УДК 517.518.117, 517.518.124

© *Д. Л. Федоров*

О КРИВОЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

Вводится понятие криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса, доказываются некоторые его свойства. Показано, что такой интеграл определяет знакопеременную меру на плоскости, указаны условия, при которых эта мера будет счётно-аддитивной.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, интеграл Римана–Стилтьеса, счетно-аддитивная мера.

§ 1. Определение и простейшие свойства

Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ определены в области $D\subset\mathbb{R}^2$, Γ — ориентируемая спрямляемая кривая, целиком лежащая в D. Считаем, что концы кривой, точки A и B, принадлежат ей, так что Γ представляет собой замкнутое множество на плоскости. Назовём разбиением такой кривой множество точек $T=\{P_i\}$, $i=0,1,\ldots,n$ такое, что $P_0=A$, $P_n=B$, а точка P_i лежит на кривой между P_{i-1} и P_{i+1} при $0<i<n$. Таким образом, дуга $P_{i-1}P_i$ является частью кривой Γ и не содержит других точек разбиения T. Выберем на каждой частичной дуге $P_{i-1}P_i$ произвольным образом точку M_i и составим интегральную сумму

$$\sigma=\sigma(f,g,T,\{M_i\})=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\big(g(P_i)-g(P_{i-1})\big).$$

Обозначим длину дуги $P_{i-1}P_i$ через $\ell(P_{i-1}P_i)$. Диаметром разбиения T назовём величину

$$d=d(T)=\max_i \ell(P_{i-1}P_i).$$

Определение 1. Криволинейным интегралом Римана–Стилтьеса по кривой Γ функции f по g называется выражение

$$\int_\Gamma f\,dg=\lim_{d\to 0}\sigma(f,g,T,\{M_i\}),$$

при условии, что этот предел не зависит ни от выбора разбиений T, ни от выбора точек $\{M_i\}$.

В частном случае, когда Γ состоит из одной точки A, полагаем $\int_A f\,dg=0$. Заметим, что если Γ — отрезок $[a,\ b]$ оси OX, то криволинейный интеграл Римана–Стилтьеса совпадает с классическим интегралом Римана–Стилтьеса (RS) $\int_a^b f\,dg$, хорошо изученным в анализе.

Исследование введённого интеграла начнём с рассмотрения простейших свойств, которые следуют непосредственно из определения.

1. Обозначим через Γ^- кривую, полученную из Γ сменой ориентации. Если интеграл $\int_\Gamma f\,dg$ существует, то

$$\int_{\Gamma^-} f\,dg=-\int_\Gamma f\,dg.$$

2. Если интеграл $\int_\Gamma f\,dg$ существует, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то
$$\int_\Gamma (\lambda f)\,d(\mu g) = \lambda\mu \int_\Gamma f\,dg.$$

3. Если существуют интегралы $\int_\Gamma f_1\,dg$ и $\int_\Gamma f_2\,dg$, то
$$\int_\Gamma (f_1+f_2)\,dg = \int_\Gamma f_1\,dg + \int_\Gamma f_2\,dg.$$

4. Если существуют интегралы $\int_\Gamma f\,dg_1$ и $\int_\Gamma f\,dg_2$, то
$$\int_\Gamma f\,d(g_1+g_2) = \int_\Gamma f\,dg_1 + \int_\Gamma f\,dg_2.$$

5. Если $f(x,y) \equiv C = \mathrm{const}$, то интеграл $\int_\Gamma f\,dg$ существует для любой функции $g(x,y)$, любой спрямляемой кривой Γ и
$$\int_\Gamma f\,dg = C\bigl(g(B)-g(A)\bigr).$$
В частности, если $A=B$, то есть кривая замкнутая, то $\int_\Gamma C\,dg = 0$.

6. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём начало Γ_2 совпадает с концом кривой Γ_1. При этом существуют интегралы $\int_{\Gamma_1} f\,dg$ и $\int_{\Gamma_2} f\,dg$. Тогда
$$\int_\Gamma f\,dg = \int_{\Gamma_1} f\,dg + \int_{\Gamma_2} f\,dg.$$
Известно, что для интеграла Римана–Стилтьеса по отрезку обратное утверждение неверно (см., например, [3]). Следовательно, и для криволинейного интеграла обратное утверждение не имеет места.

