УДК 517.53

© *А. Ю. Тимофеев*

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Решается задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах с заданным модулем непрерывности: доказывается существование голоморфной в круге функции по предельным значениям ее действительной части на границе круге.

Ключевые слова: задача Дирихле, голоморфные функции, модуль непрерывности.

Введение

Данная работа продолжает исследования, проведённые в [1].

При исследовании краевых задач, связанных с аналитическими функциями, используется следующий результат ([2], [3, с. 131]):

Теорема 1. *Если функция g задана на ∂G и непрерывна по Гельдеру с показателем λ $(0 < \lambda < 1)$ и с постоянной H, то существует единственная голоморфная в $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция f, удовлетворяющая условиям*

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированная точка, причем f является непрерывной по Гельдеру в $\overline{G}$ с тем же самым показателем λ.

Интерес представляет вопрос о справедливости этой теоремы для более общих, чем гельдеровские пространства классов функций.

При решении этой задачи возникает вопрос: если функция u находится в определенном классе функций, то в каком классе функций будет находиться функция v, сопряженная к u? Известно (см., напр., [4, с. 64–71]), что предельные поведения вещественной и мнимой частей голоморфной функции выражаются с помощью формул преобразования Гильберта

$$\begin{cases} v(e^{i\gamma_0}) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{i\gamma}) \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma-\gamma_0}{2}\, d\gamma + v_0, \quad v_0 = v(0,0), \\ u(e^{i\gamma_0}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(e^{i\gamma}) \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma-\gamma_0}{2}\, d\gamma + u_0, \quad u_0 = u(0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Сингулярный интеграл Гильберта, стоящий в правой части (1), тесно связан с несобственным интегралом Коши вдоль окружности радиуса единица с центром в начале координат (см., напр., [5, с. 163]). Таким образом, указанная задача связана с описанием пространств, инвариантных относительно интегральных операторов Гильберта и Коши. Отметим также, что в [5] приведены примеры пространств, инвариантных относительно интегрального оператора Коши. В частности, пространства Гельдера для показателей $\lambda : 0 < \lambda < 1$, $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$ инвариантны относительно указанных операторов.

Как показано ещё И. И. Приваловым ([6, с. 199]), для интеграла Коши это не так для случая $\lambda = 1$: если плотность f удовлетворяет в точках границы ∂G условию Липшица, то граничные значение интеграла типа Коши $F(z)$ удовлетворяют соотношению

$$|F(z_1) - F(z_2)| \leqslant A \cdot |z_1 - z_2| \cdot \ln\frac{1}{|z_1 - z_2|}, \qquad |z_1 - z_2| \leqslant \delta.$$

В работе [7] получен следующий результат: если D_α — класс функций, модули которых удовлетворяют неравенству

$$\omega(u,t) \leqslant A\Big(\ln\frac{a}{t}\Big)^{-\alpha},$$

то оператор Коши переводит функцию класса D_α в функцию класса $D_{\alpha-1}$. Как и в случае пространства Липшица, здесь имеет место «логарифмический эффект».

Необходимо отметить еще работу П. М. Тамразова [8]. Пусть G — открытое множество комплексной плоскости, $\overline{G}$ — его замыкание, а $f(z)$ — функция, голоморфная в G и непрерывная в замыкании $\overline{G}$. В [8] получены условия на множество G и мажоранту $\varphi(\tau)$ типа модуля непрерывности, которые обеспечили бы истинность следующего суждения: если модуль непрерывности функции $f(z)$ на границе ∂G удовлетворяет условию $\omega(f,t) = O(\varphi(t))$, то модуль непрерывности функции $f(z)$ на замыкании $\overline{G}$ также удовлетворяет этому условию.

В работе [9] (см. также [10]) в связи с изучением нелинейных сингулярных интегральных уравнений в пространстве функций с ограничениями на модуль непрерывности рассмотрен класс функций Φ (определение и свойства приведены в п. 1.1). По-видимому, этот класс впервые был введен в работе [11].

