество номеров эталонных объектов, попадающих в класс k.

2. Дискретные функции Радемахера при произвольном конечном числе точек определения

В работах [1, 4] речь идет о предикатах Радемахера, которые определяются через дискретные функции Радемахера. Рассмотрим эти функции и их свойства.

Дискретные функции Радемахера $r^{2^n}(i, j)$, определенные в 2^n точках, вычисляются следующим образом: $r^{2^n}(0, j) = 1$, $\left(j = \overline{0, 2^n - 1}\right)$,

$$r^{2^n}(1, j) = \begin{cases} +1, \text{ если } j = \overline{0, 2^{n-1} - 1}; \\ -1, \text{ если } j = \overline{2^{n-1}, 2^n - 1}. \end{cases}$$

Остальные функции генерируются с помощью итерационного соотношения:

$$r^{2^n}(i, j) = r^{2^n}(i - 1, 2j \bmod 2^n); \quad \left(i = \overline{2, n}; \ j = \overline{0, 2^n - 1}\right).$$

Функции Радемахера вида $r^m(i, j)$, где $\left(i = \overline{0, n}; \ j = \overline{0, m - 1}\right)$, $n = \mu y\,(2^y \geqslant m)$.

μ — оператор минимизации [8], можно вычислить через функции Радемахера вида $r^{2^n}(i, k)$, $\left(i = \overline{0, n}; \ k = \overline{0, 2^n - 1}\right)$ следующим образом:

Теорема 1 (см. [4]). *Пусть $\nu = 2^n/m$, где $n = \mu y\,(2^y \geqslant m)$, μ — оператор минимизации, тогда $r^m(i, j) = r^{2^n}(i, [\nu \cdot j])$, $\left(i = \overline{0, n}; j = \overline{0, m - 1}\right)$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.*

3. Связь между точечными предикатами и предикатами Радемахера

Для построения предикатов конечной модели $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \langle M; \sigma \rangle$, где $M \rightleftharpoons \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $\sigma \rightleftharpoons \langle R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$, $n = \mu y\,(2^y \geqslant m)$, μ — оператор минимизации [8], которые используются в классификаторах отношений последовательно–параллельного действия, необходимо представлять точечные предикаты $P_1, P_2, \ldots, P_m$, где

$$P_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = a_i; \ \left(i = \overline{1, m}\right); \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

через предикаты Радемахера $R_1, R_2, \ldots, R_n$:

$$R_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x = a_k) \ \& \ r^m(i, k-1) = 1; \left(i = \overline{1, n}\right); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $r^m(i,j)$ — дискретные функции Радемахера, определенные в m точках.

Теорема 2 (см. [4]). *Для любого $k \in \mathfrak{I}_m \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, m\}, m \in N$ точечные предикаты $P_k(x)$ представимы через предикаты Радемахера $\widetilde{R}_i^k(x)$:*

$$P_k(x) = \widetilde{R}_1^k(x) \ \& \ \widetilde{R}_2^k(x) \ \& \ \ldots \ \& \ \widetilde{R}_n^k(x),$$

где $\widetilde{R}_i^k(x) = \begin{cases} R_i(x), & \text{если } [\nu \cdot (k-1)]_{n-i+1} = 0; \\ \neg R_i(x), & \text{в противном случае;} \end{cases}$ $\nu = 2^n/m$; $[\cdot]$ — *целая часть числа;* $[\nu \cdot (k-1)]_{n-i+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{i-1}[\nu \cdot (k-1)]_i$; $[\nu \cdot (k-1)]_i \in \{0, 1\}$; $n = \mu y\,(2^y \geqslant m)$, μ — *оператор минимизации,* $\left(i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, m}\right)$.

В случае $m = 2^n$ предикаты Радемахера интерпретируются двоичными разрядами регистров $P_r(n)$ с n разрядами. При этом 1-й предикат R_1 сигнатуры σ моделируется m-м разрядом, n-й предикат R_n — 1-м разрядом указанных регистров.

