УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

# О КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ [1]

Рассматриваются вопросы, связанные с достижимостью по скоростной координате для материальной точки при краевом условии на ее положение в последний момент времени. Исследуется свойство, имеющее смысл устойчивости (с точностью до замыкания) при ослаблении краевого условия. Для этого осуществляется сравнение области достижимости по скорости и множества притяжения, реализуемого в схеме с ужесточением ослабленных ограничений. Типичным оказывается совпадение последнего с замыканием упомянутой области достижимости.

*Ключевые слова*: множество притяжения, область достижимости, программное управление.

## Введение

Основные сокращения: в/з (вещественнозначная), к.-п. (кусочно-постоянная), МП (множество притяжения), МТ (материальная точка), н. спр. (непрерывная справа), ОД (область достижимости).

Известно, что в задачах управления при ослаблении краевых условий возможно скачкообразное расширение ОД. В этих случаях естественно заменить саму исходную ОД пределом аналогичных ОД для задач с ослабленными ограничениями; этот предел именуется далее МП. Соотношения, связывающие ОД невозмущенной задачи и МП, представляют не только теоретический, но и определенный практический интерес. Совпадение МП и замыкания упомянутой ОД можно интерпретировать как своеобразную устойчивость. Однако и отсутствие устойчивости в этом смысле можно рассматривать как полезное, так как при этом реализуется (объективно) существенное расширение наших возможностей в части достижимости тех или иных желательных состояний. Заметим, что подобное обстоятельство сыграло существенную роль при доказательстве основополагающей теоремы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина об альтернативе в нелинейной дифференциальной игре; см. в этой связи [1]. Это нашло свое отражение в определении свойства стабильности, предложенного Н. Н. Красовским; в этом свойстве предполагается использование обобщенной реакции на обычное (более того, постоянное) управление игрока-противника, что легко может быть переведено на язык аппроксимативных по смыслу реакций в классе обычных управлений игрока-союзника (в связи с упомянутыми конструкциями теории дифференциальных игр отметим сейчас, наряду с [1], монографии [2–4]).

Отметим также, что в теории оптимального управления явления вышеупомянутого типа, касающиеся скачкообразного изменения экстремума, рассматривались в [5] (см. также [6, 7] в связи с задачами математического программирования).

Заметим, что для представления асимптотических эффектов, связанных с приближенным соблюдением ограничений традиционно использовались конструкции расширений (см. [1, 3–5, 8]), позволяющие построить соответствующие аналоги исходной задачи в надлежащем классе обобщенных управлений. Для случая весьма разнообразных задач о достижимости (в связи с вопросами построения МП) также использовались конструкции расширений (см., например, [9–14]). В то же время для этого случая представляет интерес рассмотрение примеров, для которых возможно непосредственное исследование МП и их сравнение с замыканием ОД. В [15] рассмотрение некоторых вопросов такого рода проведено для случая МТ на единичном

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00436, 10-01-00356).

промежутке времени. В настоящей работе, продолжающей [15], также исследуется МТ, для которой рассматриваются соотношения, связывающие МП и замыкание ОД по скорости. Отдельно рассматривается случай, когда допустимо использовать только неотрицательные программные управления, полагаемые здесь простейшими, а именно: к.-п. и н. спр. Это связано с одной характерной особенностью, присущей этому классу управлений и отмеченному в примерах [9, 10, 13, 14].

## § 1. Содержательное обсуждение задачи

Рассмотрим задачу терминального управления МТ

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = f(t) \tag{1.1}$$

на единичном промежутке времени $[0,1]$; в (1.1) $f$ — в/з функция, определенная на полуинтервале-стрелке $I \triangleq [0,1[$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению), играющая роль программного управления и предполагаемая к.-п. и н. спр. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

(это означает, что в начальный момент времени МТ покоится в нуле). Конкретный выбор программного управления стеснен импульсным ограничением

$$\int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant c, \tag{1.2}$$

где $c \in ]0, \infty[$ фиксировано в дальнейшем и определяет допустимый энергоресурс. Кроме того, будут накладываться и другие условия на выбор $f$ (краевые условия и, в одном из рассматриваемых случаев, условие неотрицательности). Сейчас отметим главное из них: $x_1(1) = a$, где $a$ — заданное число. При выполнении данного краевого условия возможны различные реализации значения $x_2(1)$; множество всех таких значений называем далее ОД по скорости, имея в виду естественную механическую интерпретацию, связанную с моделью (1.1). Если ослабить краевое условие до требования $x_1(1) \approx a$, то можно ожидать изменения упомянутой ОД, а, точнее, ее расширения. Если же последнее не происходит, то будем говорить об устойчивости.

Возникает, однако, естественный вопрос о том, что же именно следует сопоставить условию $x_1(1) \approx a$ в качестве аналога ОД (по скорости). Следуя [9–14], будем использовать в этом качестве МП, отвечающее пределам реальных значений $x_2(1)$ в условиях ограничений вида $|x_1(1) - a| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малое число. Предельными значениями следует, конечно, дополнить и саму исходную ОД невозмущенной задачи, переходя, таким образом, к рассмотрению замыкания этой ОД; совпадение последнего с МП ниже интерпретируется как устойчивость. Конкретный ответ на вопрос об устойчивости в упомянутом смысле будет зависеть от параметра $a$; в этой связи будем определять диапазон устойчивости, а также значения параметра, для которых она отсутствует.

Будем отдельно рассматривать случай, когда в (1.1) допустимо использовать только неотрицательные управления, поскольку он обладает некоторыми особенностями. Построения настоящей работы существенно дополняют положения работы [15]. При построении конкретных программных управлений будем ориентироваться на использование двухимпульсных режимов, которые, кстати, находят широкое применение в задачах космической навигации (см. [16]); некоторые полезные обстоятельства, имеющие отношение к упомянутому кругу задач, проявляются уже в рассматриваемом простейшем примере.