Определим теперь для замкнутого ограниченного подмножества $K \subseteq \mathbb{C}$ и $\mu \in \Phi$ класс непрерывных функций $C_\mu(K)$, удовлетворяющих условию

$$||f||_\mu := \max\left\{\sup_{\overline{G}}|f(t)|, \sup_{z_1\neq z_2}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\mu(|z_1-z_2|)}\right\} < \infty.$$

Показывается, что величина, стоящая в правой части последней формулы удовлетворяет всем аксиомам нормы, более того, пространство $(C_\mu(K), ||\cdot||_\mu)$ является банаховым. В [9] это пространство еще называют обобщенным пространством Гельдера.

В [1] приводится решение задачи Дирихле для голоморфных функций в обобщенных пространствах Гельдера, а именно, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть функция g задана на ∂G и удовлетворяет условию*

$$|g(e^{i\theta_1}) - g(e^{i\theta_2})| \leqslant C\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \quad \mu \in \Phi.$$

Тогда существует единственная голоморфная в G функция f, непрерывная в замкнутом круге и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \qquad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированное число, причем f удовлетворяет во всех точках $\overline{G}$ условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant A\mu(|z_1 - z_2|).$$

В данной работе приведено решение задачи Дирихле для голоморфных функций при более слабых ограничениях на функцию $\mu(t)$ (см. параграф 3, теорема 9). Основные результаты работы анонсированы в [12].

§ 1. Некоторые пространства функций с заданным поведением модуля непрерывности

1.1. Функции класса Φ. В [9] рассмотрен следующий класс функций (см. также [10]).

Будем говорить, что функция $\mu : (0, l_0] \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Φ, если

1°. $\lim\limits_{t\to+0}\mu(t) = 0$;

2°. $\mu(t)$ почти возрастает, то есть существует постоянная $c = c_\mu$, что для всех $t_1, t_2 \in (0, l_0]$: $t_1 \leqslant t_2$ выполнено $\mu(t_1) \leqslant c\mu(t_2)$;

3°. $\sup\limits_{t>0} \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t \frac{\mu(t)}{t} dt = A_\mu < \infty;$

4°. $\sup\limits_{t>0} \frac{t}{\mu(t)} \int_t^{l_0} \frac{\mu(t)}{t^2} dt = B_\mu < \infty.$

Приведем некоторые полезные свойства функций из класса Φ (см., напр., [9, 13]):

1. $\mu(t) \geqslant 0 \quad \forall\, t \in (0, l_0]$.
2. $\frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает.
3. $\displaystyle\int_0^x \frac{\mu(t)}{t}\, dt \leqslant A_\mu \mu(x)$.
4. $\displaystyle\int_x^{l_0} \frac{\mu(t)}{t^2}\, dt \leqslant B_\mu \frac{\mu(x)}{x}$.
5. $\exists \alpha, \beta \in (0,1)$, что для всех $t \in (0, l_0)$ выполнено $c_{\mu,1} t^\alpha \leqslant \mu(t) \leqslant c_{\mu,2} t^\beta$.

Лемма 1 (см. [9, с. 57]). *Если неотрицательная функция $\varphi(t)$ почти возрастает в $(0, l_0)$ и сходится интеграл*

$$\int_0^{l_0} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad (\textit{условие Дини}), \tag{2}$$

то функция $\psi(t) = \int_0^t \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \varphi(t) \cdot \ln \frac{l_0}{t}$ почти возрастает в $(0, l_0)$.

Следствие 1. *Предположим, что функция $\varphi(t)$ вместо условия (2) удовлетворяет более сильному условию 3°, тогда функция $\varphi(t) \cdot \ln \frac{l_0}{t}$ тоже почти возрастает.*

Действительно, по лемме 1 существует $C > 0$, что $\forall t_1, t_2 : 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant l_0/2$ со свойством

$$\varphi(t_1) \cdot \ln \frac{l_0}{t} \leqslant \int_0^{t_1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \varphi(t_1) \cdot \ln \frac{l_0}{t_1} \leqslant C \left[\int_0^{t_2} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \varphi(t_2) \cdot \ln \frac{l_0}{t_2} \right] \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \cdot \varphi(t_2) + C \cdot \varphi(t_2) \cdot \ln \frac{l_0}{t_2} \leqslant C_2 \cdot \varphi(t_2) \cdot \ln \frac{l_0}{t_2}.$$

Отметим, что функция $\varphi(t) = 1/(\ln \frac{1}{t})^{1/2}$ не удовлетворяет условию Дини (2) и функция $\varphi(t) \cdot \ln \frac{1}{t}$ не является почти возрастающей на $(0, \frac{1}{2}]$.

