МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

УДК 515.122, 515.126.2

© *М. А. Патракеев*

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ[1]

Прямая Зоргенфрея — это вещественная прямая с топологией, база которой состоит из всех полуинтервалов, открытых справа. В работе доказывается, что при натуральных $m > 1$ не существует непрерывного замкнутого отображения m-й степени прямой Зоргенфрея на саму прямую Зоргенфрея, и что при натуральных $n > 2$ не существует непрерывного факторного отображения квадрата прямой Зоргенфрея на n-ю степень прямой Зоргенфрея.

Ключевые слова: прямая Зоргенфрея, конечные степени прямой Зоргенфрея, непрерывное отображение, замкнутое отображение, факторное отображение.

§ 1. Введение

Топологическое пространство «прямая Зоргенфрея», обозначаемое $\mathbf{S}$ — это вещественная прямая с топологией, база которой состоит из всех полуинтервалов, открытых справа. Статья посвящена изучению следующего вопроса:

Пусть m и n — натуральные числа, а $\mathcal{K}$ — некоторый класс непрерывных отображений. Существует ли отображение $f : \mathbf{S}^m \xrightarrow{на} \mathbf{S}^n$, принадлежащее классу $\mathcal{K}$?

В качестве $\mathcal{K}$ в статье рассматриваются следующие классы непрерывных отображений: все отображения, взаимно однозначные отображения, факторные отображения, замкнутые отображения, открытые отображения и гомеоморфизмы. Ранее были известны ответы на данный вопрос в следующих случаях:

– *если $n \geqslant 2$, то не существует непрерывного отображения $\mathbf{S}$ на $\mathbf{S}^n$,*
– *если $m \neq n$, то не существует гомеоморфизма $\mathbf{S}^m$ на $\mathbf{S}^n$,*
– *если $m \geqslant 2$, то существует непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbf{S}^m$ на $\mathbf{S}^n$.*

Первое утверждение является хорошо известным фактом и следует из того, что прямая Зоргенфрея линделёфова, а её конечные степени, начиная со второй, даже не нормальны — (см., напр., [1, примеры 2.3.12 и 3.8.14]). Второе утверждение доказано Д. К. Бурке и Д. Дж. Латцером в 1987 г. [2]. Последнее утверждение в случае $m > n$ легко выводится из факта существования непрерывного взаимно однозначного отображение $\mathbf{S}^2$ на $\mathbf{S}$, которое было построено Бурке и Латцером в той же статье [2]. В случае $m < n$ последнее утверждение доказано автором в 2004 г. в работе [3].

В данной статье получены ответы на рассматриваемый вопрос в следующих случаях (см. ниже следствие 2 и теорему 2):

– *если $m \geqslant 2$, то не существует непрерывного замкнутого отображения $\mathbf{S}^m$ на $\mathbf{S}$,*
– *если $n \geqslant 3$, то не существует непрерывного факторного отображения $\mathbf{S}^2$ на $\mathbf{S}^n$.*

В следующей таблице собраны вместе все приведённые выше результаты, их очевидные следствия, а также простые следствия того общего факта, что проекция является непрерывным открытым отображением:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант 09–01–00139–а) и Фундаментальной программы ОМН РАН (проект 09–Т–1–1004).

Существует ли непрерывное отображение $f : \mathbf{S}^m \xrightarrow{на} \mathbf{S}^n$, лежащее в классе $\mathcal{K}$? («+» — существует, «–» — не существует, «?» — ответ неизвестен)					
$\mathcal{K}$	m, n				
	$m < n$			$m > n$	
	$m = 1$	$m = 2$	$m \geqslant 3$	$n = 1$	$n \geqslant 2$
Все отображения	–	+	+	+	+
Взаимно однозначные отображения	–	+	+	+	+
Факторные отображения	–	–	?	+	+
Открытые отображения	–	–	?	+	+
Замкнутые отображения	–	–	?	–	?
Гомеоморфизмы	–	–	–	–	–

§ 2. Обозначения и терминология

Символы $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают множество натуральных чисел и множество вещественных чисел, символы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ обозначают пространство вещественных чисел с естественной топологией и прямую Зоргенфрея. Через (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ и $[a, b]$ обозначаются интервал, полуинтервалы и отрезок в $\mathbb{R}$, через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ обозначается точка в $\mathbb{R}^n$ с координатами $a_1, \ldots, a_n$. Через $\overline{A}$ и $Fr(A)$ обозначаются замыкание и граница множества A. Символ $:=$ означает «равно по определению».

При $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ рассматривается множество

$$B[a, \varepsilon) := [a_1, a_1 + \varepsilon) \times \ldots \times [a_n, a_n + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

которое является базисной «ε-окрестностью» точки a в пространстве $\mathbf{S}^n$. Обычный же открытый шар с центром a радиуса ε в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ обозначается через $B(a, \varepsilon)$. В остальном в тексте статьи используются обозначения и терминология книги Р. Энгелькинга [1].