Таким способом по предикатам Радемахера на множестве M можно смоделировать любой предикат $Q(x_1, \ldots, x_k)$.

4. Относительная полнота в конечных моделях

Рассмотрим конечную модель $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \langle M; \sigma \rangle$ с основным множеством $M \rightleftharpoons \{a_1, \ldots, a_m\}$ и сигнатурой $\sigma \rightleftharpoons \langle P_1, P_2, \ldots, P_s \rangle$.

Пусть $C(M)$ — некоторое семейство предикатов по M.

Определение 1. Сигнатуру модели $\mathfrak{M}$ назовем полной относительно семейства предикатов $C(M)$, если любой предикат этого семейства можно представить через предикаты сигнатуры σ с помощью логических связок $\&, \vee, \neg$.

Обозначим через σ^R сигнатуру с предикатами Радемахера $\sigma^R \rightleftharpoons \langle R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$, где

$$n = \begin{cases} p, & \text{если } m = 2^p;\ p \in M; \\ [\log_2 m] + 1, & \text{в противном случае; здесь } [\cdot] \text{ — целая часть числа.} \end{cases}$$

Пусть $C_m^k(M)$ — система всех k-местных предикатов на M. Задача заключается в том, чтобы любой предикат $P(x_1, \ldots, x_k) \in C_m^k(M)$ можно было разложить на предикаты Радемахера $R_i(x)$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$, где $R_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x = a_t) \ \& \ (r^m(i, t-1) = 1); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Положительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 3 (см. [4]). *Сигнатура $\sigma^R \rightleftharpoons \langle R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ модели $\mathfrak{M}^m \rightleftharpoons \left\langle M; \sigma^R \right\rangle$ полна относительно любой системы предикатов $C_m^k(M)$, где n — количество предикатов сигнатуры σ^R связано с числом элементов $|M| = m$ соотношением $n = \mu y(2^y \geqslant m)$, μ — оператор минимизации.*

Метод коллективного голосования для отношений позволяет работать с конечными отношениями как с массивами данных в последовательном режиме принятия решений.

В результате получается последовательно-параллельный способ принятия решений, при этом выигрываем во времени, проигрывая в аппаратных средствах для хранения эталонов и их сравнении с неизвестной реализацией.

§ 2. Описание цветных изображений с помощью предикатов Радемахера

Пусть на области $D \subseteq R^2$ задано конечное поле–изображение, имеющее m цветов. Пронумеруем цвета от 1 до m. Пусть $|D| = d$ и имеется разбиение области D на t классов эквивалентности D_i, $\left(i = \overline{1,t}\right)$ или подполей-изображений так, что $\bigcup\limits_{i=1}^{t} D_i = D$ и для $i \neq j$, $D_i \cap D_j = \varnothing$, $|D_i| = d_i \in N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Определение 2. *Пару* $\langle \langle x, y\rangle , j\rangle$ *назовем пикселом поля–изображения* D, *если в точке* $\langle x, y\rangle \in D$ *имеет место* j*-й цвет* $j \in \mathfrak{I}_m \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, m\}$, $m \in N$.

Определение 3. *Множество пикселов* $U_D = \{\langle \langle x, y\rangle , j\rangle \,|\, \langle x, y\rangle \in D\}$ *назовем изображениями поля изображения* D, *соответственно для* D_i, $U_{D_i} = \{\langle \langle x, y\rangle , j\rangle \,|\, \langle x, y\rangle \in D_i\}$ *подызображения подполя–изображения* D_i.

Изображения подполей–изображений можно укрупнять с помощью операций объединения $D_{i\vee j} = D_i \cup D_j, (i, j \in \mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\})$, $t \in N$ или в общем случае $D_{i_1\vee i_2\vee\ldots\vee i_n} = D_{i_1} \cup D_{i_2} \cup \cup \ldots \cup D_{i_n}$.

