МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

УДК 517.2, 517.5

© *В. Я. Дерр*

ОБ АДЕКВАТНОМ ОПИСАНИИ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Предлагается описание сопряженного оператора к оператору, соответствующему линейной многоточечной краевой задаче для квазидифференциального уравнения, обладающее свойствами: исходный и сопряженный к нему оператор действуют из одного и того же рефлексивного банахова пространства в сопряженное банахово пространство; сопряженный оператор также соответствует некоторой линейной многоточечной краевой задаче для квазидифференциального уравнения.

Ключевые слова: формула Грина, формула краевых форм, сопряженный оператор, сопряженная краевая задача.

Введение

Известна большая роль сопряженного оператора в теории уравнений в банаховых пространствах, при исследовании спектра линейного оператора, а также во многих других вопросах теории линейных операторов (см., напр., [1]–[7]). Эта роль обусловлена связью между свойствами данного и сопряженного к нему оператора. Часто описание сопряженного оператора много говорит о свойствах данного (см. ниже). При этом важно, чтобы данный линейный оператор и его сопряженный имели, если не одинаковое, то хотя бы, по возможности, близкое описание. Этому условию достаточно легко следовать, если речь идет о линейных интегральных операторах. В этом случае всё различие между этими описаниями может состоять в том, что если данный оператор A действует из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, то сопряженный A^* — из $\mathcal{Y}^*$ в $\mathcal{X}^*$ (знаком * помечены соответствующие сопряженные пространства). Одинаковое действие операторов A и A^* можно обеспечить, если взять в качестве $\mathcal{X}$ рефлексивное банахово пространство, а в качестве $\mathcal{Y}$ — его сопряженное: $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ (в частности, можно взять в качестве $\mathcal{X}$ гильбертово пространство).

Иное дело, когда речь идет о дифференциальных операторах, в частности, об операторах, соответствующих краевым задачам. Здесь указанный выше подбор пространств не является достаточным условием схожести описаний операторов A и A^*. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное выражение n-го порядка

$$Lx \doteq \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} x^{(k)} \tag{0.1}$$

в предположении, что

$$p_{n-k} \in C^{(k)}[a,b], \quad k = 0,1,\ldots,n, \quad p_0(t) > 0, \quad t \in [a,b]. \tag{0.2}$$

Выражение (0.1) определяет линейный оператор $\mathbf{L}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \subset \mathbb{L}_p[a,b]$ $(1 < p < +\infty)$ — множеством n раз непрерывно дифференцируемых функций, и множеством непрерывных функций из $\mathbb{L}_q[a,b]$ $\left(q \doteq \dfrac{p}{p-1}\right)$ в качестве множества значений $\mathcal{R}(\mathbf{L}) \subset \mathbb{L}_q[a,b]$ ($\mathbf{L} : \mathbb{L}_p[a,b] \to \mathbb{L}_q[a,b]$; так как $\mathbb{L}_p[a,b]$ — рефлексивное банахово пространство, то имеем как раз оговоренное выше действие оператора $\mathbf{L}$). Пусть

$$L^+ y \doteq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \bigl(p_{n-k} y\bigr)^{(k)} \tag{0.3}$$

— формально сопряженное в смысле Лангранжа выражение (см. [4, с. 226], [5, с. 310], [6, с. 19], [8, с. 206]; см. также [9, с. 70]). При выполнении условий гладкости (0.2) выражение (0.3) также является обыкновенным дифференциальным и определяет линейный оператор $\mathbf{L}^+ : \mathbb{L}_p[a,b] \to \mathbb{L}_q[a,b]$, причем $\mathcal{D}(\mathbf{L}^+) = \mathcal{D}(\mathbf{L})$, $\mathcal{R}(\mathbf{L}^+) = \mathcal{R}(\mathbf{L})$.