§ 3. Замкнутые отображения $\mathbf{S}^n$ на $\mathbf{S}$ при $n \geqslant 2$

Рассмотрим отношение частичного порядка $\preceq$ на пространстве $\mathbf{S}^n$, определяемое следующим образом: для точек $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ и $b = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ из $\mathbf{S}^n$ выполняется $a \preceq b$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется $a_i \leqslant b_i$. Утверждение из следующей леммы приводится без доказательства в статье [4], для полноты изложения мы докажем его.

Лемма 1. *Если любые две различные точки множества $E \subseteq \mathbf{S}^n$ несравнимы в отношении частичного порядка $\preceq$, то E является замкнутым дискретным подпространством $\mathbf{S}^n$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n. При $n = 1$ база индукции очевидна. Предположим, что $n \geqslant 2$ и утверждение леммы выполняется для каждого $i < n$. Очевидно, что E является дискретным подпространством $\mathbf{S}^n$, поэтому достаточно доказать, что оно замкнуто. Предположим, что это не так и нашлась точка $a \in \overline{E} \setminus E$.

Пусть $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательность из $B[a, 1) \bigcap E$, сходящаяся к точке a. Если в данной последовательности есть элемент x_k такой, что для каждой координаты $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется $\pi_i(a) < \pi_i(x_k)$, где π_i — проекция на i-ю ось координат, то, очевидно, найдётся другой элемент x_l последовательности $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$, для которого выполняется $x_l \preceq x_k$. Это противоречит тому, что $x_l, x_k \in E$. Значит, такого элемента в последовательности не нашлось, то есть для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует координата $i_m \in \{1, \ldots, n\}$ такая, что $\pi_{i_m}(a) = \pi_{i_m}(x_m)$. Одна из координат, обозначим её через i, встретилась среди координат i_m бесконечное число раз, поэтому можно считать, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется $\pi_i(a) = \pi_i(x_m)$.

Рассмотрим проектирование $\pi^i : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^{n-1}$, которое «забывает» i-ю координату. Из предположения индукции следует, что множество $\pi^i(\{x_m : m \in \mathbb{N}\})$ является замкнутым дискретным подпространством $\mathbf{S}^{n-1}$. Это противоречит тому, что последовательность $\big(\pi^i(x_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $\pi^i(a)$. $\square$

Следующая лемма получена небольшим изменением задачи 81 главы VI в книге [5].

Лемма 2. *Пусть $n \geqslant 2$ и f — непрерывное замкнутое отображение $\mathbf{S}^n$ на $Y \subseteq \mathbf{S}$. Тогда для каждой точки $y \in Y$ граница множества $f^{-1}(y)$ является счётно компактным подпространством $\mathbf{S}^n$.*

Доказательство. Предположим, что заключение леммы не выполняется и нашлась точка $y \in Y$ такая, что множество $B := Fr\big(f^{-1}(y)\big)$ не счётно компактно, где Fr — операция взятия границы. Тогда найдётся бесконечное множество $E \subseteq B$, которое не имеет предельных точек в B. Поскольку множество B, будучи границей, замкнуто, то E также не имеет предельных точек и в $\mathbf{S}^n$, то есть E — бесконечное замкнутое дискретное подпространство $\mathbf{S}^n$. Покажем, что найдутся последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ различных точек из E и дискретное семейство $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ их окрестностей. Для этого рассмотрим два случая.

1. Множество E, как подпространство евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, имеет в $\mathbf{R}^n$ предельную точку a. В этом случае построим последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ по индукции. Точку $x_1 \in E$ выберем произвольно. Обозначим $\rho_m := \rho(x_m, a)$, где ρ — евклидово расстояние в $\mathbf{R}^n$. Если точка x_m уже выбрана, то выберем точку $x_{m+1} \in E \setminus \{a\}$ таким образом, что выполняется

$$\rho(x_{m+1}, a) < \rho_m/2. \tag{1}$$

Для любых натуральных $i < j$ выполняется $\rho(x_i, x_j) > \rho_i/2$ и $\rho_i > \rho_j$, поэтому семейство евклидовых окрестностей $\big(B(x_m, \rho_m/4)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ дизъюнктно. Поскольку множество $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ является замкнутым дискретным подпространством $\mathbf{S}^n$ и точка a ему не принадлежит, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $B[a, \varepsilon) \cap \{x_m : m \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Теперь для каждого $m \in \mathbb{N}$ выберем $\varepsilon_m > 0$ такое, что выполняется

$$B[x_m, \varepsilon_m) \subseteq B(x_m, \rho_m/4) \quad \text{и} \quad B[x_m, \varepsilon_m) \cap B[a, \varepsilon) = \varnothing. \tag{2}$$

Такие ε_m найдутся в силу того, что окрестность $B[a, \varepsilon)$ замкнута в $\mathbf{S}^n$.