Теорема 1. *Пусть кривая Γ допускает взаимно однозначное и взаимно непрерывное представление: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[a,\ b]$, а ориентация Γ соответствует возрастанию параметра t. Обозначим $F(t) = f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$, $G(t) = g\bigl(x(t),y(t)\bigr)$. Тогда интеграл $\int_\Gamma f\,dg$ существует тогда и только тогда, когда существует интеграл $(\mathrm{RS})\int_a^b F(t)\,dG(t)$ и в этом случае интегралы равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любому разбиению $T=\{P_i\}$ кривой Γ соответствует некоторое разбиение $\tau=\{t_i\}$ отрезка $[a,\ b]$ такое, что $P_i = \bigl(x(t_i),y(t_i)\bigr)$, $i=0,1,\ldots,n$. Заметим, что такое соответствие между разбиениями взаимно однозначно и уменьшение диаметра разбиения T влечёт уменьшение диаметра разбиения τ. Также набору точек $\{M_i\}$, где $M_i \in P_{i-1}P_i$, $i=1,\ldots,n$ соответствует набор точек $\{\xi_i\}$ такой, что $M_i = \bigl(x(\xi_i),y(\xi_i)\bigr)$, $t_{i-1}\leqslant \xi_i \leqslant t_i$, $i=1,\ldots,n$. Отсюда получаем равенство между интегральными суммами
$$\sum_{i=1}^n f(M_i)\bigl(g(P_i)-g(P_{i-1})\bigr) = \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\bigl(G(t_i)-G(t_{i-1})\bigr).$$
Поэтому при измельчении разбиения T (или τ) и существовании предела одной из интегральных сумм следует сходимость и другой интегральной суммы, а также равенство обоих пределов.
$\square$

Определение 2. Вариацией функции $g(x,y)$ на кривой Γ назовём выражение

$$\bigvee_{\Gamma}(g) = \sup_{T}\sum_{i=1}^{n}\bigl|g(P_i)-g(P_{i-1})\bigr|, \tag{1.1}$$

где точная верхняя грань берётся по всем разбиениям $T=\{P_i\}$ кривой Γ. Если величина (1.1) конечна, то функцию g будем называть функцией ограниченной вариации на кривой Γ.

Лемма 1. *Если функция $g(x,y)$ имеет ограниченную вариацию на кривой Γ, заданной равенствами $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[a,\ b]$, то функция $G(t)=g\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,\ b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем снова взаимно-однозначное соответствие между разбиениями T кривой Γ и разбиениями τ отрезка $[a,\ b]$, о которой шла речь при доказательстве теоремы 1. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\bigl|G(t_i)-G(t_{i-1})\bigr| = \sum_{i=1}^{n}\bigl|g(P_i)-g(P_{i-1})\bigr|,$$

откуда находим $\bigvee_{a}^{b}(G)=\bigvee_{\Gamma}(g)$. □

Следствие 1. *Интеграл $\int_{\Gamma} f\,dg$ существует, если функция $f(x,y)$ непрерывна на Γ, а $g(x,y)$ имеет ограниченную вариацию на Γ.*

Действительно, в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на $[a,\ b]$ будет непрерывна и функция $F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$. Тогда по известному из анализа признаку существует интеграл (RS) $\int_a^b F\,dG$, а по теореме 1 вместе с ним и интеграл $\int_{\Gamma} f\,dg$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной области D вплоть до её границы, а функция $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема в области D, кривая Γ целиком лежит в D. Тогда интеграл $\int_{\Gamma} f\,dg$ сводится к классическому криволинейному интегралу второго рода:*

$$\int_{\Gamma} f\,dg = \int_{\Gamma} f g'_x\,dx + f g'_y\,dy. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки $P_i=(x_i,y_i)$, $i=0,1,\dots,n$ составляют разбиение Γ. Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\bigl(g(P_i)-g(P_{i-1})\bigr), \tag{1.3}$$

где $\{M_i\}$ — произвольный набор точек, лежащих на дугах $P_{i-1}P_i$. По формуле Тейлора для функции двух переменных имеем

$$g(P_i)-g(P_{i-1}) = g'_x(N_i)\Delta x_i + g'_y(N_i)\Delta y_i, \tag{1.4}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, а точка N_i лежит на отрезке прямой $P_{i-1}P_i$. По условиям теоремы криволинейный интеграл в правой части (1.2) существует. Составим для него интегральную сумму