Обозначим через $S \rightleftharpoons \{D_i | i \in \mathfrak{I}_t\}$ разбиение области D, а через $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \langle S; \sigma\rangle$ — алгебру с основным множеством S и сигнатурой $\sigma = \langle \cup\rangle$.

Теорема 4 (см. [8]). *Множество* $L \rightleftharpoons \left\{D_{i_1\vee i_2\vee\ldots\vee i_n} | i_j \in \mathfrak{I}_t; j = \overline{1,n}\right\}$ *есть верхняя полурешетка относительно частичного порядка* $\leqslant$ *такого, что* $(\forall a, b \in L)$ $[a \leqslant b \Leftrightarrow a \subseteq b]$ *с наибольшим элементом* $D \in L$.

С каждым элементом $a \in L$ свяжем изображение $U_a = \{\langle \langle x, y\rangle , j\rangle \,|\, \langle x, y\rangle \in D\}$ поля-изображения D.

На практике обычно области D берут прямоугольные: $D = \left\{\langle x, y\rangle | x = \overline{1, k_1};\ y = \overline{1, k_2}\right\}$ или квадратные, когда $k_1 = k_2$. Пусть имеется изображение U_D, $D = M^2$; $M \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, k\}$.

Поставим задачу по вычислению предиката $\lceil a \in U_D\rceil$, где $a = \langle \langle x, y\rangle, j\rangle \in M^3$.

Удобным аппаратом для вычисления предиката $\lceil a \in U_D\rceil$ является теория разложения изображения по предикатам Радемахера [1, 4–6].

Пусть $U_D = \left\{\langle x, y, j\rangle \,|\, \langle x, y\rangle \in M^2\right\} = \{\langle i_{11}, i_{12}, i_{13}\rangle , \ldots , \langle i_{l1}, i_{l2}, i_{l3}\rangle\}$, соответствующий этому изображению предикат $P(x_1, x_2, x_3) = \lceil\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in U_D\rceil$ можно записать так:

$$P(x_1, x_2, x_3) = P_{i_{11},i_{12},i_{13}}(x_1, x_2, x_3) \vee \ldots \vee P_{i_{l1},i_{l2},i_{l3}}(x_1, x_2, x_3),$$

где $P_{i_{j1},i_{j2},i_{j3}}(x_1, x_2, x_3) = P_{i_{j1}}(x_1)\ \&\ P_{i_{j2}}(x_2)\ \&\ P_{i_{j3}}(x_3)$, $\left(j = \overline{1,l}\right)$.

Подставив $P_{i_{jk}}(x_k) = \widetilde{R}_1^{i_{jk}}(x_k)\ \&\ \ldots\ \&\ \widetilde{R}_n^{i_{jk}}(x_k)$, $(k = 1, 2, 3)$:

$$\text{где } \widetilde{R}_p^q(x_k) = \begin{cases} R_p(x_k), \text{ если } [\nu, (q-1)]_{n-p} = 0; \\ \neg R_p(x_k), \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$\nu = 2^n/k$, $[\cdot]$ — целая часть числа (нумерация двоичных разрядов начинается с нуля, с младших разрядов); $p = \overline{1,n}$; $q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot q_i$, $q_i \in \{0, 1\}$, находим требуемое разложение по предикатам Радемахера.

В ряде случаев такое представление изображения оказывается экономичнее и вычисление предиката принадлежности при этом более эффективно, нежели при переборе всех точек исходного изображения.

Предложенный способ представления цветных изображений с помощью предикатов Радемахера позволяет перейти к более общему случаю текстурных изображений.

Важное место при решении задач классификации текстур занимают такие вопросы, как выбор оптимального количества элементов исходной обучающей выборки O, построение эффективной процедуры дообучения и минимизации окончательной обучающей выборки в целях дальнейшей ее эксплуатации в режиме дешифрирования (классификации) указанных объектов.