## § 2. Область достижимости и ее релаксации в случае неотрицательных управлений

В настоящем разделе полагаем, что программное управление $f$ в (1.1) может быть только неотрицательным. Через $\mathbb{F}$ обозначаем далее множество всех в/з неотрицательных к.-п. и н. спр. функций на $I$,

$$F \overset{\triangle}{=} \left\{ f \in \mathbb{F} \mid \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant c \right\} \tag{2.1}$$

есть (в рассматриваемом случае неотрицательных программных управлений) множество всех $f \in \mathbb{F}$, удовлетворяющих (1.2). В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Тогда

$$F_\partial[a] \overset{\triangle}{=} \left\{ f \in F \mid \int_0^1 (1-t) f(t)\,dt = a \right\} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

( $F_\partial[a]$ есть всякий раз множество всех (неотрицательных) программных управлений на $I$, обеспечивающих точное соблюдение краевого условия $x_1(1) = a$ в системе (1.1)). С учетом (2.2) полагаем (с учетом формулы Коши), что

$$G_\partial[a] \overset{\triangle}{=} \left\{ \int_0^1 f(t)\,dt : \ f \in F_\partial[a] \right\} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Тогда (при $a \in \mathbb{R}$ ) множество $G_\partial[a]$ есть ОД по скорости для МТ (1.1). Разумеется, $G_\partial[a] = \varnothing$, если $a \in \,]-\infty, 0[$ или $a \in \,]c, \infty[$. Итак, в настоящем разделе нас будет интересовать только случай $a \in [0, c]$. Отметим в этой связи, что в [15] установлено свойство

$$c \in G_\partial[a] \ \ \forall\, a \in ]0, c[. \tag{2.4}$$

**Замечание 2.1.** Рассмотрим краткую схему обоснования (2.4), фиксируя $a \in ]0, c[$. Введем

$$\kappa \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\inf\left( \left\{ \frac{a}{2}; \frac{c-a}{2} \right\} \right) \in \,]0, \infty[, \qquad \delta \overset{\triangle}{=} 2 - \frac{2(a-\kappa)}{a} = \frac{2\kappa}{a} \in \,]0, \infty[.$$

При этом $\delta \leqslant \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, а тогда

$$[0, \delta[ \cap \left[ \frac{1}{2}, 1 \right[ = \varnothing, \ \ [0, \delta[ \subset I. \tag{2.5}$$

Введем, кроме того, в рассмотрение следующее число:

$$\delta_1 \overset{\triangle}{=} \frac{2\kappa}{c-a} \in ]0, \infty[;$$

легко видеть, что $\delta_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть (см. (2.5)) $\mathbf{f} \in \mathbb{F}$ таково, что

$$\left( \mathbf{f}(t) \overset{\triangle}{=} \frac{a}{\delta} \ \ \forall\, t \in [0, \delta[ \right) \ \& \ \left( \mathbf{f}(t) \overset{\triangle}{=} 0 \ \ \forall\, t \in [\delta, 1-\delta_1[ \right) \ \& \ \left( \mathbf{f}(t) \overset{\triangle}{=} \frac{c-a}{\delta_1} \ \ \forall\, t \in [1-\delta_1, 1[ \right)$$

(учитываем, что $\delta \leqslant \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leqslant 1 - \delta_1$ ). Тогда

$$\int_0^1 \mathbf{f}(t)\,dt = \int_0^\delta \mathbf{f}(t)\,dt + \int_{1-\delta_1}^1 \mathbf{f}(t)\,dt = \frac{a}{\delta} \cdot \delta + \frac{c-a}{\delta_1} \cdot \delta_1 = a + c - a = c, \tag{2.6}$$

что означает, в частности, справедливость включения $\mathbf{f} \in F$ (см. (2.1)). С другой стороны,

$$\int_0^1 (1-t)\mathbf{f}(t)\,dt = \frac{a}{\delta}\int_0^\delta (1-t)\,dt + \frac{c-a}{\delta_1}\int_{1-\delta_1}^1 (1-t)\,dt = a(1 - \frac{\delta}{2}) + \frac{(c-a)\delta_1}{2} =$$
$$= (1 - \tfrac{\kappa}{a}) \cdot a + \tfrac{c-a}{2} \cdot \tfrac{2\kappa}{c-a} = a.$$

С учетом (2.2) получаем включение $\mathbf{f} \in F_\partial[a]$, а тогда, согласно (2.3) и (2.6), $c \in G_\partial[a]$. $\square$

Отметим следующее очевидное свойство: $\forall f \in \mathbb{F}$

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt\right) \Longrightarrow (f(t) = 0 \ \ \forall t \in I). \tag{2.7}$$

В свою очередь, из (2.2), (2.3) и (2.7) вытекает, что

$$a \notin G_\partial[a] \quad \forall a \in ]0, c]. \tag{2.8}$$

Всюду в дальнейшем следуем соглашению: для каждого множества $M$, $M \subset \mathbb{R}$, через $\overline{M}$ обозначаем замыкание $M$ в обычной $|\cdot|$-топологии вещественной прямой $\mathbb{R}$.

**Предложение 2.1.** *Если* $a \in\ ]0, c[$, *то* $a \in \overline{G_\partial[a]}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $b \in [0, \infty[$ и $\delta \in ]0, 1[$, то $\mathbf{f}_b^{(\delta)} \in \mathbb{F}$ определяем условиями

$$\left(\mathbf{f}_b^{(\delta)}(t) \triangleq \frac{b}{\delta} \ \ \forall t \in [0, \delta[\right) \ \& \ \left(\mathbf{f}_b^{(\delta)}(t) \triangleq 0 \ \ \forall t \in [\delta, 1[\right);$$

при этом, конечно, справедливо следующее равенство

$$\int_0^1 (1-t)\mathbf{f}_b^{(\delta)}(t)\,dt = b\left(1 - \frac{\delta}{2}\right). \tag{2.9}$$

Кроме того, введем в рассмотрение $\beta[\delta] \triangleq \frac{a}{1-\frac{\delta}{2}} \in ]0, \infty[ \quad \forall \delta \in ]0, 1[$. Тогда (см. (2.9))

$$\int_0^1 (1-t)\mathbf{f}_{\beta[\delta]}^{(\delta)}(t)\,dt = a \quad \forall \delta \in ]0, 1[. \tag{2.10}$$

С другой стороны, имеем следующую систему равенств

$$\int_0^1 \mathbf{f}_b^{(\delta)}(t)\,dt = \int_0^\delta \mathbf{f}_b^{(\delta)}(t)\,dt = b \quad \forall b \in [0, \infty[ \quad \forall \delta \in ]0, 1[. \tag{2.11}$$

Если $\delta \in ]0, 2(1-\frac{a}{c})] \cap ]0, 1[$, то справедливо неравенство

$$\int_0^1 \mathbf{f}_{\beta[\delta]}^{(\delta)}(t)\,dt = \beta[\delta] = \frac{2a}{2-\delta} \leqslant \frac{2a}{2-2(1-\frac{a}{c})} = c. \tag{2.12}$$

Отметим, кроме того, что (поскольку $a < c$) имеет место $2(1-\frac{a}{c}) \in ]0, \infty[$. С учетом этого имеем

$$\gamma \triangleq \inf\left(\left\{\frac{1}{2}; 2(1-\frac{a}{c})\right\}\right) \in\ ]0, \infty[.$$