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\bigl(g'_x(M_i)\Delta x_i + g'_y(M_i)\Delta y_i\bigr).$$

Подставим равенство (1.4) в (1.3) и оценим разность

$$|\sigma_1-\sigma|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\big(g'_x(M_i)-g'_x(N_i)\big)\Delta x_i+f(M_i)\big(g'_y(M_i)-g'_y(N_i)\big)\Delta y_i\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta x_i\right|\cdot\big|g'_x(M_i)-g'_x(N_i)\big|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta y_i\right|\cdot\big|g'_y(M_i)-g'_y(N_i)\big| \quad (1.5)$$

Так как $f(x,y)$ непрерывна, то

$$\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta x_i=\int_\Gamma f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta y_i=\int_\Gamma f(x,y)\,dy.$$

Поэтому для некоторого $C>0$, не зависящего ни от разбиения T, ни от точек $\{M_i\}$, имеют место оценки

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta x_i\right|\leqslant C \quad \text{и} \quad \left|\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta y_i\right|\leqslant C.$$

Функции g'_x и g'_y равномерно непрерывны в $\overline{D}$, поэтому для произвольного $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для любых двух точек M и N, отстоящих друг от друга на расстоянии меньше δ, будут выполняться неравенства

$$\big|g'_x(M)-g'_x(N)\big|<\frac{\varepsilon}{2C}, \quad \big|g'_y(M)-g'_y(N)\big|<\frac{\varepsilon}{2C}. \quad (1.6)$$

Пусть $d(T)<\delta$, тогда дуга $P_{i-1}P_i$ лежит в δ-окрестности точки M_i. Точка N_i также лежит в этой окрестности вместе со всем отрезком прямой $P_{i-1}P_i$. Следовательно, для точек M_i и N_i выполнены неравенства (1.6) и в силу (1.5) имеем

$$|\sigma_1-\sigma|<\varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{d\to0}\sigma=\lim_{d\to0}\sigma_1=\int_\Gamma fg'_x\,dx+fg'_y\,dy.$$

□

Следствие 2. *Пусть* Γ *— замкнутая кривая, ограничивающая область* $\Omega\subset D$, *функция* f *непрерывно дифференцируема в* D *и существуют смешанные производные* g''_{xy} *и* g''_{yx}, *которые также непрерывны в* D. *Тогда*

$$\int_\Gamma f\,dg=\iint_\Omega\begin{vmatrix}f'_x & f'_y\\ g'_x & g'_y\end{vmatrix}\,dx\,dy. \quad (1.7)$$

Действительно, используя формулу Грина для криволинейного интеграла в правой части (1.2), получим

$$\int_\Gamma f\,dg=\iint_\Omega\big((fg'_y)'_x-(fg_x)'_y\big)\,dx\,dy=\iint_\Omega\big(f'_xg'_y+fg''_{yx}-f'_yg'_x-fg''_{xy}\big)\,dx\,dy,$$

откуда следует (1.7).

Теорема 3. *Пусть* AB *— спрямляемая кривая и существует интеграл* $\int_{AB}f\,dg$. *Тогда интеграл* $\int_{AB}g\,df$ *также существует и*

$$\int_{AB}g\,df=f(B)g(B)-f(A)g(A)-\int_{AB}f\,dg. \quad (1.8)$$

Доказательство. Пусть $T = \{P_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ — произвольное разбиение AB, $M_i \in P_{i-1}P_i$, $i = 1, \ldots, n$ — набор точек на AB. Составим интегральную сумму для интеграла в левой части (1.8) и преобразуем её:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} g(M_i)\big(f(P_i) - f(P_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} g(M_i)f(P_i) - \sum_{i=1}^{n} g(M_i)f(P_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g(M_i)f(P_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(M_{i+1})f(P_i) =$$
$$= g(M_n)f(P_n) - g(M_1)f(P_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i)\big(g(M_i) - g(M_{i+1})\big). \quad (1.9)$$

Примем во внимание, что $P_0 = A$, $P_n = B$ и к правой части (1.9) добавим и вычтем выражение $g(B)f(B) - g(A)f(A)$:

$$\sigma = g(B)f(B) - g(A)f(A) + f(B)\big(g(M_n) - g(B)\big) -$$
$$- f(A)\big(g(M_1) - g(A)\big) - \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i)\big(g(M_{i+1}) - g(M_i)\big) =$$
$$= f(B)g(B) - g(A)f(A) - \sum_{i=0}^{n} f(P_i)\big(g(M_{i+1}) - g(M_i)\big). \quad (1.10)$$