Из свойства 3°, в частности, следует, что $\mu \in \Phi$ удовлетворяет условию Дини. Заметим, что сингулярный оператор Коши изучался также в [14] для пространств функций, описываемых поведением модуля непрерывности с условием Дини.

Примерами функций $\mu(t)$ из класса Φ являются следующие функции:

- $\mu(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$.
- $\mu(t) = t^\alpha |\ln t|^p, \quad \mu(0) = 0, \quad$ где $\quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < p, \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$.

Как показывает следующий пример, функция $\mu(t)$ может быть разрывной:

- $\mu(t) = \begin{cases} t^\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{l_0}{2}, \\ t^\alpha + 1, & \frac{l_0}{2} \leqslant t \leqslant l_0. \end{cases}$

Выше было отмечено, что в [1] решена задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, описываемых поведением функции $\mu \in \Phi$ (см. теорему 2 во введении).

В данной работе решается задача Дирихле при более слабых ограничениях на функцию $\mu(t)$.

1.2. Функции класса Φ_1 и их свойства. Обозначим через Φ_1 класс функций $\mu : (0, l_0] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям 1°, 2°, а также условиям

3^* $\frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает;

4^* при некотором $\delta > 0$ $\int_0^\delta \frac{\mu(t)}{t}\,dt < +\infty$ (условие Дини).

Заметим, что модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ функции f, определяемый равенством

$$\omega(\delta) = \omega(f,\delta) := \sup_{|t_1-t_2|<\delta} |f(t_1) - f(t_2)|,$$

является неубывающей функцией, причем

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0, \omega(\delta_1+\delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

Последнее условие заведомо будет выполнено, если потребовать, что $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ является невозрастающей функцией.

Очевидно, что справедливо включение $\Phi \subset \Phi_1$. Следующий пример показывает, что это включение строгое: $\mu(t) = t\cdot\ln\frac{1}{t}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, принадлежит Φ_1, но не принадлежит Φ, поскольку не выполнено условие 4°.

При доказательстве основного утверждения у нас будут возникать дополнительные условия на функцию $\mu \in \Phi_1$.

Лемма 2. *Предположим, что* $\mu \in \Phi_1$.

(2.1) *Если выполнено условие, что* $\mu(t)\cdot\ln^2\frac{1}{t}$ *почти возрастает на* $(0,l_0]$ $(0 < l_0 < 1)$, *то* $\mu(t)$ *почти возрастает, причем* $\lim\limits_{t\to 0+} \mu(t)\cdot\ln\frac{1}{t} = 0$.

(2.2) *Если* $\mu(t)\cdot\ln^3\frac{1}{t}$ *почти возрастает на* $(0,l_0]$ $(0 < l_0 < 1)$, *тогда* $\mu(t)\cdot\ln^2\frac{1}{t} \to 0$ *при* $t \to 0+$, *причем* $\int_0^{l_0} \frac{\mu(t)\cdot\ln^2\frac{1}{t}}{t}\,dt$ *сходится.*

Доказательство.

(2.1) Из условия следует, что $\forall t_1 \leqslant t_2 \leqslant l_0 < 1$

$$\frac{\mu(t_1)}{\mu(t_2)} \leqslant C\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1}\right)^2 \leqslant C.$$

Кроме того,

$$\mu(t)\cdot\ln\frac{1}{t} \leqslant C\cdot\frac{\mu(l_0)\cdot\ln^2\frac{1}{l_0}}{\ln\frac{1}{t}}.$$

(2.2)

$$\int_0^{l_0} \frac{\mu(t)\ln\frac{1}{t}}{t}\,dt = \int_0^{l_0} \frac{\mu(t)\cdot\ln^3\frac{1}{t}}{t\cdot\ln^2\frac{1}{t}}\,dt \leqslant C\cdot\mu(l_0)\ln^3\frac{1}{l_0}\cdot\int_0^{l_0}\frac{dt}{t\ln^2\frac{1}{t}} < \infty.$$