Определим $U_m := B[x_m, \varepsilon_m)$ и покажем, что последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ и семейство окрестностей $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — искомые. Так как $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — дизъюнктное семейство множеств, то нужно лишь показать, что для каждой точки $z \in \mathbf{S}^n \setminus \bigcup\{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ найдётся $\varepsilon_z > 0$ такое, что $B[z, \varepsilon_z) \cap U_m = \varnothing$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Если $z = a$, то в силу второй части условия (2) можно взять $\varepsilon_z = \varepsilon$. Если $z \neq a$, то найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что $B(z, \delta_1) \cap B(a, \delta_2) = \varnothing$. Из (1) и первой части условия (2) следует, что найдётся такой номер $m_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $m > m_0$ выполняется $U_m \subseteq B(a, \delta_2)$. Поэтому нам остается найти такое $\varepsilon_z > 0$, что для всех $m \leqslant m_0$ выполняется $B[z, \varepsilon_z) \cap U_m = \varnothing$. Это можно сделать, поскольку таких номеров m конечное число и все U_m — замкнутые в $\mathbf{S}^n$ множества, не содержащие точку z.

2. Множество E не имеет предельных точек в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. В этом случае можно найти такую последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ различных точек из E и такие $\varepsilon_m > 0$, что $\big(B(x_m, \varepsilon_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ будет дискретным в $\mathbf{R}^n$ семейство открытых в $\mathbf{R}^n$ множеств. Найдутся такие $\delta_m > 0$, что $B[x_m, \delta_m) \subseteq B(x_m, \varepsilon_m)$, а поскольку евклидова топология слабее топологии прямой Зоргенфрея, то семейство $(U_m)_{m\in\mathbb{N}} := \big(B[x_m, \delta_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ является искомым дискретным в $\mathbf{S}^n$ семейством открытых в $\mathbf{S}^n$ множеств.

Итак, мы нашли последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ различных точек из E и дискретное семейство $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ их окрестностей. Так как отображение f непрерывно и для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется $f(x_m) = y$, то мы можем уменьшить окрестности из семейства $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ таким образом, чтоб выполнялось $f(U_m) \subseteq [y, y + 1/m)$. Вследствие того, что $x_m \in Fr\big(f^{-1}(y)\big)$, найдутся точки $z_m \in U_m \setminus f^{-1}(y)$. Поскольку $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — дискретное семейство открытых множеств, то множество $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ является замкнутым дискретным подпространством $\mathbf{S}^n$. С другой стороны, выполняется $f(z_m) \in f(U_m) \subseteq [y, y+1/m)$ и $f(z_m) \neq y$, следовательно, точка y является предельной для множества $f(\{z_m : m \in \mathbb{N}\})$. Это противоречит тому, что отображение f замкнуто. □

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 2$ и f — непрерывное замкнутое отображение $\mathbf{S}^n$ на $Y \subseteq \mathbf{S}$. Тогда для каждой точки $y \in Y$ граница множества $f^{-1}(y)$ компактна и не более чем счётна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 подпространство $B := Fr\big(f^{-1}(y)\big) \subseteq \mathbf{S}^n$ счётно компактно, следовательно, все его проекции $\pi_i(B) \subseteq \mathbf{S}$ также счётно компактны, а значит, в силу линделёфовости прямой Зоргенфрея, компактны. Каждый компакт на прямой Зоргенфрея не более чем счётен (см., напр., [1, упражнение 3.1.B]), поэтому и само множество B не более чем счётно. Если к этому добавить счётность характера B, то мы получим, что B обладает счётной базой, а значит, будучи счётно компактным подпространством, является компактом.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2$ и f — непрерывное замкнутое отображение $\mathbf{S}^n$ на $Y \subseteq \mathbf{S}$. Тогда Y не более чем счётно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что Y несчётно. Рассмотрим множество

$$C := \big\{y \in Y : f^{-1}(y) \neq Fr\big(f^{-1}(y)\big)\big\}.$$

Множества $f^{-1}(y) \setminus Fr\big(f^{-1}(y)\big)$ открыты и при $y \in C$ непусты, поэтому из счётности числа Суслина пространства $\mathbf{S}^n$ следует, что

$$\text{множество } C \text{ не более чем счётно.} \tag{3}$$

Рассмотрим множество $A := \mathbf{S}^n \setminus f^{-1}(C)$. Так как справедливо $A = f^{-1}(Y \setminus C)$, то множество A несчётно, поэтому несчётна и хотя бы одна из его проекций $\pi_i(A) \subseteq \mathbf{S}$. Без ограничения общности можно считать, что несчётна проекция $\pi_1(A)$. Пусть $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — несчётное семейство различных точек из A такое, что для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$, выполняется

$$\lambda \neq \mu \quad \text{влечёт} \quad \pi_1(a_\lambda) \neq \pi_1(a_\mu). \tag{4}$$

Для каждой точки $a \in A$ рассмотрим множество $T_a := f^{-1}\big(f(a)\big)$. Из определения множеств A и C следует, что $T_a = Fr\Big(f^{-1}\big(f(a)\big)\Big)$, поэтому по следствию 1 каждое множество T_a компактно и не более чем счётно.