Введем последовательность $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow ]0, 1[$ (здесь и ниже $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$) по правилу

$$\gamma_s \triangleq \frac{\gamma}{s} \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Полагаем теперь $\tilde{f}_s \triangleq \mathbf{f}_{\beta[\gamma_s]}^{(\gamma_s)} \quad \forall s \in \mathbb{N}$. Тогда (см. (2.12)) $(\tilde{f}_s)_{s\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow F$. Из (2.2) и (2.10) вытекает, что на самом деле $\tilde{f}_s \in F_\partial[a] \ \forall s \in \mathbb{N}$. Как следствие получаем, что

$$\left(\int_0^1 \tilde{f}_s(t)\,dt\right)_{s\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow G_\partial[a]. \tag{2.13}$$

С учетом (2.11) получаем, однако, что справедлива система равенств

$$\int_0^1 \tilde{f}_s(t)\,dt = \beta[\gamma_s] \quad \forall s \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

По способу построения имеем сходимость $(\beta[\gamma_s])_{s\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$; поэтому $a \in \overline{G_\partial[a]}$. $\square$

Итак (см. (2.4), предложение 2.1), при $a \in ]0, c[$ имеем включения $a \in \overline{G_\partial[a]}$ и $c \in \overline{G_\partial[a]}$. При этом из (2.2) и (2.3) вытекает при любом $a \in \mathbb{R}$ вложение $\overline{G_\partial[a]} \subset [0, c]$; кроме того, в этом общем случае

$$a = \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \quad \forall\, f \in F_\partial[a].$$

Поэтому (см. (2.3)) $\overline{G_\partial[a]} \subset [a, \infty[\ \forall\, a \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\overline{G_\partial[a]} \subset [a, c] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

**Предложение 2.2.** *Если* $a \in ]0, c[$, *то справедливо равенство* $\overline{G_\partial[a]} = [a, c]$.

Доказательство использует (2.15), ранее упомянутые включения $a \in \overline{G_\partial[a]}$ и $c \in \overline{G_\partial[a]}$, а также выпуклость ОД по скорости (см. (2.2), (2.3)).

В связи с условиями вида $x_1(1) \approx a$ введем в рассмотрение задачи о построении ОД по скорости в условиях $\varepsilon$-ослабления краевого условия на координату ( $\varepsilon > 0$ ). При этом следуем общему подходу [5, 9–14]. Если $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in ]0, \infty[$, то полагаем, что

$$F_\partial^{(\varepsilon)}[a] \triangleq \left\{ f \in F \mid \left| \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt - a \right| < \varepsilon \right\}, \tag{2.16}$$

получая множество всех $\varepsilon$-допустимых программных управлений; кроме того,

$$G_\partial^{(\varepsilon)}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 f(t)\,dt :\ f \in F_\partial^{(\varepsilon)}[a] \right\}. \tag{2.17}$$

Разумеется, при $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in ]0, \infty[$ справедливы очевидные вложения $F_\partial[a] \subset F_\partial^{(\varepsilon)}[a]$ и $G_\partial[a] \subset G_\partial^{(\varepsilon)}[a]$. В следующем разделе рассматриваем предел многозначной зависимости $(G_\partial^{(\varepsilon)}[a],\ \varepsilon > 0)$, где число $a$ фиксировано.

## § 3. Множества притяжения в случае неотрицательных управлений

Возвращаясь к (2.16) и (2.17), введем МП в следующем виде:

$$(\mathrm{AS})[a] \triangleq \bigcap_{\varepsilon \in\, ]0,\infty[} \overline{G_\partial^{(\varepsilon)}[a]}, \tag{3.1}$$

где $a \in \mathbb{R}$. В связи с (3.1) отметим [10, (3.3.10)] и предложение 3.3.1 монографии [10]. Ясно, что $G_\partial^{(\varepsilon)}[a] \subset [0, c]\ \ \forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon \in ]0, \infty[$; это следует из (2.1), (2.16) и (2.17). Далее, из (2.16) и (2.17) следует, что при $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in ]0, \infty[$

$$a - \varepsilon < \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \quad \forall\, f \in F_\partial^{(\varepsilon)}[a];$$

таким образом, с учетом (2.17) получаем, что $G_\partial^{(\varepsilon)}[a] \subset ]a - \varepsilon, \infty[$ и, как следствие,

$$\overline{G_\partial^{(\varepsilon)}[a]} \subset [a - \varepsilon, \infty[.$$

С учетом упомянутой ранее верхней оценки ОД имеем свойство

$$\overline{G_\partial^{(\varepsilon)}[a]} \subset [a - \varepsilon, c] \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, \varepsilon \in ]0, \infty[.$$

Учитывая (3.1) и последнее свойство, получаем, что

$$(\mathrm{AS})[a] \subset [a, c] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Учтем также вытекающие из (3.1) вложения $\overline{G_\partial[a]} \subset (\mathrm{AS})[a]\ \ \forall a \in \mathbb{R}$. Из предложения 2.2 и из (3.2) следует, что

$$(\mathrm{AS})[a] = [a, c] = \overline{G_\partial[a]} \quad \forall a \in ]0, c[. \tag{3.3}$$

Итак, в виде интервала $]0, c[$ мы имеем весьма обширный диапазон устойчивости ОД по скорости. Отметим теперь, что множество $G_\partial[0]$ одноэлементно: $G_\partial[0] = \{0\}$; $G_\partial[c] = \varnothing$. Эти равенства вытекают из (2.2), (2.3) и простейших свойств интеграла. С другой стороны (см. [14]), $(\mathrm{AS})[0] = [0, c]$. Легко проверяется также, что $(\mathrm{AS})[c] = \{c\}$ (одноэлементное множество). Поэтому

$$(\mathrm{AS})[0] \neq \overline{G_\partial[0]}, \quad (\mathrm{AS})[c] \neq \overline{G_\partial[c]}.$$

Итак, диапазон устойчивости окаймляется двумя аномалиями, из которых первая представляется более существенной.

## § 4. Область достижимости в случае знакопеременных управлений

В данном параграфе мы возвращаемся к условию (1.2) на выбор в/з к.-п. и н. спр. управляющей функции. Множество всех в/з к.-п. и н. спр. функций на промежутке $I$ обозначаем далее через $\tilde{\mathbb{F}}$. Тогда в рассматриваемой сейчас задаче

$$\mathbf{F} \triangleq \left\{ f \in \tilde{\mathbb{F}} \mid \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant c \right\} \tag{4.1}$$

есть множество возможных управлений системой (1.1). Кроме того, при $a \in \mathbb{R}$ полагаем, что

$$\mathbf{F}_\partial[a] \triangleq \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \int_0^1 (1-t) f(t)\, dt = a \right\}, \tag{4.2}$$

получая множество допустимых программных управлений в задаче с краевым условием на координату МТ. Заметим, что при $a = 0$ решение задачи об устойчивости ОД по скорости приведено в [15] (см. [15, (4.21)]). Здесь мы отказываемся от предположения $a = 0$.