§ 3. Обучение, минимизация и классификация текстур методом коллективного голосования

Целью настоящей работы является исследование места метода коллективного голосования среди других правил принятия решений [1–3] (таких как минимаксный критерий, метод минимума среднеквадратического отклонения, метод сильного голосования).

Исходным материалом является обучающая выборка O, класс контрольных выборок $\mathfrak{A} = \{K_1, K_2, \ldots, K_i\}$ и класс испытательных выборок $\mathfrak{B} = \{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$. Предполагается, что выборки формируются при фиксированной системе признаков.

1. Дискретизация обучающей, контрольных и испытательных выборок

Пусть $\mathcal{J} = O \cup \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, где $O = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$ — обучающая выборка, α_{ij} — дискретные значения признаков $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Пусть $[a_i, b_i]$ — интервал распределения i-го признака; a_i — нижняя граница; b_i — верхняя граница i-го признака.

Пару $\langle i, f(i)\rangle$ назовем «паспортом» для кортежа $\langle \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}\rangle$; обозначим множества номеров эталонных объектов $D_k \rightleftharpoons \{i | f(i) = k\}$, $\left(k = \overline{1,t}\right)$, классифицирующую функцию

$$f : \mathfrak{I}_m \to \mathfrak{I}_t, \quad \mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}, \quad \mathfrak{I}_m \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, m\}, \quad t, m \in N,$$

где t — число классов (эталонов).

Пусть для некоторого $r \in \mathfrak{I}_m$ с помощью оператора дискретизации $\Psi(0, r)$ получена матрица $O(r) = \|l_{ij}\|_{m\times n}$.

Между номерами кортежей $\bar{l}_i = \langle l_{i1}, \ldots, l_{in}\rangle$ и $\bar{l}_j = \langle l_{j1}, l_{j2}, \ldots, l_{jn}\rangle$ установим отношение эквивалентности следующим образом: $\bar{l}_i = \bar{l}_j \Leftrightarrow (\forall l = \overline{1,n})\,[l_{i_2} = l_{j_2}]$.

Профакторизуем каждое множество D_k, $\left(k = \overline{1,t}\right)$ по отношению эквивалентности $\sim$, то есть рассмотрим фактор–множество $D_k|_\sim$. Взяв по одному кортежу с «паспортом» $\langle i, f(i)\rangle$, где i принадлежит классу эквивалентности $\alpha_j \in D_k|_\sim$ по всем $k = \overline{1,t}$, и пронумеровав всю полученную выборку от 1 до $(l_1 + l_2 + \ldots + l_t)$, получим минимальную матрицу

$$O_\sim(r) = \left\| \begin{array}{c} \langle\ a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ \ a_{1n}\ \ \rangle \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \langle a_{l_1+l_2+\ldots+l_t}\ \ \ldots\ \ a_{l_1+l_2+\ldots+l_{tn}}\rangle \end{array} \right\|$$

с классифицирующей функцией $f_\sim(i)$ такой, что

$$f_\sim(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant l; \\ 2, \text{ если } l_1 + 1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2; \\ t, \text{ если } l_1 - l_2 - \ldots - l_{t-1} + 1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_t + \ldots + l_t. \end{cases}$$

Полученная матрица далее используется для классификации посредством некоторых решающих правил, в частности:

а) методом коллективного голосования;
б) минимаксным критерием [3];
в) методом минимума среднеквадратического отклонения [3];
г) методом сильного голосования.

2. Метод коллективного голосования

Пусть имеется некоторая минимизированная обучающая эталонная матрица

$$O = \left\| \begin{array}{c} \langle u_{11}\ u_{12}\ \ldots\ u_{1n}\rangle \\ \langle u_{21}\ u_{22}\ \ldots\ u_{2n}\rangle \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \langle u_{l1}\ u_{l2}\ \ldots\ u_{ln}\rangle \end{array} \right\|$$

с классифицирующей функцией $f_i : \mathfrak{I}_l \to \mathfrak{I}_t$, где $\mathfrak{I}_l \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, l\}$, $\mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}$, ($t$ — — число классов).