Здесь добавлены точки $M_{n+1} = B$, $M_0 = A$. Заметим теперь, что $P_i \in M_iM_{i+1}$, а сумма в правой части (1.10) стремится к интегралу $\int_{AB} f\,dg$ при измельчении разбиения. Отсюда получаем равенство (1.8). □

Следствие 3. *Если $\Gamma = AB$ — замкнутая кривая, то $A = B$ и*

$$\int_{AB} f\,dg = -\int_{AB} g\,df.$$

В частности, если $f = g$, то $\int_{\Gamma} f\,df = 0$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на Γ, а $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на Γ. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\int_{\Gamma} f\,dg\right| \leqslant \max_{\Gamma}|f(x, y)| \bigvee_{\Gamma}(g). \quad (1.11)$$

Доказательство. Оценим интегральную сумму

$$|\sigma| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\big(g(P_i) - g(P_{i-1})\big)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(M_i)|\big|g(P_i) - g(P_{i-1})\big| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{i}|f(M_i)| \sum_{i=1}^{n}\big|g(P_i) - g(P_{i-1})\big| \leqslant \max_{\Gamma}|f(x, y)| \bigvee_{\Gamma}(g).$$

При измельчении разбиения неравенство сохранится и в пределе получится неравенство (1.11). □

Следствие 4. *Пусть функции $f_n(x, y)$ непрерывны на кривой Γ и последовательность $f_n(x, y)$ сходится на Γ равномерно к функции $f(x, y)$, функция $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на Γ. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} f_n\,dg = \int_{\Gamma} f\,dg.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V = \bigvee_{\Gamma}(g)$. При достаточно больших n справедлива оценка $\max_{\Gamma}\bigl|f_n(x,y) - f(x,y)\bigr| < \frac{\varepsilon}{V}$ для произвольного заданного наперёд $\varepsilon > 0$. В силу (1.11) тогда

$$\left|\int_{\Gamma} f_n\,dg - \int_{\Gamma} f\,dg\right| < \varepsilon,$$

что и означает требуемое. □

§ 2. Криволинейный интеграл как знакопеременная мера

Покажем теперь, что с помощью криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса можно определить знакопеременную меру на плоскости. Будем предполагать, что функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на всей плоскости, $g(x,y)$ имеет ограниченную вариацию на любом ограниченном отрезке, параллельном оси OX или OY .

Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо прямоугольников вида $\Pi = [a,\ b) \times [c,\ d)$. Определим на $\mathfrak{S}$ функцию

$$m(\Pi) = m(f,g;\Pi) = \int_{\partial\Pi^+} f\,dg, \tag{2.1}$$

где $\partial\Pi^+$ — граница прямоугольника Π, ориентированная в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. Докажем аддитивность функции m . Если $a < a_1 < b$, то

$$\Pi = [a,\ b) \times [c,\ d) = \bigl([a,\ a_1) \times [c,\ d)\bigr) \cup \bigl([a_1,\ b) \times [c,\ d)\bigr) = \Pi_1 \cup \Pi_2,$$

при этом прямоугольники Π_1 и Π_2 не пересекаются. Обозначим через $\gamma = \partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2 = \{x = a_1, c \leqslant y < d\}$. Тогда

$$m(\Pi) = \int_{\partial\Pi^+} f\,dg + \int_{\gamma^+} f\,dg + \int_{\gamma^-} f\,dg = \int_{\partial\Pi_1^+} f\,dg + \int_{\partial\Pi_2^+} f\,dg = m(\Pi_1) + m(\Pi_2),$$

потому что общий участок границы γ между Π_1 и Π_2 при интегрировании проходится дважды, причём в разных направлениях.

Перечислим некоторые свойства меры m, вытекающие из свойств криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса.

1. $m(f,g;\Pi) = -m(g,f;\Pi)$.

2. $m(f,f;\Pi) = 0$.

3. $m(C,g;\Pi) = 0$, где $C = \mathrm{const}$.

4. Если $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема, то
$$m(f,g;\Pi) = m(fg'_x, x;\Pi) + m(fg'_y, y;\Pi).$$

5. Линейность по f : $m(\lambda f_1 + \mu f_2, g;\Pi) = \lambda m(f_1,g;\Pi) + \mu m(f_2,g;\Pi)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Аналогично, линейность по g .