Для каждых $\lambda \in \Lambda$ и $x \in T_{a_\lambda}$ найдём такое $\varepsilon_\lambda^x > 0$, что выполняется

$$\pi_1(x) < \pi_1(a_\lambda) \quad \text{влечёт} \quad \pi_1(x) + \varepsilon_\lambda^x < \pi_1(a_\lambda). \tag{5}$$

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим открытое покрытие $\gamma_\lambda := \big(B[x, \varepsilon_\lambda^x)\big)_{x\in T_{a_\lambda}}$ множества T_{a_λ}. Так как T_{a_λ} — компакт, то найдётся конечное множество $K_\lambda \subseteq T_{a_\lambda}$ такое, что $\mu_\lambda := \big(B[x, \varepsilon_\lambda^x)\big)_{x\in K_\lambda}$ также является покрытием T_{a_λ}. Поскольку K_λ конечно, то из (5) следует, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдётся $\varepsilon_\lambda > 0$ такое, что для любого $x \in K_\lambda$ выполняется

$$\pi_1(x) < \pi_1(a_\lambda) \quad \text{влечёт} \quad \pi_1(x) + \varepsilon_\lambda^x < \pi_1(a_\lambda) - \varepsilon_\lambda. \tag{6}$$

Из (6) можно заключить, что для любого $\lambda \in \Lambda$ справедливо

$$\big(\pi_1(a_\lambda) - \varepsilon_\lambda, \pi_1(a_\lambda)\big) \cap \pi_1\Big(\bigcup \mu_\lambda\Big) = \varnothing. \tag{7}$$

Вспомним известный критерий замкнутости непрерывного отображения:

Утверждение 1 (см. [1, теорема 1.4.13]). *Непрерывное отображение* $f : X \to Z$ *является замкнутым тогда и только тогда, когда для каждой точки* $z \in Z$ *и каждого открытого множества* $V \subseteq X$, *содержащего* $f^{-1}(z)$, *в* Z *существует окрестность* U *точки* z *такая, что* $f^{-1}(U) \subseteq V$.

Применим этот критерий к точке $f(a_\lambda)$ и окрестности $\bigcup \mu_\lambda$ её прообраза T_{a_λ}. Согласно утверждению 1, найдется открытое в Y множество $U_\lambda \subseteq Y$, содержащее точку $f(a_\lambda)$ и такое, что $f^{-1}(U_\lambda) \subseteq \bigcup \mu_\lambda$. Так как $a_\lambda \in f^{-1}(U_\lambda)$, то найдётся $\delta_\lambda > 0$ такое, что $B[a_\lambda, \delta_\lambda) \subseteq f^{-1}(U_\lambda)$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим множество

$$G_\lambda := \{a \in B[a_\lambda, \delta_\lambda) : \pi_1(a) = \pi_1(a_\lambda)\}.$$

Так как $\pi_1(G_\lambda) = \{\pi_1(a_\lambda)\}$, то из (4) следует, что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ выполняется

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{влечёт} \quad G_{\lambda_1} \cap G_{\lambda_2} = \varnothing. \tag{8}$$

Покажем, что множество $E := \{\lambda \in \Lambda : G_\lambda \subseteq A\}$ несчётно. От противного, пусть E не более чем счётно. Тогда из определения множества A следует, что

$$\text{множество} \quad \{\lambda \in \Lambda : G_\lambda \cap f^{-1}(C) \neq \varnothing\} \quad \text{несчётно.} \tag{9}$$

Для каждого $c \in C$ рассмотрим открытое множество $W_c := f^{-1}(c) \setminus Fr\big(f^{-1}(c)\big)$. Так как множества $f^{-1}(c)$ замкнуты, то справедливо

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{c \in C} Fr\big(f^{-1}(c)\big) \cup \bigcup_{c \in C} W_c. \tag{10}$$

Из следствия 1 и из (3) вытекает, что множество $\bigcup\limits_{c \in C} Fr\big(f^{-1}(c)\big)$ не более чем счётно и, учитывая (8), можно заключить, что множество

$$\Big\{\lambda \in \Lambda : G_\lambda \cap \bigcup_{c \in C} Fr\big(f^{-1}(c)\big) \neq \varnothing\Big\}$$

не более чем счётно. Из этого, а также из (8), (9) и (10) следует, что множество

$$\Big\{\lambda \in \Lambda : G_\lambda \cap \bigcup_{c \in C} W_c \neq \varnothing\Big\}$$

несчётно. Следовательно, учитывая (3), найдётся $c_0 \in C$ такое, что множество

$$F := \{\lambda \in \Lambda : G_\lambda \cap W_{c_0} \neq \varnothing\}$$

также несчётно. Для каждого $\lambda \in F$ выберем произвольную точку $z_\lambda \in G_\lambda \bigcap W_{c_0}$. Рассмотрим множество $V := \pi_1(W_{c_0})$. Из определения G_λ следует, что для каждого $\lambda \in F$ справедливо $\pi_1(z_\lambda) = \pi_1(a_\lambda)$, поэтому выполняется

$$\{\pi_1(a_\lambda) : \lambda \in F\} \subseteq V. \tag{11}$$

Вспомним, что для каждого $\lambda \in F$ выполняется

$$z_\lambda \in G_\lambda \subseteq B[a_\lambda, \delta_\lambda) \subseteq f^{-1}(U_\lambda) \subseteq \bigcup \mu_\lambda.$$