Предъявляется неизвестная реализация $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, для которой считается величина отнесения этой реализации к i-му объекту классификации при обучении — $\delta_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p(u_{ij}, x_j)$, $\left(i = \overline{1, l}\right)$, где $p(u_{ij}, x_j)$ — мера близости между эталонным u_{ij} и предъявленным x_j значениями признаков в реализации $\overline{x}$:

$$p(u_{ij}, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_{ij} = x_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее вычислим максимальное значение $\delta_0 = \max(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, частное решение которого определяет идентификацию объекта $\overline{x}$, фиксируется предикатом

$$R_i(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_i = \delta_0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $D_k \rightleftharpoons \{i | f\{i\} = k\}, \left(k = \overline{1, t}\right)$ — множество номеров эталонных объектов.

Тогда общее решение будет вычисляться предикатом $Q_k(\overline{x})$ следующего вида:

$$Q_k(x) = \bigvee_{i \in D_k} R_i(\overline{x}).$$

Таким образом, полученное правило классификации есть не что иное, как правило коллективного голосования, которое допускает многоальтернативное решение.

3. Минимаксный критерий классификации

Пусть дана та же матрица $O = \|u_{ij}\|_{l \times n}$ с классифицирующей функцией $f : \mathfrak{I}_l \to \mathfrak{I}_t$. Предъявляется неизвестная реализация $\overline{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, для которой вычисляются величины $\Delta_{ij} = |x_j - u_{ij}|, \left(i = \overline{1, l}; j = \overline{1, n}\right)$.

Пусть $\Delta_0 = \max(\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \ldots, \Delta_{in})$, а $\Delta_{i0} = \min(\Delta_{10}, \Delta_{20}, \ldots, \Delta_{l_0 0})$. Тогда частное решение, которое определяет идентификацию (или распознавание) объекта $\overline{x}$ фиксируется предикатом

$$P_i(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_{i0} = \Delta_0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $D_k \rightleftharpoons \{i | f(i) = k\}, \left(k = \overline{1, t}\right)$ — множество номеров эталонных объектов.

Тогда общее решение будет вычисляться предикатом $Q_k(\overline{x})$ следующего вида:

$$R_k(x) = \bigvee_{i \in D_k} P_i(\overline{x}).$$

Полученную процедуру классификации можно назвать минимаксным правилом принятия решения.

4. Метод минимума среднеквадратического отклонения

Пусть имеется матрица $O = \|u_{ij}\|_{l \times n}$ и классифицирующая функция $f : \mathfrak{I}_l \to \mathfrak{I}_t$. Предъявляется неизвестная реализация $\overline{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, для которой вычисляются величины $\Omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n} |u_{ij} - x_j|^2, \left(i = \overline{1, l}\right)$.

Пусть $\Omega_0 = \min(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_l)$. Частное решение определяется предикатом

$$\theta_i(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Omega_i = \Omega_0; \\ 0, & \text{если } \Omega_i \neq \Omega_0. \end{cases}$$

Пусть $D_k \rightleftharpoons \{i|f(i) = k\}, \left(k = \overline{1,t}\right)$. Тогда общее решение будет вычисляться предикатами $Q_k(\overline{x}) = \bigvee\limits_{i \in D_k} \theta_i(\overline{x})$.

Полученная процедура классификации называется методом минимума среднеквадратического отклонения.

5. Метод сильного голосования

Пусть матрица $O = \|u_{ij}\|_{l \times n}$ имеет l записей и задана классифицирующая функция $f : \mathfrak{I}_l \to \mathfrak{I}_t$. Относительно предъявленной неизвестной реализации $\overline{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ вычисляются частные решающие предикаты $S_i(\overline{x}) = \mathop{\&}\limits_{j=1}^{n} P(x_j, u_{ij})$, где

$$P(x_j, u_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j = x_{ij}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $D_k \rightleftharpoons \{i|f(i) = k\}, \left(k = \overline{1,t}\right)$. Тогда общее решение будет вычисляться предикатами $Q_k(\overline{x}) = \bigvee\limits_{i \in D_k} S_i(\overline{x})$.