□

Как и выше, определим теперь для замкнутого ограниченного множества $K \subset \mathbb{C}$ и $\mu \in \Phi_1$ класс непрерывных функций $C_\mu(K)$ (см. введение). Так же, как в [1], доказывается

Лемма 3. *Пусть* $\mu \in \Phi_1$, *тогда пространство* $C_\mu(K)$ *является банаховым.*

§ 2. Некоторые свойства голоморфных в круге функций из класса $C_\mu(\overline{G})$

В работе [15, с. 451–457] доказываются свойства голоморфных в круге G функций, удовлетворяющих в замкнутом круге условию Гельдера с показателем $\lambda \in (0,1)$. В работе [1] эти свойства перенесены на более общий случай, а именно, когда голоморфная функция принадлежит $C_\mu(\overline{G})$, где $\mu \in \Phi$. В данном разделе получены аналоги соответствующих утверждений для случая $\mu \in \Phi_1$.

Теорема 3. *Пусть голоморфная в круге G функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f \in C(\overline{G})$, причем*

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant C_1 \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \tag{3}$$

тогда справедлива оценка

$$|f'(\xi)| \leqslant C_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}, \qquad |\xi| = r < 1. \tag{4}$$

Поскольку, для $|\theta_1 - \theta_2| \leqslant \frac{\pi}{2}$ справедливо

$$\frac{2}{\pi} \cdot |\theta_1 - \theta_2| \leqslant |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \leqslant |\theta_1 - \theta_2|, \tag{5}$$

то правую часть (3) *можно оценить сверху выражением $\mu(|\theta_1 - \theta_2|)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Коши для производной голоморфной функции, получаем для $\xi = re^{i\theta} \in G, \xi_1 = e^{i\theta}$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) - f(\xi_1)}{(z-\xi)^2}\, dz.$$

Отсюда, повторяя доказательство необходимости леммы 2 [1], получаем

$$|f'(\xi)| \leqslant \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\mu(t)}{(1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2}t^2}\, dt = \frac{A}{\pi}\left[\int_0^{1-r} (\ldots)\, dt + \int_{1-r}^{\pi} (\ldots)\, dt\right] = J_1(r) + J_2(r).$$

Предположим сначала, что $r \geqslant \frac{1}{2}$. Так же как в [1] получаем, используя свойство 2° функции $\mu(t)$

$$J_1(r) \leqslant A_1 \frac{\mu(1-r)}{1-r}. \tag{6}$$

Для второго интеграла получаем оценку

$$J_2(r) \leqslant \frac{\pi A}{4r} \cdot \int_{1-r}^{\pi} \frac{\mu(t)}{t^2}\, dt \leqslant A_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \int_{1-r}^{\pi} \frac{dt}{t} = A_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем для $|\xi| = r \geqslant \frac{1}{2}$

$$|f'(\xi)| \leqslant B \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}. \tag{8}$$

Если теперь в качества B возьмем величину, большую, чем верхняя грань $\frac{|f'(\xi)|(1-r)}{\mu(1-r)\cdot \ln \frac{\pi}{1-r}}$ для $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}$, то получаем, что неравенство (8) справедливо для всех $\xi : |\xi| < 1$. □

Замечания

1. В оценке (8) можно убрать π, увеличив постоянную B, считая $r \geqslant r_0$.
2. В оценке (7) логарифм нельзя убрать, как показывает пример функции $\mu(t) = t \cdot \ln \frac{1}{t}$.