Поскольку $z_\lambda \in W_{c_0} \subseteq f^{-1}(c_0)$ и $z_\lambda \in f^{-1}(U_\lambda)$, то $c_0 \in U_\lambda$, поэтому

$$W_{c_0} \subseteq f^{-1}(c_0) \subseteq f^{-1}(U_\lambda) \subseteq \bigcup \mu_\lambda,$$

откуда, в силу определения множества V, можно заключить, что для каждого $\lambda \in F$ выполняется $V \subseteq \pi_1(\bigcup \mu_\lambda)$. Это совместно с (7) влечёт, что для каждого $\lambda \in F$ выполняется

$$V \cap \big(\pi_1(a_\lambda) - \varepsilon_\lambda, \pi_1(a_\lambda)\big) = \varnothing.$$

Из последней формулы и из (11) следует, что V, как подпространство топологического пространства «левая прямая Зоргенфрея» (то есть множества действительных чисел с топологией, база которой состоит из всех полуинтервалов, открытых слева), содержит дискретное подпространство $\{\pi_1(a_\lambda) : \lambda \in F\}$. Из (4) следует, что это дискретное подпространство несчётно, чего не может быть, поскольку левая прямая Зоргенфрея, будучи гомеоморфной прямой Зоргенфрея, наследственно сепарабельна (см., напр., [1, упражнение 2.1.I]). Мы получили противоречие и тем самым доказали, что множество $E = \{\lambda \in \Lambda : G_\lambda \subseteq A\}$ несчётно.

Для каждого $\lambda \in E$ найдутся рациональные числа $r^\lambda, q_2^\lambda, q_3^\lambda, \ldots, q_n^\lambda$ такие, что

$$B[b_\lambda, r^\lambda) \subseteq B[a_\lambda, \delta_\lambda), \tag{12}$$

где $b_\lambda := \langle \pi_1(a_\lambda), q_2^\lambda, \ldots, q_n^\lambda\rangle \in \mathbf{S}^n$. Так как множество E несчётно, то найдётся его несчётное подмножество $E_0 \subseteq E$ и рациональные числа $r, q_2, \ldots, q_n$ такие, что для каждого $\lambda \in E_0$ выполняется $q_2^\lambda = q_2$, $\ldots$, $q_n^\lambda = q_n$ и $r^\lambda = r$. Для каждого $\lambda \in E_0$ рассмотрим множество

$$H_\lambda := \{a \in B[b_\lambda, r) : \pi_1(a) = \pi_1(a_\lambda)\}.$$

Из определения G_λ и из (12) следует, что для каждого $\lambda \in E_0$ выполняется

$$H_\lambda \subseteq G_\lambda. \tag{13}$$

Зафиксируем произвольную строго монотонно убывающую функцию $h : \mathbb{R} \to (0, r) \subseteq \mathbb{R}$. Для каждого $\lambda \in E_0$ рассмотрим точку

$$d_\lambda := \big\langle \pi_1(a_\lambda), q_2 + h\big(\pi_1(a_\lambda)\big), \ldots, q_n + h\big(\pi_1(a_\lambda)\big)\big\rangle \in \mathbf{S}^n.$$

Поскольку $0 < h\big(\pi_1(a_\lambda)\big) < r$, то $d_\lambda \in H_\lambda$. Из этого, учитывая (13) и тот факт, что $E_0 \subseteq E$ следует, что множество $D := \{d_\lambda : \lambda \in E_0\}$ содержится в A, а из (4) следует, что множество D несчётно.

Нетрудно показать, что любые две различные точки множества D несравнимы в отношении частичного порядка $\preceq$ на $\mathbf{S}^n$, поэтому, согласно лемме 2, D — замкнутое дискретное подпространство $\mathbf{S}^n$. Поскольку отображение f непрерывно и замкнуто, то и $f(D)$ является замкнутым дискретным подпространством $\mathbf{S}$. Из следствия 1 и из определений множеств A и C вытекает, что для каждой точки $y \in f(A)$ её прообраз $f^{-1}(y)$ не более чем счётен, а так как множество D несчётно и содержится в A, то образ D при отображении f также несчётен. Итак, мы получили, что $f(D)$ — несчётное замкнутое дискретное подпространство $\mathbf{S}$, что противоречит наследственной сепарабельности прямой Зоргенфрея. □

Следствие 2. *Для всех натуральных $n \geqslant 2$ не существует непрерывного замкнутого отображения $\mathbf{S}^n$ на $\mathbf{S}$.*

Вопрос 1. *Существует ли непрерывное замкнутое отображение $\mathbf{S}^n$ на $\mathbf{S}^2$ при $n \geqslant 3$?*