Введем в рассмотрение ОД по скорости, полагая, что

$$\mathbf{G}_\partial[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 f(t)\, dt : \ f \in \mathbf{F}_\partial[a] \right\}. \tag{4.3}$$

Заметим, что $\mathbb{F} \subset \tilde{\mathbb{F}}$, $F \subset \mathbf{F}$ (см. (2.1), (4.1)); если $a \in \mathbb{R}$, то $F_\partial[a] \subset \mathbf{F}_\partial[a]$ (см. (2.2), (4.2)) и, наконец, согласно (2.3), (4.3) $G_\partial[a] \subset \mathbf{G}_\partial[a]$. Поэтому $\overline{G_\partial[a]} \subset \overline{\mathbf{G}_\partial[a]}\ \ \forall a \in \mathbb{R}$. Последнее означает, в частности, что (см. предложение 2.2)

$$[a, c] \subset \overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \quad \forall a \in ]0, c[. \tag{4.4}$$

Отметим также, что согласно (4.1) и (4.2) имеем цепочки неравенств

$$\left| \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant c \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathbf{F}_\partial[a].$$

Поэтому (см. (4.3)) $\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \subset [-c, c]\ \ \forall a \in \mathbb{R}$. Из (4.2) следует также, что при $a \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathbf{F}_\partial[a]$

$$\int_0^1 f(t)\, dt = a + \int_0^1 t f(t)\, dt,$$

$$\left| \int_0^1 t f(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^1 t |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant c;$$

поэтому справедливо следующее очевидное неравенство

$$a - c \leqslant \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Следовательно (см. вышеупомянутые простейшие оценки), справедливы вложения

$$\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \subset [a - c, c] \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

**Предложение 4.1.** *Если* $a \in \mathbb{R}$ *и* $f \in \mathbf{F}_\partial[a]$, *то* $2a - c \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем функции $f_+ : I \longrightarrow [0, \infty[$ и $f_- : I \longrightarrow [0, \infty[$ посредством следующих условий: $\forall\, t \in I$

$$\Big(f_+(t) \triangleq \sup(\{f(t); 0\})\Big) \ \& \ \Big(f_-(t) \triangleq \sup(\{-f(t); 0\})\Big). \tag{4.6}$$

Тогда $f_+ \in \mathbb{F}$ и $f_- \in \mathbb{F}$; при этом $f = f_+ - f_-$. Здесь и ниже используем поточечно определяемые линейные операции в пространстве в/з функций на $I$. Через $|f|$ обозначаем, как обычно, функцию

$$t \longmapsto |f(t)| : \ I \longrightarrow [0, \infty[,$$

для которой $|f| = f_+ + f_- \in \mathbb{F}$. Тогда имеем следующие два свойства:

$$\int_0^1 f_+(t)\,dt + \int_0^1 f_-(t)\,dt \leqslant c; \tag{4.7}$$

$$\int_0^1 (1-t) f_+(t)\,dt - \int_0^1 (1-t) f_-(t)\,dt = a \tag{4.8}$$

(см. (4.2)). С учетом неотрицательности обоих интегралов в левой части (4.8) получаем, что

$$a \leqslant a + \int_0^1 (1-t) f_-(t)\,dt = \int_0^1 (1-t) f_+(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f_+(t)\,dt. \tag{4.9}$$

Из (4.7) и (4.9) следует также очевидное неравенство

$$a + \int_0^1 f_-(t)\,dt \leqslant c.$$

В итоге мы получаем следующую оценку

$$\int_0^1 f_-(t)\,dt \leqslant c - a. \tag{4.10}$$

С другой стороны, из (4.9) вытекает, что

$$a - \int_0^1 f_-(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f_+(t)\,dt - \int_0^1 f_-(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Иными словами, справедливо следующее очевидное неравенство

$$a - \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f_-(t)\,dt,$$

откуда с учетом (4.10) вытекает требуемая оценка $a - \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant c - a$, непосредственным следствием которой является доказываемое утверждение. □

Из (4.3) и предложения 4.1 следует с очевидностью, что

$$\mathbf{G}_\partial[a] \subset [2a - c, \infty[ \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

С учетом (4.5) и (4.11) имеем теперь следующую уточненную оценку:

$$\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \subset [2a - c, c] \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

В свою очередь, из (4.4) и (4.12) вытекает, что

$$[a, c] \subset \overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \subset [2a - c, c] \quad \forall\, a \in ]0, c[. \tag{4.13}$$

Заметим, что из (4.13) следует, в частности, что

$$c \in \overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \quad \forall\, a \in ]0, c[. \tag{4.14}$$

В связи с (4.14) отметим [15, (4.13)] (имеется в виду случай $a = 0$). Сейчас совсем кратко приведем доказательство этого соотношения, отметив, что

$$\frac{c}{4} \in ]0, \infty[ \,:\, ]0, \frac{c}{4}[ \neq \varnothing.$$

Пусть $\varkappa_0 \in ]0, \frac{c}{4}[$ и $\delta_0 \stackrel{\triangle}{=} \frac{2\varkappa_0}{c}$; ясно, что $\delta_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$. Тогда множества

$$[0, \delta_0[, \ [\delta_0, 1 - \delta_0[, \ [1 - \delta_0, 1[$$

образуют разбиение $I$. Введем функцию $f_0 \in \tilde{\mathbb{F}}$, для которой

$$\Bigl(f_0(t) \stackrel{\triangle}{=} -\frac{\varkappa_0}{\delta_0} \ \ \forall\, t \in [0, \delta_0[\Bigr) \ \& \ \Bigl(f_0(t) \stackrel{\triangle}{=} 0 \ \ \forall\, t \in [\delta_0, 1 - \delta_0[\Bigr) \ \& \ \Bigl(f_0(t) \stackrel{\triangle}{=} \frac{c - \varkappa_0}{\delta_0} \ \ \forall\, t \in [1 - \delta_0, 1[\Bigr).$$