С использованием леммы 2 аналогично доказывается

Теорема 4. *Предположим дополнительно, что $\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Пусть далее голоморфная в круге G функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f \in C(\overline{G})$, причем*

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant C_1 \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|) \cdot \ln \frac{1}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}, \qquad |\theta_1 - \theta_2| < 1.$$

Тогда

$$|f'(\xi)| \leqslant C_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln^2 \frac{\pi}{1-r}, \qquad |\xi| = r < 1.$$

Теорема 5. *Предположим, что $\mu \in \Phi_1$ удовлетворяет условию, что $\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Предположим, что для $f \in H(G)$ выполнено условие*

$$|f'(\xi)| \leqslant C_1 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r}, \qquad |\xi| = r < 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant C_2 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|}, \qquad |\theta_1 - \theta_2| < 1. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве достаточности леммы 2 из [1] получим, что для всех θ существует $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, что f ограничена в G и представима в виде интеграла Пуассона через свои предельные значения $f(e^{i\theta})$ (см. [15, с. 381]). Покажем, что верна оценка (9), откуда будет следовать, что $f \in C(\overline{G})$ ([15, с. 369]). Имеем

$$f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2}) = \int_l f'(\xi)\, d\xi,$$

где кривая l состоит из отрезков $\overline{e^{i\theta_1}, he^{i\theta_1}}, \overline{e^{i\theta_2}, he^{i\theta_2}}$ и дуги окружности $(he^{i\theta_1}, he^{i\theta_2})$, причем $h = 1 - |\theta_1 - \theta_2|$. Тогда

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant \int_h^1 |f'(re^{i\theta_1})|dr + \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h|f'(he^{it})|dt\right| + \int_h^1 |f'(re^{i\theta_2})|dr \leqslant$$

$$\leqslant 2A_1 \int_h^1 \frac{\mu(1-r)}{1-r} dr + A_2 \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h\frac{\mu(1-h)}{1-h} dt\right| = I_1 + I_2.$$

Тогда

$$I_2 \leqslant A_2 \cdot h \cdot |\theta_1 - \theta_2| \cdot \frac{\mu(|\theta_1 - \theta_2|)}{|\theta_1 - \theta_2|} < A_2 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|), \tag{10}$$

$$I_1 = 2A_1 \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{\mu(t)}{t}\, dt = 2A_1 \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}}{t \cdot \ln^2 \frac{1}{t}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|} \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{dt}{t \cdot \ln^2 \frac{1}{t}} = C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует (9). □

Теорема 6. *Предположим дополнительно, что $\mu(t) \in \Phi_1$ удовлетворяет условию, что $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Предположим, что для функции $f \in H(G)$ выполнено условие* (4)*. Тогда справедлива оценка*

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|}, \qquad |\theta_1 - \theta_2| < 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя схему доказательства теоремы 5 (см. также доказательство леммы 2 [1]) с использованием леммы 2, получим вначале, что интеграл $\int_0^1 f'(e^{i\theta})\, dr$ сходится для всех θ, а значит, для всех θ существует $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Далее, получаем, что

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant 2 \cdot C \cdot \int_h^1 \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}\, dr + C_1 \cdot \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h \cdot \frac{\mu(1-h)}{1-h}\, dt\right| = I_1 + I_2.$$

Далее, используя лемму 2, получим

$$I_2 \leqslant C_1 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln \frac{\pi}{|\theta_1 - \theta_2|},$$

$$I_1 \leqslant 2 \cdot C \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{\mu(t)}{t} \cdot \ln \frac{\pi}{t}\, dt \leqslant C_2 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{\pi}{|\theta_1 - \theta_2|}.$$

Из этих оценок следует утверждение теоремы 6. □

Теорема 7. *Предположим, что $\mu(t)\cdot\ln^3\frac{1}{t}$ почти возрастает и для функции $f\in H(G)\cap C(\overline{G})$ выполнено условие (3), тогда справедлива оценка*

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leqslant C\cdot\mu(|\xi_1-\xi_2|)\cdot\ln^2\frac{1}{|\xi_1-\xi_2|},\qquad \xi_1,\xi_2\in\overline{G},\quad |\xi_1-\xi_2|<1. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что из (3) следует оценка

$$|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})|\leqslant C\cdot\mu(|\theta_1-\theta_2|).$$