§ 4. Факторные отображения $\mathbf{S}^2$ на $\mathbf{S}^n$ при $n \geqslant 3$

Перейдём к доказательству теоремы 2. Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма, описывающая непрерывные факторные отображения между секвенциальными пространствами в терминах сходящихся последовательностей:

Лемма 3. *Пусть X и Y — секвенциальные хаусдорфовы пространства и f — непрерывное отображение X на Y. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение $f : X \to Y$ является факторным;*

(2) *для каждой точки $y \in Y$ и каждой последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $Y\backslash\{y\}$, сходящейся к y, найдутся подпоследовательность $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ и точки $x_k \in f^{-1}(y_{n_k})$ такие, что последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке $x \in f^{-1}(y)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $y \in Y$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $Y\backslash\{y\}$, сходящаяся к точке y. Множество $A := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ не замкнуто, поэтому, в силу факторности отображения f, не замкнут и его прообраз $f^{-1}(A)$. Так как пространство X секвенциально, то найдётся последовательность $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ из $f^{-1}(A)$ сходящаяся к некоторой точке $x \in \overline{f^{-1}(A)} \setminus f^{-1}(A)$. Пространство Y хаусдорфово, поэтому множество $A \cup \{y\}$ замкнуто, следовательно, замкнут и его прообраз, и мы имеем

$$x \in \overline{f^{-1}(A)} \setminus f^{-1}(A) \subseteq \overline{f^{-1}(A \cup \{y\})} \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cup \{y\}) \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(y).$$

Последовательность $\big(f(z_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $f(x) = y$ и при этом

$$\{f(z_m) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y \setminus \{y\}.$$

Пространство Y хаусдорфово, поэтому множество $\{f(z_m) : m \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, следовательно, найдётся подпоследовательность $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\{f(z_m) : m \in \mathbb{N}\} = \{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ и при этом все члены этой подпоследовательности различны. Выберем произвольные точки $x_k \in f^{-1}(y_{n_k}) \cap \{z_m : m \in \mathbb{N}\}$. Так как $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность из множества $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ и все её члены различны, то она сходится к точке x.

(2) $\Rightarrow$ (1). Достаточно доказать, что если прообраз $f^{-1}(A)$ множества $A \subseteq Y$ замкнут, то замкнуто и само множество A. Предположим, что это не так. Тогда, в силу секвенциальности пространства Y, найдутся точка $y \in \overline{A} \setminus A$ и последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из A, сходящаяся к y. В силу условия (2) найдётся последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из $f^{-1}(A)$, сходящаяся к некоторой точке $x \notin f^{-1}(A)$, что противоречит замкнутости множества $f^{-1}(A)$. □

Следующая лемма устанавливает одно свойство пространства $\mathbf{S}^2$, которым не обладают пространства $\mathbf{S}^n$ при $n \geqslant 3$. В некотором смысле теорема 2 является следствием этого различия. В качестве контрпримера к аналогу леммы 4 для $\mathbf{S}^n$ при $n \geqslant 3$ можно, например, взять несчётное множество l, которое будет рассмотрено ниже в доказательстве теоремы 2.

Лемма 4. *Каждое несчётное множество $A \subseteq \mathbf{S}^2$ содержит точку $a \in A$, обладающую следующим свойством:*

для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in B[a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ существует $b \in A \setminus \{a\}$ такое, что $x \in B[b, 2\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой точке $x = \langle x_1, x_2\rangle \in \mathbf{S}^2$ и каждому $\varepsilon > 0$ поставим в соответствие два множества $W_1(x, \varepsilon)$ и $W_2(x, \varepsilon)$:

$$W_1(x, \varepsilon) := [x_1 - \varepsilon, x_1] \times [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \subseteq \mathbf{S}^2,$$

$$W_2(x, \varepsilon) := [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times [x_2 - \varepsilon, x_2] \subseteq \mathbf{S}^2.$$

Рассмотрим множества $C_1, C_2 \subseteq A$, элементы которых не удовлетворяют требованию леммы

$$C_1 := \Big\{c \in A : \exists\delta > 0 \ \big(W_1(c, \delta) \cap A = \{c\}\big) \Big\},$$

$$C_2 := \Big\{c \in A : \exists\delta > 0 \ \big(W_2(c, \delta) \cap A = \{c\}\big) \Big\}.$$

Покажем, что оба эти множества не более чем счётны.

Для каждого $i \in \{1,2\}$ выполняется $C_i = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_{i,n}$, где

$$C_{i,n} := \big\{c \in A : W_i(c,1/n) \cap A = \{c\}\ \big\},$$

поэтому достаточно показать, что каждое из множеств $C_{i,n}$ не более чем счётно. Для этого достаточно показать, что не более чем счётно семейство $\big\{B\big(c, \frac{1}{2n}\big) : c \in C_{i,n}\big\}$ евклидовых окрестностей радиуса $\frac{1}{2n}$ с центрами в точках из $C_{i,n}$. Мы покажем, что это семейство дизъюнктно, а значит, в силу счётности числа Суслина евклидовой плоскости, оно не более чем счётно.