Тогда имеем, поскольку $\varkappa_0 < \frac{c}{4} < c$, что справедлива цепочка равенств

$$\int_0^1 |f_0(t)|\, dt = \frac{\varkappa_0}{\delta_0} \cdot \delta_0 + \frac{c - \varkappa_0}{\delta_0} \cdot \delta_0 = c.$$

Поэтому (см. (4.1)) $f_0 \in \mathbf{F}$. Кроме того, имеем следующую цепочку равенств:

$$\int_0^1 (1-t) f_0(t)\, dt = -\frac{\varkappa_0}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} (1-t)\, dt + \frac{c - \varkappa_0}{\delta_0} \int_{1-\delta_0}^1 (1-t)\, dt = -\frac{\varkappa_0}{\delta_0} \cdot \frac{2 - \delta_0}{2} \cdot \delta_0 + \frac{c - \varkappa_0}{\delta_0} \cdot \frac{{\delta_0}^2}{2} =$$
$$= \frac{(\delta_0 - 2)\varkappa_0 + (c - \varkappa_0)\delta_0}{2} = \frac{c\delta_0 - 2\varkappa_0}{2} = \frac{1}{2}\Bigl(c \cdot \frac{2\varkappa_0}{c} - 2\varkappa_0\Bigr) = 0.$$

Это означает, согласно (4.2), что $f_0 \in \mathbf{F}_\partial[0]$, а тогда (см. (4.3))

$$\int_0^1 f_0(t)\, dt \in \mathbf{G}_\partial[0].$$

При этом, однако, имеем следующую цепочку равенств:

$$\int_0^1 f_0(t)\, dt = -\varkappa_0 + c - \varkappa_0 = c - 2\varkappa_0.$$

Поскольку выбор $\varkappa_0$ был произвольным, установлено, что

$$\forall\, \varepsilon \in ]0, \frac{c}{4}[ \ \exists\, y \in \mathbf{G}_\partial[0] : \ |y - c| < 2\varepsilon.$$

Как следствие имеем включение $c \in \overline{\mathbf{G}_\partial[0]}$. Итак, установлено (см. (4.14)), что

$$c \in \overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \quad \forall\, a \in [0, c[. \tag{4.15}$$

С учетом (4.14), (4.15) зафиксируем до конца настоящего параграфа число

$$a \in [0, c[. \tag{4.16}$$

Покажем теперь, что (при условии (4.16)) справедливо равенство $\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} = [2a - c, c]$. Для этого рассмотрим одну специальную конструкцию знакопеременного двухимпульсного управления.

Для упрощения последующих выкладок выберем и зафиксируем сейчас произвольное число

$$\eta \in ]0, \frac{1}{2}[ \tag{4.17}$$

(позднее на выбор $\eta$ будут накладываться некоторые дополнительные условия). Из (4.17) следует, что $[0,\eta[\cap[1-\eta,1[=\varnothing$, а множества

$$[0,\eta[,\ [\eta,1-\eta[,\ [1-\eta,1[$$

образуют разбиение $I$. Если $x\in[0,\infty[$, то $u_x^{(\eta)}\in\tilde{\mathbb{F}}$ определяем условиями

$$\Bigl(u_x^{(\eta)}(t)\triangleq\tfrac{x}{\eta}\ \ \forall\,t\in[0,\eta[\Bigr)\ \&\ \Bigl(u_x^{(\eta)}(t)\triangleq 0\ \ \forall\,t\in[\eta,1-\eta[\Bigr)\ \&\ \Bigl(u_x^{(\eta)}(t)\triangleq\tfrac{x-c}{\eta}\ \ \forall\,t\in[1-\eta,1[\Bigr).\tag{4.18}$$

В связи с конкретизацией $x$ ограничимся сейчас случаем $x=y_\eta$, где

$$y_\eta\triangleq a+\frac{c\eta}{2}\in]0,\infty[,$$

после чего получаем функцию

$$v_\eta\triangleq u_{y_\eta}^{(\eta)}\in\tilde{\mathbb{F}}.\tag{4.19}$$

Отметим некоторые свойства функции $v_\eta$. Прежде всего, имеем

$$\int_0^1 v_\eta(t)\,dt=\int_0^\eta v_\eta(t)\,dt+\int_{1-\eta}^1 v_\eta(t)\,dt=y_\eta+y_\eta-c=2y_\eta-c=2a+c\eta-c.\tag{4.20}$$

С другой стороны, имеем следующую цепочку равенств:

$$\int_0^1(1-t)v_\eta(t)\,dt=\frac{y_\eta}{\eta}\int_0^\eta(1-t)\,dt+\frac{y_\eta-c}{\eta}\int_{1-\eta}^1(1-t)\,dt=\frac{y_\eta}{\eta}\cdot\frac{2-\eta}{2}\cdot\eta+\frac{y_\eta-c}{\eta}\cdot\frac{\eta^2}{2}=$$
$$=\frac{(2-\eta)y_\eta}{2}+\frac{y_\eta-c}{2}\cdot\eta=\frac{2y_\eta-c\eta}{2}=y_\eta-\frac{c\eta}{2}=a+\frac{c\eta}{2}-\frac{c\eta}{2}=a.\tag{4.21}$$

Отметим, наконец, следующее свойство (см. (4.18), (4.19)):

$$\begin{gathered}\int_0^1|v_\eta(t)|\,dt=\int_0^\eta|v_\eta(t)|\,dt+\int_{1-\eta}^1|v_\eta(t)|\,dt=\frac{y_\eta}{\eta}\cdot\eta+\frac{|y_\eta-c|}{\eta}\cdot\eta=y_\eta+|c-y_\eta|=\\=a+\tfrac{c\eta}{2}+\bigl|c-\bigl(a+\tfrac{c\eta}{2}\bigr)\bigr|.\end{gathered}\tag{4.22}$$

Из (4.19) и (4.22) следует очевидная теперь импликация

$$\Bigl(a+\frac{c\eta}{2}\leqslant c\Bigr)\Longrightarrow\Bigl(\int_0^1|v_\eta(t)|\,dt=c\Bigr).\tag{4.23}$$

С учетом (4.21) и (4.23) получаем (см. (4.1), (4.2), (4.19)), что

$$\Bigl(a+\frac{c\eta}{2}\leqslant c\Bigr)\Longrightarrow\bigl(v_\eta\in\mathbf{F}_\partial[a]\bigr).\tag{4.24}$$

В свою очередь, из (4.3), (4.20) и (4.24) следует, что

$$\Bigl(a+\frac{c\eta}{2}\leqslant c\Bigr)\Longrightarrow\bigl(2a-c+c\eta\in\mathbf{G}_\partial[a]\bigr).\tag{4.25}$$