6. Если $f(x,y) = x$, $g(x,y) = y$, то мера m совпадает с обычной мерой Лебега на плоскости. Это следует из равенства (1.7).

7. Если $f(x,y) \equiv f(x), g(x,y) \equiv g(y)$, то $m(f,g;\Pi) = \bigl(f(b) - f(a)\bigr)\bigl(g(d) - g(c)\bigr)$.

Следующее утверждение показывает, что мера m может быть представлена как двумерная мера Лебега–Стилтьеса. Напомним, что такая мера определяется на полукольце $\mathfrak{S}$ при помощи некоторой функции $h(x,y)$ равенством [1]

$$\mu\bigl([a,\ b) \times [c,\ d)\bigr) = h(b,d) - h(b,c) - h(a,d) + h(a,c). \tag{2.2}$$

Лемма 2. *Пусть* (x_0, y_0) *— фиксированная точка на плоскости,* $\Pi(x, y)$ *— прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и диагональю, соединяющей точки* (x_0, y_0) *и* (x, y) *. Обозначим*

$$h(x, y) = \operatorname{sign}\big((x - x_0)(y - y_0)\big)\, m(\Pi(x, y)). \tag{2.3}$$

Тогда для произвольного $\Pi \in \mathfrak{S}$ *выполняется равенство* $m(\Pi) = \mu(\Pi)$ *, где мера* μ *определена равенством* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится непосредственным вычислением правой части равенства (2.2) с разбором случаев, когда точка (x_0, y_0) лежит внутри прямоугольника Π и вне его.

Таким образом, для прямоугольного множества мера может вычисляться по формулам (2.1) или (2.2). Однако для не прямоугольного множества формула (2.1), по-видимому, удобнее, чем формула (2.2).

Дальнейшие утверждения связаны с исследованием непрерывности меры m и её счётной аддитивности.

Лемма 3. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна в ограниченной области* D, *последовательность областей* $\Omega_n \subset D$ *такова, что* $\bigvee\limits_{\partial\Omega_n}(g) \leqslant C$, *причём* $C > 0$ *не зависит от* n *и* $\lim\limits_{n\to\infty} d(\Omega_n) = 0$, *где* $d(\Omega)$ *— диаметр области* Ω *. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega_n} f\, dg = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f(x, y)$ равномерно непрерывна в $\overline{D}$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $d(\Omega) < \delta$ и для любых двух точек $M_1, M_2 \in \overline{\Omega}$, будет $|f(M_1) - f(M_2)| < \frac{\varepsilon}{C}$. По условию теоремы существует N такое, что $d(\Omega_n) < \delta$ при $n > N$. Зафиксируем $n > N$ и пусть $M_0 \in \overline{\Omega}_n$ — произвольная точка, тогда по свойству 5 $\int_{\partial\Omega_n} f(M_0)\, dg(M) = 0$, так как $\partial\Omega_n$ — замкнутая кривая. Поэтому

$$\Big|\int_{\partial\Omega_n} f\, dg\Big| = \Big|\int_{\partial\Omega_n} \big(f(M) - f(M_0)\big)\, dg(M)\Big| \leqslant \max_{\partial\Omega_n}\big|f(M) - f(M_0)\big| \bigvee_{\partial\Omega_n}(g) < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следующего утверждения получается, по существу, небольшим изменением доказательства теоремы Хелли [2, 4].

Лемма 4. *Предположим, что:*

1) *семейство функций* $f_n(x)$ *равностепенно непрерывно на* $[a, b]$ *;*

2) *семейство функций* $g_n(x)$ *имеет равномерно ограниченную вариацию на* $[a, b]$ *;*

3) *последовательности* $f_n(x)$ *и* $g_n(x)$ *сходятся поточечно на* $[a, b]$ *к функциям* $f(x)$ *и* $g(x)$ *соответственно.*

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, dg_n = \int_a^b f\, dg.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению условие равностепенной непрерывности означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x_1, x_2, |x_1 - x_2| < \delta \quad \forall n\colon |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда следует, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Условие 2) теоремы означает, что при некотором $K > 0$

$$\sum_{k=1}^{m} |g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})| \leqslant K, \tag{2.5}$$