Предположим, что это не так и нашлись две различные точки $c = \langle c_1, c_2\rangle$ и $d = \langle d_1, d_2\rangle$ из $C_{i,n}$ такие, что $B\big(c, \frac{1}{2n}\big) \cap B\big(d, \frac{1}{2n}\big) \neq \varnothing$. Это означает, что $c \in B(d, 1/n)$ и $d \in B(c, 1/n)$. Рассмотрим два случая: $c_i < d_i$ и $d_i \leqslant c_i$. В первом случае выполняется

$$c \in \{\langle x_1, x_2\rangle \in \mathbf{S}^2 : x_i < d_i\} \cap B(d, 1/n) \subseteq W_i(d, 1/n),$$

поэтому $c \in W_i(d, 1/n) \cap A$, а так как $d \in C_{i,n}$, то $W_i(d, 1/n) \cap A = \{d\}$ — это противоречит тому, что точки c и d различны. Во втором случае выполняется

$$d \in \{\langle x_1, x_2\rangle \in \mathbf{S}^2 : x_i \leqslant c_i\} \cap B(c, 1/n) \subseteq W_i(c, 1/n),$$

и противоречие получается аналогично.

Так как множество A несчётно, то множество $A \setminus (C_1 \cup C_2)$ не пусто, и нам осталось показать, что произвольная точка из последнего множества удовлетворяет требованиям леммы. Пусть $a = \langle a_1, a_2\rangle \in A \setminus (C_1 \cup C_2)$, $\varepsilon > 0$ и $x = \langle x_1, x_2\rangle \in B[a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. Так как $x \neq a$, то найдётся $i \in \{1, 2\}$ такое, что $x_i \neq a_i$. Справедливо

$$a_i + \delta = x_i < a_i + \varepsilon \quad \text{и} \quad a_{3-i} \leqslant x_{3-i} < a_{3-i} + \varepsilon, \tag{14}$$

где $\delta := x_i - a_i$ и $0 < \delta < \varepsilon$. Так как $a \notin C_{3-i}$, то $W_{3-i}(a, \delta) \cap A \neq \{a\}$, то есть найдётся точка $b = \langle b_1, b_2\rangle \in (W_{3-i}(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$. По построению множества $W_{3-i}(a, \delta)$ выполняется

$$a_i - \delta \leqslant b_i \leqslant a_i + \delta \quad \text{и} \quad a_{3-i} - \delta \leqslant b_{3-i} \leqslant a_{3-i}. \tag{15}$$

Из (14) и (15), а также из определения δ следуют неравенства

$$b_i \leqslant a_i + \delta = x_i < a_i + \varepsilon < a_i - \delta + \varepsilon + \varepsilon \leqslant b_i + 2\varepsilon$$

и

$$b_{3-i} \leqslant a_{3-i} \leqslant x_{3-i} < a_{3-i} + \varepsilon < a_{3-i} - \delta + \varepsilon + \varepsilon \leqslant b_{3-i} + 2\varepsilon,$$

то есть выполняется $x \in B[b, 2\varepsilon)$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *При любом натуральном $n \geqslant 3$ не существует непрерывного факторного отображения $\mathbf{S}^2$ на $\mathbf{S}^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что нашлись $n \geqslant 3$ непрерывное факторное отображение $f : \mathbf{S}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{S}^n$. Пусть l — прямая в $\mathbf{S}^n$, проходящая через точки $\langle 1, 0, \ldots, 0\rangle \in \mathbf{S}^n$ и $\langle 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle \in \mathbf{S}^n$, то есть

$$l = \{\langle a_1, a_2, 0, \ldots, 0\rangle \in \mathbf{S}^n : a_1 + a_2 = 1\}.$$

Для каждой точки $a = \langle a_1, a_2, 0, \ldots, 0\rangle \in l$ рассмотрим последовательность точек из $\mathbf{S}^n \setminus \{a\}$

$$(y^a_m)_{m\in\mathbb{N}} := (\langle a_1, a_2, 1/m, 0, \ldots, 0\rangle)_{m\in\mathbb{N}}.$$

Так как конечные степени прямой Зоргенфрея обладают счётным характером, в частности, это секвенциальные пространства, то по лемме 3, примененной к точке a и сходящейся к ней последовательности $(y^a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ из $\mathbf{S}^n\setminus\{a\}$, найдутся подпоследовательность $(y^a_{m^a_k})_{k\in\mathbb{N}}$ и точки $x^a_k\in f^{-1}(y^a_{m^a_k})$ такие, что последовательность $(x^a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке $x^a\in f^{-1}(a)$.

Обозначим $A:=\{x^a:a\in l\}$ и заметим, что $f(A)=l$. Рассмотрим множества

$$A_n:=\bigl\{x\in A: f\bigl(B[x,1/n)\bigr)\subseteq B[f(x),1)\bigr\}.$$

В силу непрерывности отображения f выполняется $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n=A$, поэтому для некоторого $n_0\in\mathbb{N}$ множество $A_{n_0}\subseteq\mathbf{S}^2$ несчётно. По лемме 4 найдётся точка $x\in A_{n_0}$, обладающая следующий свойством: для любых $\varepsilon>0$ и $z\in B[x,\varepsilon)\setminus\{x\}$ существует точка $b_{\varepsilon,z}\in A_{n_0}\setminus\{x\}$ такая, что $z\in B[b_{\varepsilon,z},2\varepsilon)$.