**Предложение 4.2.** *Справедливо включение* $2a-c\in\overline{\mathbf{G}_\partial[a]}$.

Доказательство. С учетом (4.16) получаем, в частности, что

$$\delta_1\triangleq\frac{2(c-a)}{c}\in]0,\infty[.\tag{4.26}$$

Пусть $\zeta\in]0,\infty[$. Тогда по выбору $c$ имеем значение

$$\delta_2\triangleq\frac{\zeta}{2c}\in]0,\infty[.$$

Полагаем теперь, что $\tilde{\eta} \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\delta_1; \delta_2\})$, тогда $\tilde{\eta} \in ]0, \infty[$. Кроме того, полагаем в пределах данного доказательства, что

$$\eta \stackrel{\triangle}{=} \inf\left(\left\{\tilde{\eta}; \frac{1}{3}\right\}\right). \tag{4.27}$$

Тогда справедливо (4.17), а потому истинна импликация (4.25) (напомним, что при обосновании (4.25) выбор $\eta$ (4.17) был произвольным). При этом в случае (4.27)

$$a + \frac{c\eta}{2} \leqslant a + \frac{c\tilde{\eta}}{2} \leqslant a + \frac{c\delta_1}{2} = a + \frac{c}{2} \cdot \frac{2(c-a)}{c} = a + (c-a) = c,$$

а тогда из (4.25) вытекает, что справедливо свойство

$$2a - c + c\eta \in \mathbf{G}_\partial[a], \tag{4.28}$$

где $|c\eta| = c\eta \leqslant c\tilde{\eta} \leqslant c\delta_2 = \frac{\zeta}{2} < \zeta$. Но тогда (см. (4.28))

$$\exists\, y \in \mathbf{G}_\partial[a]: \ |y - (2a-c)| < \zeta.$$

Поскольку выбор $\zeta$ был произвольным, установлено, что

$$\forall\, \varepsilon \in ]0, \infty[\ \exists\, y \in \mathbf{G}_\partial[a]: \ |y - (2a-c)| < \varepsilon.$$

Предложение доказано. □

**Предложение 4.3.** *Справедливо равенство* $\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} = [2a-c, c]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.15) и предложения 4.2 имеем, что

$$(2a - c \in \overline{\mathbf{G}_\partial[a]})\ \&\ (c \in \overline{\mathbf{G}_\partial[a]});$$

Тогда $[2a-c, c] \subset \overline{\mathbf{G}_\partial[a]}$ в силу выпуклости множества $\mathbf{G}_\partial[a]$ (см. (4.1)–(4.3)) и, как следствие, множества $\overline{\mathbf{G}_\partial[a]}$. С учетом (4.12) получаем теперь требуемое равенство. □

Напомним, что предложение 4.3 установлено при условии (4.16). Напомним также, что случай $a = 0$ исследовался в [15].

## § 5. Свойство устойчивости в случае знакопеременных управлений

С учетом предложения 4.3 имеем следующее свойство:

$$\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} = [2a-c, c] \quad \forall\, a \in [0, c[. \tag{5.1}$$

Ограничимся сейчас (5.1) и рассмотрим релаксации задачи о построении ОД по скорости. Пусть при $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in ]0, \infty[$

$$\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \stackrel{\triangle}{=} \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \left| \int_0^1 (1-t) f(t)\, dt - a \right| < \varepsilon \right\} \tag{5.2}$$

(множество всех $\varepsilon$-допустимых программных управлений) и

$$\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \stackrel{\triangle}{=} \left\{ \int_0^1 f(t)\, dt : \ f \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \right\} \tag{5.3}$$

(ОД по скорости при $\varepsilon$-ослаблении краевого условия). По аналогии с (3.1) полагаем, что

$$(\mathbf{AS})[a] \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\varepsilon \in ]0, \infty[} \overline{\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[a]} \tag{5.4}$$

(в связи с (5.4) см. [10, (3.3.10)] и предложение 3.3.1 монографии [10]).

Согласно (4.2) и (5.2) $\mathbf{F}_\partial[a] \subset \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, \varepsilon \in ]0,\infty[$. Как следствие имеем вложения $\mathbf{G}_\partial[a] \subset \mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[a]$ при $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in ]0,\infty[$ (см. (4.3), (5.3)). Поэтому (см. (5.4))

$$\overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \subset (\mathbf{AS})[a] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Из (5.1) и (5.5) вытекает, что справедливо следующее свойство:

$$[2a-c, c] \subset (\mathbf{AS})[a] \quad \forall\, a \in [0, c[. \tag{5.6}$$

**Предложение 5.1.** *Если* $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in ]0,\infty[$ *и* $f \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a]$, *то*

$$(2a-c) - 2\varepsilon < \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Доказательство. Фиксируем $a, \varepsilon$ и $f$ в соответствии с условиями предложения. Дальнейшее рассуждение подобно обоснованию предложения 4.1 и мы ограничимся здесь краткой схемой, полагая, что $f_+ \in \mathbb{F}$ и $f_- \in \mathbb{F}$ определены посредством (4.6);

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-$$

(см. пояснения в доказательстве предложения 4.1). Заметим, что (см. (5.2)) по выбору $f$

$$a - \varepsilon < \int_0^1 (1-t) f_+(t)\,dt - \int_0^1 (1-t) f_-(t)\,dt. \tag{5.8}$$

Как следствие получаем с учетом неотрицательности интегралов в правой части (5.8) цепочку неравенств

$$a - \varepsilon < \int_0^1 (1-t) f_+(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f_+(t)\,dt. \tag{5.9}$$

Поэтому справедлива следующая оценка:

$$a - \varepsilon + \int_0^1 f_-(t)\,dt < \int_0^1 f_+(t)\,dt + \int_0^1 f_-(t)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant c.$$

В итоге реализуется очевидное неравенство

$$\int_0^1 f_-(t)\,dt < c - a + \varepsilon. \tag{5.10}$$

С другой стороны, согласно (5.9) имеем неравенство

$$(a-\varepsilon) - \int_0^1 f_-(t)\,dt < \int_0^1 f(t)\,dt,$$

откуда с учетом (5.10) извлекается неравенство (5.7). □

Из предложения 4.1 вытекает с учетом (5.3) система вложений

$$\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \subset ](2a-c) - 2\varepsilon, \infty[ \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, \varepsilon \in ]0,\infty[. \tag{5.11}$$