Замечание 1. Если $(\forall k \in \{1, 2, \ldots, t\}, Q_k(\overline{x}) = 0)$, то система отказывается от решения.

6. Эффективное обучение и полнота обучающей выборки при методе коллективного голосования

Достижение максимального значения надежности классификации по глубине квантования назовем *эффектом экстраполяции* контрольной выборки относительно обучающей выборки O. Этот эффект удобно использовать в задаче оптимизации построения обучающей выборки для дальнейшей её эксплуатации.

Оптимизация ведется следующим образом.

1. Производится поиск максимума H надежности классификации K_1 относительно обучающей выборки O_0 с помощью выбранного решающего правила.

2. Обучающая выборка O_0 расширяется: $O_1 = O_0 \cup K_1^0$.

Пункты 1 и 2 повторяются для всех $K_i, \left(i = \overline{1,d}\right)$ так, что

$$O_2 = O_1 \cup K_2^0$$

$$\ldots$$

$$O_d = O_{d-1} \cup K_d^0,$$

где $K_1^0 = \{\overline{x} \text{ — неверно классифицировано } |\bar{x} \in O_0\}$.

На рис. 1 показано теоретическое изменение надежности классификации относительно обучающей выборки O и контрольной выборки K в зависимости от глубины квантования r для метода коллективного голосования.

Замечание 2. Каждый раз $K_i^0, \left(i = \overline{1,d}\right)$ строится в точке $\mathfrak{I}_{\max}$, когда достигнута максимальная надежность классификации.

Таким образом, эффективно построенная обучающая выборка O_d является исходным материалом для проверки качества обучения с помощью класса испытательных выборок $\mathfrak{B}$.

«Почти точное» равенство $(\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{B})\left[H(r_{\max}(U_1)) \approx H(r_{\max}(U_2))\right]$ является критерием качества обучающей выборки.

Другими словами, если для любых двух испытательных выборок системы $\mathfrak{B}$ надежность классификации стабильна, то система обучена полностью.

Общую надежность классификации системы можно оценить математическим ожиданием $a_i = \min(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{mi})$; $\quad b_i = \max(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{mi})$.

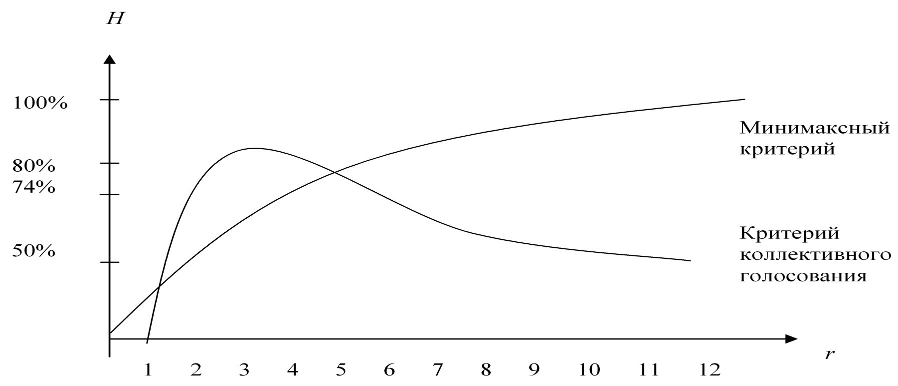

Рис. 1. Изменение надежности классификации в зависимости от глубины квантования

Оператор дискретизации $\Psi(A,n)$ переводит любую матрицу по следующему правилу: если $A=\|p_{ij}\|_{k\times n}$, $O=\|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, то $\Psi(A,n)=A(r)=\|l_{ij}\|_{k\times n}$, где $l_{ij}=\left[\frac{p_{ij}-a_j}{\Delta_j}\right], \Delta_j=\frac{b_j-a_j}{r}$; $\left(i=\overline{1,k};\quad j=\overline{1,n};\ r\in\{1,2,\ldots\}\right)$, здесь квадратные скобки означают целую часть числа; (a_j,b_j) — характеристики матрицы O.