Так как $x\in A$, то $x=x^c$ для некоторой точки $c\in l$. Последовательность $(x^c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к точке x^c, поэтому найдётся номер $i\in\mathbb{N}$ такой, что $x^c_i\in B[x^c,1/(2n_o))$. Так как

$$x^c_i\in f^{-1}(y^c_{m^c_i})\subseteq f^{-1}(\mathbf{S}^n\setminus\{c\})\quad\text{и}\quad x^c\in f^{-1}(c),$$

то $x^c_i\neq x^c$, поэтому $x^c_i\in B[x^c,1/(2n_o))\setminus\{x^c\}$. В силу выбора точки $x=x^c$, для $\varepsilon:=1/(2n_o)>0$ и $z:=x^c_i\in B[x,\varepsilon)\setminus\{x\}$ найдётся точка $b=b_{\varepsilon,z}\in A_{n_0}\setminus\{x\}$, для которой выполняется $z\in B[b,2\varepsilon)$, то есть $x^c_i\in B[b,1/n_0)$. Поскольку $b\in A_{n_0}$, то $f\bigl(B[b,1/n_0)\bigr)\subseteq B[f(b),1)$, поэтому $f(x^c_i)\in B[f(b),1)$, то есть $y^c_{m^c_i}\in B[f(b),1)$.

Так как $b\in A$, то $b=x^d$ для некоторой точки $d\in l$, и $f(b)=f(x^d)=d$. Кроме того, $b\in A_{n_0}\setminus\{x\}=A_{n_0}\setminus\{x^c\}$, поэтому $x^d\neq x^c$, а значит, $d\neq c$. Таким образом мы получили, что $y^c_{m^c_i}\in B[d,1)$ и при этом $d\neq c$.

Точки d и c лежат на прямой l, поэтому $d=\langle d_1,d_2,0,\ldots,0\rangle$ и $c=\langle c_1,c_2,0,\ldots,0\rangle$. По построению последовательности $(y^c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ выполняется

$$y^c_{m^c_i}=\langle c_1,c_2,1/m^c_i,0,\ldots,0\rangle,$$

по определению,

$$B[d,1)=[d_1,d_1+1)\times[d_2,d_2+1)\times[0,1)\times\ldots\times[0,1)\subseteq\mathbf{S}^n,$$

таким образом

$$\langle c_1,c_2,1/m^c_i,0,\ldots,0\rangle\in[d_1,d_1+1)\times[d_2,d_2+1)\times[0,1)\times\ldots\times[0,1).$$

Из этого, в частности, следует, что $c_1\geqslant d_1$ и $c_2\geqslant d_2$. В действительности выполняется $c_1=d_1$ и $c_2=d_2$ — если бы это было не так, то имело бы место неравенство $c_1+c_2>d_1+d_2$, но по построению прямой l справедливо $c_1+c_2=1=d_1+d_2$. Поскольку $d=\langle d_1,d_2,0,\ldots,0\rangle$ и $c=\langle c_1,c_2,0,\ldots,0\rangle$, то в итоге мы получили противоречие с тем, что $d\neq c$. □

Вопрос 2. *Существует ли непрерывное факторное (открытое, замкнутое) отображение* $\mathbf{S}^3$ *на* $\mathbf{S}^n$ *при* $n\geqslant 4$*?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
2. Burke D. K., Lutzer D. J. On powers of certain lines // Topology and its applications. 1987. Vol. 26. P. 251–261.
3. Patrakeev M. A. Continuous bijections of finite powers of the Sorgenfrey line // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S18–S25.
4. Burke D. K., Moore J. T. Subspaces of the Sorgenfrey line // Topology and its applications. 1998. Vol. 90. P. 57–68.
5. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 423 с.

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

Поступила в редакцию 07.07.11

M. A. Patrakeev

Continuous maps between finite powers of Sorgenfrey line

The Sorgenfrey line is the real line with topology whose base consists of all left half-open intervals. It is shown that for integers $m > 1$ there is no continuous closed map of m th power of the Sorgenfrey line onto Sorgenfrey line, and that for integers $n > 2$ there is no continuous quotient map of the square of the Sorgenfrey line onto the n th power of the Sorgenfrey line.

Keywords: Sorgenfrey line, finite powers of Sorgenfrey line, continuous map, closed map, quotient map.

Mathematical Subject Classifications: 54G99, 54C05

Патракеев Михаил Александрович, к. ф.-м. н., с.н.с., отдел алгебры и топологии, Института математики и механики Уральского отделения РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: patrakeev@mail.ru

Patrakeev Mikhail Aleksandrovich, candidate of physics and mathematics, senior researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.