В свою очередь, из (5.4) и (5.11) извлекаются следующие вложения:

$$(\mathbf{AS})[a] \subset [2a-c, \infty[ \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Заметим, что из (4.1) и (5.2) вытекает, что $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, \varepsilon \in ]0,\infty[\; \forall\, f \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a]$

$$\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant c.$$

С учетом (5.3) имеем, что при $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \,]0,\infty[$ непременно $\overline{\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[a]} \subset \,]-\infty, c]$. Тогда, согласно (5.4),

$$(\mathbf{AS})[a] \subset \,]-\infty, c] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

С учетом (5.12) мы получаем очевидную систему вложений

$$(\mathbf{AS})[a] \subset \; [2a-c, c] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Поэтому из (5.6) и (5.14) вытекает следующая система равенств:

$$(\mathbf{AS})[a] = [2a-c, c] \quad \forall\, a \in [0, c[. \tag{5.15}$$

Как следствие имеем из (5.1) и (5.15), что

$$(\mathbf{AS})[a] = \overline{\mathbf{G}_\partial[a]} \quad \forall\, a \in [0, c[. \tag{5.16}$$

В (5.16) имеем основное свойство, характеризующее полуинтервал $[0, c[$ как диапазон устойчивости (мы ограничились неотрицательными значениями параметра $a$, учитывая весьма очевидные соображения, связанные с симметрией). Заметим, что согласно (4.1), (4.2) при $f \in \mathbf{F}$

$$\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 (1-t)|f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant c, \tag{5.17}$$

откуда имеем, что $\displaystyle\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt \leqslant c$; более того, последнее неравенство является строгим (при условии

$$\int_0^1 (1-t)|f(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

обязательно $f(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$; в этом случае последнее неравенство в (5.17) строгое). Получили согласно (4.2), что $\mathbf{F}_\partial[c] = \varnothing$, а тогда

$$\mathbf{G}_\partial[c] = \overline{\mathbf{G}_\partial[c]} = \varnothing. \tag{5.18}$$

Заметим вместе с тем, что из (2.1), (2.2) и (5.2) следуют вложения

$$F_\partial^{(\varepsilon)}[c] \subset \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[c] \quad \forall\, \varepsilon \in ]0, \infty[. \tag{5.19}$$

Как следствие получаем систему вложений (см. (2.17), (5.3), (5.19))

$$G_\partial^{(\varepsilon)}[c] \subset \mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[c] \quad \forall\, \varepsilon \in ]0, \infty[. \tag{5.20}$$

Разумеется, вложения (5.20) наследуются замыканиями, а тогда из (3.1) и (5.4) вытекает, что

$$(\mathrm{AS})[c] \subset (\mathbf{AS})[c]. \tag{5.21}$$

Поэтому (см. заключительные замечания в разделе 3) непременно

$$\{c\} \subset (\mathbf{AS})[c], \tag{5.22}$$

а потому $c \in (\mathbf{AS})[c]$. С другой стороны, из предложения 5.1 следует, что

$$c - 2\varepsilon < \int_0^1 f(t)\,dt \qquad \forall\, \varepsilon \in \,]0, \infty[ \quad \forall\, f \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}[c]$$

(мы используем предложение 5.1 в случае $a = c$). Это означает согласно (5.3), что

$$\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[c] \subset \,]c - 2\varepsilon, \infty[ \quad \forall\, \varepsilon \in ]0, \infty[.$$

Как следствие $\overline{\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}[c]} \subset \ [c-2\varepsilon,\infty[$ при $\varepsilon \in ]0,\infty[$. С учетом (5.4) имеем теперь очевидное вложение

$$(\mathbf{AS})[c] \subset \bigcap_{\varepsilon \in ]0,\infty[} [c-2\varepsilon,\infty[,$$

из которого вытекает следующая оценка: $(\mathbf{AS})[c] \subset \ [c,\infty[$. Учитывая (5.13), получаем также, что $(\mathbf{AS})[c] \subset \ ]-\infty,c]$ и, следовательно,

$$(\mathbf{AS})[c] \subset \ ]-\infty,c] \cap [c,\infty[ = \{c\}.$$

С учетом (5.22) получаем равенство $(\mathbf{AS})[c] = \{c\}$, откуда, согласно (5.18), следует, что $(\mathbf{AS})[c] \neq \overline{\mathbf{G}_\partial[c]}$; мы получили одну «несущественную» аномалию с точки зрения устойчивости задачи построения ОД по скорости (пустое замыкание ОД переходит в синглетон $\{c\}$ ).

## § 6. Добавление

Из построений предыдущих разделов следует, что в рассматриваемой задаче о построении ОД по скорости при краевом условии на координату типичным является свойство устойчивости с точностью до замыкания (в этой связи отметим предложение 3.6.1 монографии [11], с учетом которого полученные ранее представления свойства устойчивости в терминах совпадения МП и замыкания ОД можно легко перевести на язык реализации МП с точностью до любой наперед выбранной $\varepsilon$-окрестности, $\varepsilon \in ]0,\infty[$ ). Есть отдельные аномалии, наиболее существенная из которых возникает в случае неотрицательных управлений при $a = 0$ (в «знакопеременном» случае данная аномалия отсутствует). В то же время возможна, в других примерах, и противоположная ситуация.

Отметим сейчас один совсем простой случай, касающийся фактически использования ограничений на реализацию скоростной координаты МТ. А именно, рассмотрим вопрос о возможной реализации $x_2(1)$ в условиях, когда $x_2(t) = a$ при $0 < t < 1$; здесь $a$ — заданное число. В этой связи полагаем, что при $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_\partial[a] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ f \in \mathbf{F} \mid \int_0^t f(\tau)\,d\tau = a \quad \forall\, t \in ]0,1[ \Big\}, \tag{6.1}$$

$$\mathcal{G}_\partial[a] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \int_0^1 f(t)\,dt : \ f \in \mathcal{F}_\partial[a] \Big\}. \tag{6.2}$$

Из (6.1) легко следует, что при $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ справедливо равенство $\mathcal{F}_\partial[a] = \varnothing$ (это следует из свойства непрерывности отображения

$$t \longmapsto \int_0^t f(\tau)\,d\tau : \ I \longrightarrow \mathbb{R},$$

принимающего нулевое значение в точке $0$; здесь $f \in \tilde{\mathbb{F}}$ ) и, как следствие, $\mathcal{G}_\partial[a] = \varnothing$. Если $a = 0$, то $\mathcal{F}_\partial[a]$ содержит единственную функцию, тождественно равную нулю. Поэтому $\mathcal{G}_\partial[0] = \{0\}$. Введем, кроме того, при $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in ]0,\frac{1}{2}[$ множества

$$\mathcal{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ f \in \mathbf{F} \mid \int_0^t f(\tau)\,d\tau = a \quad \forall\, t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \Big\}, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{G}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \int_0^1 f(t)\,dt : \ f \in \mathcal{F}_\partial^{(\varepsilon)}[a] \Big\}. \tag{6.4}$$