Надежность классификации $H(A)$ при работе выбранного решающего правила вычисляется так:

$$H(A)=\frac{\text{количество верно и однозначно классифицируемых объектов из } A}{|A|}100\%,$$

где $|A|$ — число элементов в Δ.

7. Минимизация обучающей выборки, полученной с помощью оператора дискретизации

Переход от матрицы O к матрице $O(r)$ будем понимать как действие оператора дискретизации, то есть $\Psi(O,r)=O(r)$, $r\in\{1,2,\ldots\}$.

Пусть обучающая выборка $O=\|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$ такова, что задана классифицирующая функция $f:\Im_m\to\Im_t$, где $M(\mathfrak{B})=\frac{\sum\limits_{m\in\mathfrak{B}}H(r_{\max}(H))}{|\mathfrak{B}|}$.

Понятие «почти точного» равенства можно уточнить, а именно, для некоторого небольшого отклонения дисперсия $D(\mathfrak{B})$ не должна превышать заданного порога δ, то есть

$$D(\mathfrak{B})=\frac{\sum\limits_{m\in\mathfrak{B}}\left[M(\mathfrak{B})-H(r_{\max}(H))\right]^2}{|\mathfrak{B}|}\leqslant\delta.$$

Замечание 3. Все выборки из O формируются случайным образом с тем расчетом, чтобы в каждом классе обучающей выборки O было $80\div 100$ объектов (кортежей) и для любого объекта из A, $|A|\geqslant 100$.

Эти оценки приведены из статистических соображений с учетом точности вычисления надежности классификации [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов В. А., Калядин Н. И. Конечные модели и их применение к построению классификаторов отношений последовательно–параллельного действия // Дискретные системы обработки информации. ИМИ. Ижевск, 1983. Вып. 5. С. 83–88.
2. Горелик А. Л., Скрипкин В. А. Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1977. 222 с.
3. Васильев В. И. Распознающие системы: Справочник. Киев: Наукова думка, 1969. 169 с.

4. Белоусов В. А., Калядин Н. И. Относительная полнота в конечных моделях // Дискретные системы обработки информации. ИМИ. Ижевск, 1990. Вып. 10. С. 5–12.
5. Белоусов В. А., Калядин Н. И. Относительная полнота в конечных моделях // Тез. докл. X Всесоюз. конф. по математической логике. Алма-Ата, 1990. С. 21.
6. Белоусов В. А., Калядин Н. И. Связь между точечными предикатами Радемахера // XI Межреспубл. конф. по математической логике. Казань, 1992. С. 20.
7. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. 324 с.
8. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965. 392 с.
9. Калядин Н. И., Мурынов А. И. Об эффективности различных подходов в распознавании образов. // Автоматические устройства учета и контроля. ИМИ. Ижевск, 1977. Вып. 12. С. 3–5.

Поступила в редакцию 29.07.11

N. I. Kalyadin

Recognition of relations by the method of collective vote

We investigate the methods of presenting relationships by using Rademacher's predicates and offer a method of collective voting to recognize relationships.

Keywords: Rademacher predicate, finite relations, model signature, completeness, training sample.

Mathematical Subject Classifications: 03B70, 03C64, 03G05

Калядин Николай Иванович, к. т. н., профессор кафедры прикладной математики и информатики, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7 (корп. 6), E-mail: pmi@istu.ru

Kalyadin Nikolai Ivanovich, candidate of engineering sciences, professor, department of applied mathematics and informatics, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7 (build. 6), Izhevsk, 426069, Russia