причём для всех n и любого разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ отрезка $[a, b]$. В пределе при $n \to \infty$ из (2.5) получаем

$$\sum_{k=1}^{m} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant K,$$

что означает ограниченность вариации функции $g(x)$. Таким образом, интеграл $\int_a^b f\,dg$ существует. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|x_1 - x_2| < \delta$ для всех n выполнялось неравенство

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Выберем теперь разбиение $\{x_k\}_{k=0}^m$ отрезка $[a, b]$ с диаметром $d = \max\limits_k (x_k - x_{k-1}) < \delta$. Пусть σ_n — интегральная сумма для интеграла $\int_a^b f_n\,dg_n$, построенная по этому разбиению. Тогда справедлива оценка

$$\left|\sigma_n - \int_a^b f_n\,dg_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_n(\xi_k)\bigl(g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})\bigr) - \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n\,dg_n\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bigl(f_n(\xi_k) - f_n(x)\bigr)\,dg_n(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f_n(\xi_k) - f_n(x)|\, d\bigvee_a^x (g_n) < \frac{\varepsilon}{3K}\sum_{k=1}^{m}\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(g_n) = \frac{\varepsilon}{3K}\bigvee_a^b (g_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Здесь $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — произвольный набор точек. Для функции $f(x)$ при том же значении δ верно неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K}$ как только $|x_1 - x_2| < \delta$. Используя прежнее разбиение и обозначая через σ соответствующую интегральную сумму для интеграла $\int_a^b f\,dg$, аналогично можно получить оценку $\left|\sigma - \int_a^b f\,dg\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Из условия поточечной сходимости последовательностей $f_n(x)$ и $g_n(x)$ следует $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$ для произвольного разбиения $[a, b]$. Следовательно, при некотором N будет иметь место неравенство $|\sigma_n - \sigma| < \frac{\varepsilon}{3}$, если только $n > N$. Отсюда

$$\left|\int_a^b f_n\,dg_n - \int_a^b f\,dg\right| \leqslant \left|\int_a^b f_n\,dg_n - \sigma_n\right| + |\sigma_n - \sigma| + \left|\int_a^b f\,dg - \sigma\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Теорема 5. *Пусть функции* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *определены в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Pi}^0 = [a,\ b] \times [c,\ d]$ *и удовлетворяют условиям:*

1) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна в* $\overline{\Pi}^0$ *;*

2) $\sup\limits_{\Pi\subset\overline{\Pi}^0}\bigvee\limits_{\partial\Pi}(g)<+\infty$, *где точная верхняя грань берется по всем прямоугольникам* $\Pi\in\mathfrak{S}$, *лежащим в* $\overline{\Pi}^0$ *;*

3) *для произвольного* $y_0\in(c,d]$ $g(x,y_0-0)=g(x,y_0)$ *при всех* $x\in[a,\ b]$, *кроме, возможно, конечного набора точек* $T(y_0)=\{x_1,\ldots,x_p\}\subset[a,\ b]$ *;*

4) *для произвольного* $x_0\in(a,b]$ $g(x_0-0,y)=g(x_0,y)$ *при всех* $y\in[c,\ d]$, *кроме, возможно, конечного набора точек* $S(x_0)=\{y_1,\ldots,x_q\}\subset[c,\ d]$ *.*

Тогда для любых $y_0\in(c,\ d]$, $x_0\in(a,\ b]$ *справедливы равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}m\bigl([a,b)\times[y_0-\varepsilon,y_0)\bigr)=\lim_{\varepsilon\to+0}m\bigl([x_0-\varepsilon,x_0)\times[c,d)\bigr)=0. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство нулю первого из пределов в (2.6), второе равенство доказывается аналогично. Обозначим $\Pi_\varepsilon=[a,b)\times[y_0-\varepsilon,y_0)$. Пусть сначала на $[a,\ b]$ нет точек из множества $T(y_0)$. Криволинейный интеграл по границе Π_ε разбивается на интегралы по сторонам прямоугольника с учётом ориентации, то есть

$$m(\Pi_\varepsilon)=\int_{\partial\Pi_\varepsilon^+}f\,dg=\int_a^b f(x,y_0-\varepsilon)\,dg(x,y_0-\varepsilon)+\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0}f(b,y)\,dg(b,y)-$$
$$-\int_a^b f(x,y_0)d\,g(x,y_0)-\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0}f(a,y)\,dg(a,y).$$