Результат немедленно получится, если докажем, что для всех точек $\xi_1=r_1e^{i\theta_1},\xi'=r_1e^{i\theta_2},\xi_2=r_2e^{i\theta_2}$ из $\overline{G}$ выполняются следующие неравенства:

$$|f(r_1e^{i\theta_1})-f(r_1e^{i\theta_2})|\leqslant\hat{C}\cdot\mu(|r_1e^{i\theta_1}-r_1e^{i\theta_2}|)\cdot\ln^2\frac{1}{|r_1e^{i\theta_1}-r_1e^{i\theta_2}|}, \tag{13}$$

$$|f(r_1e^{i\theta_2})-f(r_2e^{i\theta_2})|\leqslant\hat{C}\cdot\mu(|r_1e^{i\theta_2}-r_2e^{i\theta_2}|)\cdot\ln^2\frac{1}{|r_1e^{i\theta_2}-r_2e^{i\theta_2}|}. \tag{14}$$

Действительно, используя, что $|\xi_1-\xi'|\leqslant|\xi_1-\xi_2|$, $|\xi'-\xi_2|\leqslant|\xi_1-\xi_2|$ и свойство почти возрастания функции $\mu(t)\cdot\ln\frac{1}{t}$, получаем

$$\begin{aligned}|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leqslant|f(\xi_1)-f(\xi')|+|f(\xi')-f(\xi_2)|\leqslant&\\ \leqslant\hat{C}(\mu(|\xi_1-\xi'|)\cdot\ln^2\frac{1}{|\xi_1-\xi'|}+\mu(|\xi'-\xi_2|)\cdot\ln^2\frac{1}{|\xi'-\xi_2|})\leqslant&\\ \leqslant C\mu(|\xi_1-\xi_2|)\cdot\ln\frac{1}{|\xi_1-\xi_2|},\quad |\xi_1-\xi_2|<1.&\end{aligned}$$

При этом можно предполагать, что $\xi_1\neq\xi_2$ и $r_1\neq 0$.

1. Доказательство (13). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\xi)=\begin{cases}\frac{f(\xi e^{i\theta_1})-f(\xi e^{i\theta_2})}{\xi}, & \xi\in\overline{G}\backslash\{0\},\\ f'(0)\cdot(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}), & \xi=0.\end{cases}$$

Заметим, что в [1] во второй строчке пропущен второй множитель. Функция $\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\xi)\in H(G)\cap C(\overline{G})$. Применяя принцип максимума модуля голоморфной функции и условие теоремы, получаем для $\xi:\xi=r_1<1$, что

$$\begin{aligned}\frac{|f(r_1e^{i\theta_1})-f(r_1e^{i\theta_2})|}{r_1}\leqslant\max_{|\xi|\leqslant r_1}|\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\xi)|\leqslant\max_{|\xi|\leqslant 1}|\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\xi)|=\max_{|\xi|=1}|\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\xi)|=&\\ =\max_{0\leqslant t\leqslant\pi}|f(e^{i(t+\theta_1)})-f(e^{i(t+\theta_2)})|\leqslant C\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|).&\end{aligned}$$

Отсюда, используя условие 3^*, получим

$$\begin{aligned}|f(r_1e^{i\theta_1})-f(r_1e^{i\theta_2})|\leqslant C\cdot\frac{\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|)\cdot r_1}{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}\cdot|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|\leqslant&\\ \leqslant C\cdot\mu(r_1|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|).&\end{aligned} \tag{15}$$

Для всех ξ_1,ξ_2 таких, что $|\xi_1-\xi_2|<\frac{1}{2}$, следует, что $|\xi_1-\xi'|<\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\ln^2\frac{1}{r_1|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}>\ln^2 2,$$

а значит, из (15) следует (13).

2. Доказательство (14). Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \leqslant r_1 < r_2 < 1$. Тогда по теореме 3

$$|f(r_1e^{i\theta_2}) - f(r_2e^{i\theta_2})| \leqslant \int_{r_1}^{r_2} |f'(te^{i\theta_2})|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant A \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu(1-t)}{1-t} \cdot \ln \frac{\pi}{1-t}\, dt = A \int_{1-r_2}^{1-r_1} \frac{\mu(x)}{x} \cdot \ln \frac{\pi}{x}\, dx = A \cdot I(r_1, r_2).$$

Рассмотрим два случая:

а) $r_2 < \frac{1+r_1}{2}$, что эквивалентно неравенству $r_2 - r_1 < 1 - r_2$. Из свойств функции $\frac{\mu(t)}{t} \cdot \ln \frac{\pi}{t}$ следует, что

$$I(r_1, r_2) \leqslant \frac{C\mu(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1} \cdot \int_{r_1}^{r_2} dx = C \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1}. \tag{16}$$

б) $r_2 \geqslant \frac{1+r_1}{2}$, тогда $r_2 - r_1 \geqslant 1 - r_2$. Представим интеграл $I(r_1, r_2)$ в следующем виде:

$$I(r_1, r_2) = \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} (\ldots)\, dx + \int_{r_2-r_1}^{1-r_1} (\ldots)\, dx = I_1(r_1, r_2) + I_2(r_1, r_2).$$

Тогда

$$I_2(r_1, r_2) = \int_{r_2-r_1}^{1-r_1} \frac{\mu(x)}{x} \cdot \ln \frac{\pi}{x}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \frac{\mu(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1} \cdot (1 - r_2) < C \cdot \frac{\mu(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1}, \tag{17}$$
$$I_1(r_1, r_2) = \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} \frac{\mu(x)}{x} \cdot \ln \frac{\pi}{x}\, dx = \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} \frac{\mu(x) \cdot \ln^3 \frac{\pi}{x}}{x \ln^2 \frac{\pi}{x}}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln^3 \frac{\pi}{r_2 - r_1} \cdot \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} \frac{dx}{x \ln^2 \frac{\pi}{x}} < C \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln^2 \frac{\pi}{r_2 - r_1}. \tag{18}$$

Из (16), (17), (18) следует (14) для $|\xi_1 - \xi_2| < \frac{1}{2}$. □

§ 3. Решение задачи Дирихле для голоморфных функций

В данном разделе приводится решение задачи Дирихле для голоморфных функций в случае пространства $C_\mu(\overline{G}), \mu \in \Phi_1$ и удовлетворяет условию, что $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает. При этом существенную роль играют свойства функций этого пространства.

Теорема 8. *Пусть* $f(z) = u(r, \theta) + i \cdot v(r, \theta) \in H(G)$, *где область* $G = \{z : |z| < 1\}$. *Пусть далее* $u(r, \theta) \in C(\overline{G})$ *и на* $\partial G = \{z : |z| = 1\}$ *удовлетворяют условию*

$$|u(e^{i\theta_1}) - u(e^{i\theta_2})| \leqslant A \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \tag{19}$$

где $\mu \in \Phi_1$. *Тогда для* f *выполняется условие*

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leqslant C \cdot \mu(|\xi_1 - \xi_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\xi_1 - \xi_2|}, \tag{20}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \overline{G}$, *причем* $|\xi_1 - \xi_2| < \frac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что в G функцию $f(z)$ можно представить по формуле Шварца следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + ic.$$

Отсюда

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2u(e^{it})e^{it}}{(e^{it}-z)^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it})-u(e^{i\theta})}{(e^{it}-z)^2}e^{it}dt.$$

Повторяя рассуждения теоремы 3, получаем, что

$$|f'(z)| \leqslant C\cdot\frac{\mu(1-r)}{1-r}\cdot\ln\frac{\pi}{1-r}, \quad |z| = r < 1.$$

Тогда по теореме 6

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant C\cdot\mu(|\theta_1-\theta_2|)\cdot\ln^2\frac{\pi}{|\theta_1-\theta_2|}. \tag{21}$$

Так как $\frac{2}{\pi}\cdot|\theta_1-\theta_2| \leqslant |e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|$, то в силу свойства функции $\mu(t)$ правую часть (21) можно заменить на

$$\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})|)\cdot\ln^2\frac{\pi}{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})|}.$$

Отсюда, используя схему доказательства (13) в теореме 7, получим, что

$$|f(r_1e^{i\theta_1}) - f(r_1e^{i\theta_2})| \leqslant C_2\cdot\mu(r_1|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|)\cdot\ln^2\frac{1}{r_1|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|}. \tag{22}$$