Легко видеть, что при $a \in [0,c]$ и $\varepsilon \in ]0,\frac{1}{2}[$ последнее множество содержит отрезок $[2a-c,c]$. В самом деле, пусть $a$ и $\varepsilon$ удовлетворяют вышеупомянутым условиям; тогда для реализации крайних значений $2a-c$ и $c$ можно использовать приводимые ниже двухимпульсные режимы. В первом случае конструируемое программное управление $f^{(1)}_{a,\varepsilon} \in \mathbf{F}$ имеет следующий вид:

$$\Big(f^{(1)}_{a,\varepsilon}(t) \triangleq \frac{a}{\varepsilon} \quad \forall\, t \in [0,\varepsilon[\Big) \;\&\; \Big(f^{(1)}_{a,\varepsilon}(t) \triangleq 0 \quad \forall\, t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon[\Big) \;\&\; \Big(f^{(1)}_{a,\varepsilon}(t) \triangleq \frac{a-c}{\varepsilon} \quad \forall\, t \in [1-\varepsilon, 1[\Big). \tag{6.5}$$

При этом, как легко видеть, справедливы свойства:

$$\Big(\int_0^{\varepsilon} f^{(1)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = a\Big) \;\&\; \Big(\int_0^{t} f^{(1)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = \int_0^{\varepsilon} f^{(1)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\Big) \;\&$$
$$\&\; \Big(\int_0^{1} f^{(1)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = a + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{a-c}{\varepsilon}\,d\tau = 2a-c\Big) \;\&$$
$$\&\; \Big(\int_0^{1} |f(\tau)|\,d\tau = \int_0^{\varepsilon} \frac{a}{\varepsilon}\,d\tau + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{c-a}{\varepsilon}\,d\tau = a + c - a = c\Big);$$

тогда, согласно (6.3), $f^{(1)}_{a,\varepsilon} \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a]$ и, как следствие, $2a-c \in \mathcal{G}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a]$. Во втором случае (при

$$a \in [0,c], \quad \varepsilon \in\, ]0, \frac{1}{2}[$$

мы обсуждаем вопрос о реализации точки $c$ с помощью некоторого $\varepsilon$-допустимого управления) определяем $f^{(2)}_{a,\varepsilon} \in \mathbf{F}$ посредством условий

$$\Big(f^{(2)}_{a,\varepsilon}(t) \triangleq \frac{a}{\varepsilon} \quad \forall\, t \in [0,\varepsilon[\Big) \;\&\; \Big(f^{(2)}_{a,\varepsilon}(t) \triangleq 0 \quad \forall\, t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon[\Big) \;\&\; \Big(f^{(2)}_{a,\varepsilon}(t) \triangleq \frac{c-a}{\varepsilon} \quad \forall\, t \in [1-\varepsilon, 1[\Big).$$

Тогда имеем следующие очевидные свойства:

$$\Big(\int_0^{\varepsilon} f^{(2)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = a\Big) \;\&\; \Big(\int_0^{t} f^{(2)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = \int_0^{\varepsilon} f^{(2)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau \quad \forall\, t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\Big) \;\&\; \Big(\int_0^{1} f^{(2)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau =$$
$$= a + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{c-a}{\varepsilon}\,d\tau = c\Big) \;\&\; \Big(\int_0^{1} |f^{(2)}_{a,\varepsilon}(\tau)|\,d\tau = \int_0^{1} f^{(2)}_{a,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = \int_0^{\varepsilon} \frac{a}{\varepsilon}\,d\tau + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{c-a}{\varepsilon}\,d\tau = c\Big);$$

при этом $f^{(2)}_{a,\varepsilon} \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a]$ и, следовательно, $c \in \mathcal{G}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a]$. Поскольку множества (6.3), (6.4) всякий раз являются выпуклыми, то

$$[2a-c, c] \subset \mathcal{G}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a] \qquad \forall\, a \in [0,c] \quad \forall\, \varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[. \tag{6.6}$$

По аналогии с (3.1) и (5.4) введем теперь МП, полагая

$$(\mathcal{AS})[a] \triangleq \bigcap_{\varepsilon \in ]0,\frac{1}{2}[} \overline{\mathcal{G}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a]} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

С учетом (6.6) получаем следующую систему вложений $[2a-c, c] \subset (\mathcal{AS})[a] \quad \forall\, a \in [0,c]$. Как следствие $\overline{\mathcal{G}_{\partial}[a]} \neq (\mathcal{AS})[a]$ при всяком выборе $a \in [0,c]$, то есть ситуация в рассматриваемом примере кардинально отличается от случая, когда ограничения порождались краевыми условиями (см. предыдущие разделы). Заметим, кстати, что согласно (6.1) и (6.3)

$$\mathcal{F}_{\partial}[a] = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,\frac{1}{2}[} \mathcal{F}^{(\varepsilon)}_{\partial}[a].$$

Последнее равенство говорит о том, что множества (6.3) действительно можно связывать с релаксацией исходного условия, характеризуемого соотношением (6.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
4. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
5. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
6. Даффин Р. Дж. Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностр. литература, 1959. С. 263–267.
7. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
8. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 229 с.
9. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.
10. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
11. Chentsov A. G. and Morina S. I. Extensions and Relaxations. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 c.
12. Chentsov A. G. Finitely Additive Measures and Extensions of Abstract Control Problems // Journal of Mathematical Sciences, 2006. Vol. 133, Number 2. P. 1045–1206 (Contemporary Mathematics and its Applications, vol. 17, Optimal Control, 2006).
13. Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Изв. вузов. Математика. 2002. № 2. С. 58–80.
14. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Изв. РАН. Серия математическая. 1999. Т. 63. С. 185–223.
15. Кожан М. М., Ченцов А. Г. К вопросу о корректности некоторых задач управления материальной точкой // Проблемы управления и информатики. 2007. № 1. С. 5–15.
16. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 537 с.


Поступила в редакцию 15.10.10

***A. G. Chentsov***

**About correctness of some problems of control by material point**

The questions connected with attainability with respect to the velocity coordinate for mass point under boundary condition on the state in the last time moment are considered. The property of type of a stability (to within the closure) under the weakening of boundary condition is investigated.For this the comparison of the attainability domain with respect to velocity and the natural attraction set is realized. The coincidence of the last set and the closure of the above-mentioned attainability domain is typical.

*Keywords*: attraction set, attainability domain, programmed control.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, отдел управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, corresponding member of RAS, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.