По теореме об оценке для интеграла Римана–Стилтьеса

$$\left|\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0}f(b,y)\,dg(b,y)\right|\leqslant\max_{y_0-\varepsilon\leqslant y\leqslant y_0}|f(b,y)|\bigvee_{y_0-\varepsilon}^{y_0}\bigl(g(b,\cdot)\bigr).$$

Из общего курса теории функций действительной переменной известно, что если функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию и непрерывна слева в некоторой точке x_0, то функция $v(x)=\bigvee\limits_a^x(g)$ также будет непрерывной слева в этой же точке [3]. Отсюда, на основании условия 3) теоремы получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0}f(b,y)\,dg(b,y)=0.$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0}f(a,y)\,dg(a,y)=0.$$

Из условия 1) теоремы следует, что семейство функций $f(\cdot,y)$, $y\in[c,\ d]$ равностепенно непрерывно на $[a,\ b]$. Поэтому, по лемме 4

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b f(x,y_0-\varepsilon)\,dg(x,y_0-\varepsilon)=\int_a^b f(x,y_0)\,dg(x,y_0).$$

Отсюда $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}m(\Pi_\varepsilon)=0$.

Пусть теперь $[a,\ b]\cap T(y_0)\neq\varnothing$. Так как множество $T(y_0)$ конечно, то можно указать такое $\sigma>0$, что каждый из интервалов $(x_k-\sigma,\ x_k+\sigma)$, $k=1,\ldots,p$ не содержит других точек из множества $T(y_0)$, кроме x_k. Более того, значения $\sigma>0$ и $\varepsilon>0$ можно выбрать так, чтобы для заданного наперед $\delta>0$ было $m\bigl([x_k-\sigma,\ x_k+\sigma)\times[y_0-\varepsilon,\ y_0)\bigr)<\frac{\delta}{2p}$. Это следует из леммы 3. Очевидно,

$$[a,\ b)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^p[x_k-\sigma,\ x_k+\sigma)\right)=\bigcup_{k=1}^r[\alpha_k,\ \beta_k),$$

причем каждый из промежутков $[\alpha_k,\ \beta_k), k = 1,\ldots,r$ не содержит точек из множества $T(y_0)$. Поэтому по доказанному ранее

$$\lim_{\varepsilon\to+0} m\big([\alpha_k,\ \beta_k)\times[y_0-\varepsilon,\ y_0)\big) = 0, \qquad k = 1,\ldots,r.$$

Значит, при достаточно малом ε будет $m\big([\alpha_k,\ \beta_k)\times[y_0-\varepsilon,\ y_0)\big) < \frac{\delta}{2r}$. В итоге отсюда получаем

$$m(\Pi_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{p} m\big([x_k-\sigma,\ x_k+\sigma)\times[y_0-\varepsilon,\ y_0)\big) + \sum_{k=1}^{r} m\big([\alpha_k,\ \beta_k)\times[y_0-\varepsilon,\ y_0)\big) <$$
$$< \frac{\delta}{2p}\cdot p + \frac{\delta}{2r}\cdot r = \delta.$$

В силу произвольности δ получаем требуемое утверждение. □

Следствие 5. *При условиях теоремы 5 мера m счётно-аддитивна на полукольце $\mathfrak{S}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что мера Лебега–Стилтьеса счётно-аддитивна, если функция $h(x,y)$, с помощью которой она задаётся, непрерывна слева по каждой из двух переменных при фиксированном значении другой переменной [1, 3]. По доказанной теореме для функции, определяемой равенством (2.3) это свойство будет выполняться. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
2. Дерр В. Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
4. Пугачёв В.С. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во МАИ, 1996. 744 с.

Поступила в редакцию 24.03.11

D. L. Fedorov
On the line contour Riemann-Stiltjes integral

We introduce the notion of the line contour Riemann-Stiltjes integral and describe some of its properties. In particular, we show that this integral determines a signed measure on a plane, and specify the sufficient conditions for this measure to be countably additive.

Keywords: curve integral, Riemann-Stiltjes integral, countably additive measure.

Mathematical Subject Classifications: 26A42, 28A12

Федоров Дмитрий Леонидович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: fdl@udsu.ru

Fedorov Dmitrii Leonidovich, candidate of physics and mathematics, associate professor, department of mathematical analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.