Повторяя схему доказательства (14) в теореме 7, получаем, используя (5)

$$|f(r_1e^{i\theta_1}) - f(r_2e^{i\theta_1})| \leqslant C_3\cdot\mu(r_2-r_1)\cdot\ln^2\frac{1}{r_2-r_1}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получаем, как и в теореме 7, что

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)| \leqslant C\cdot\mu(|\xi_1-\xi_2|)\cdot\ln^2\frac{1}{|\xi_1-\xi_2|}, \quad \xi_1,\xi_2\in\overline{G}, \quad |\xi_1-\xi_2| < \frac{1}{2}.$$

□

Теорема 9. *Пусть функция g задана на ∂G и удовлетворяет условию*

$$|g(e^{i\theta_1}) - g(e^{i\theta_2})| \leqslant C\cdot\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|),$$

где $\mu\in\Phi_1$, причем $\mu(t)\cdot\ln^3\frac{1}{t}$ почти возрастает. Тогда существует единственная голоморфная в G функция f, непрерывная в замкнутом круге $\overline{G}$ и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z\in\partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c_0,$$

где $z_0\in\partial G$ — фиксированное число, причем f удовлетворяет во всех точках $\overline{G}$ условию

$$|f(z_1)-f(z_2)| \leqslant C\cdot\mu(|z_1-z_2|)\cdot\ln^2\frac{1}{|z_1-z_2|}, \quad |z_1-z_2| < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. В качестве $f(z)$ возьмем следующую функцию:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt + ic_0.$$

Известно, что f является голоморфной в G функцией, причем $u = \operatorname{Re} f$ является непрерывной в $\overline{G}$. Построим теперь функцию $v(r,\theta)$, гармонически сопряженную с функцией $u(r,\theta)$ в круге G. Тогда по теореме 8 функция $f(z)$ удовлетворяет условию (20). □

В теореме 9 получена более точная оценка для функции $f(z)$, чем в [12]: удалось в правой части окончательной оценки добиться вместо дополнительного множителя $\ln^4\frac{1}{|z_1-z_2|}$ аналогичный множитель степени 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильчуков А. С., Тимофеев А. Ю. Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, описываемых поведением модуля непрерывности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 58–65.
2. Reissig M., Timofeev A. Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients // Complex variables. 2005. Vol. 73, № 1–2. P. 653–672.
3. Tutschke W. Vorlesungen uber partielle Differentialgleichungen. Klassische, functionalanalytische und komplexe Methoden. Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1978. 193 s.
4. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
6. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950. 336 с.
7. Геронимус Я. Л. О некоторых интегральных уравнениях // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 1. С. 5–7.
8. Тамразов П. М. Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи математических наук. 1973. Т. 28. Вып. 1 (169). С. 131–161.
9. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.
10. Бабаев А. А., Салаев В. В. Об одном аналоге теоремы Племеля–Привалова в случае негладких кривых и ее приложения // ДАН СССР. 1965. Т. 161, № 2. С. 267–269.
11. Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Известия Академии наук СССР. Сер. Матем. 1955. Т. 19, № 5. С. 285–302.
12. Напалков В. В., Тимофеев А. Ю. Задача Дирихле для голоморфных функций в обобщенных пространствах Гельдера // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432, № 3. С. 1–3.
13. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Московского матем. об-ва. 1956. № 5. С. 485–522.
14. Michlin S. G., Prößdorf S. Singuläre Integraloperatoren. Berlin: Akademie-Verlag, 1980. 514 s.
15. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 630 с.

Поступила в редакцию 25.04.11

A. Yu. Timofeev

Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces with determined modulus of continuity

We study and solve the Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces with a determined modulus of continuity: the existence of the function which is holomorphic inside a disk is proved by the limit values of its real part on the disk's boundary.

Keywords: Dirichlet problem, holomorphic functions, modulus of continuity.

Mathematical Subject Classifications: 30E25

Тимофеев Алексей Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, Сыктывкарский государственный университет, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., 55.
E-mail: tim@syktsu.ru

Timofeev Aleksei Yur'evich, candidate of physics and mathematics, Syktyvkar State University, Oktyabr'skii pr., 55, Syktyvkar, 167001, Russia