Далее, обозначим через $\mathbf{L_l}$ сужение оператора $\mathbf{L}$ на множество

$$\mathcal{D}\big(\mathbf{L_l}\big) \doteq \Big\{x \in \mathcal{D}(\mathbf{L}) : l_i x \doteq \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_{ik} x^{k-1}(a) + \beta_{ik} x^{k-1}(b)\Big) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\Big\} \quad (1 \leqslant m < 2n).$$

Так как оператор $\mathbf{L_l}$ плотно определен в $\mathbb{L}_p[a,b]$, то существует сопряженный оператор $(\mathbf{L_l})^*$. В процитированных выше книгах построены линейные формы

$$l_i^+ x \doteq \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_{ik}^+ x^{k-1}(a) + \beta_{ik}^+ x^{k-1}(b)\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, 2n - m$$

такие, что

$$(\mathbf{L_l})^* = \mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}, \quad (\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+})^* = \mathbf{L_l}, \tag{0.4}$$

где $\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}$ — сужение оператора $\mathbf{L}^+$ на множество

$$\mathcal{D}\big(\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}\big) \doteq \{y \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^+) : l_i^+ y = 0, \ i = 1, 2, \ldots, 2n - m\}$$

(для $m = n$ см. более подробно [9, с. 76]).

Другими словами, оператор, сопряженный к оператору, описывающему двухточечную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения,

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \qquad l_i x = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (f \in C[a,b]) \tag{0.5}$$

является оператором точно такого же типа, описывающим *сопряженную краевую задачу*

$$(L^+ y)(t) = g(t), \quad t \in [a,b], \qquad l_i^+ y = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n - m \qquad (g \in C[a,b]). \tag{0.6}$$

Именно эту ситуацию мы имеем в виду, когда говорим об *адекватном описании* сопряженного оператора.

Если условия гладкости (0.2) не выполняются, то выражение (0.3) уже не будет *обыкновенным дифференциальным* (оно становится *квазидифференциальным*). Сопряженным оператором также будет квазидифференциальный оператор.

Можно, конечно, поступить иначе. Записать скалярное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка $(Lx)(t) = f(t)$ в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{0.7}$$

где

$$\mathbf{x} = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})^\top, \qquad \mathbf{f} = (0, \ldots, 0, f/p_0)^\top,$$
$$A = (a_{ik})_{i,k=1}^n, \quad a_{i,i+1} = -1, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad a_{n,k} = -p_{n-k+1}/p_0, \quad k = 1, \ldots, n;$$

остальные элементы матрицы A равны 0 ($\top$ — знак транспонирования). Формально сопряженной в смысле Лагранжа системой для системы (0.7) является система

$$\mathbf{y}' = -A^\top(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t),$$

которая **не соответствует** никакому скалярному *обыкновенному дифференциальному* уравнению; ее можно записать только в виде скалярного квазидифференциального уравнения n-го порядка. Таким образом, и в этом случае мы не получим адекватного описания сопряженного оператора.

Если мы будем рассматривать многоточечные краевые условия (то есть краевые условия, отличные от краевых условий в (0.5), сосредоточенные более, чем в двух точках), то убедимся в том, что сопряженный оператор не будет описываться никакой классической многоточечной краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения.

Остановимся очень кратко на подходах других авторов к построению сопряженных краевых задач (то есть к описанию сопряженного оператора) к краевым задачам с многоточечными краевыми условиями. В работах [10]–[15] сопряженной краевой задачей оказывается интегро-дифференциальная краевая задача. В статье [17] (см. также [16, 19]) исходная многоточечная задача «погружается» в краевую задачу общего вида, для которой строится сопряженный оператор. В работах [20]–[26] в качестве сопряженной краевой задачи к исходной многоточечной оказывается некоторая обобщенная краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального или квазидифференциального уравнения, при этом в большинстве из указанных работ сопряженные краевые условия зависят от некоторой неизвестной функции.

В данной работе сразу в качестве исходной рассматривается квазидифференциальная многоточечная краевая задача обобщенного типа. Сопряженной к ней оказывается краевая задача такого же типа. Здесь мы развиваем идеи нашей работы [18].

§ 1. Квазидифференциальные выражения и операторы

1.1°. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathfrak{A}_n(I)$ — множество нижних треугольных матриц $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^n$, $p_{ik} : I \to \mathbb{R}$ таких, что p_{00} и p_{nn} измеримы, почти всюду (п.в.) конечны и п.в. отличны от нуля, а $1/p_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, n{-}1)$, p_{ik}/p_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, i{-}1)$ локально суммируемы в I. Если $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$, то будем говорить также, что матрица $\mathcal{P}$ или ее элементы удовлетворяют условиям $\mathfrak{A}_n(I)$.

Все соотношения между измеримыми функциями будем предполагать выполняющимися п.в.; если произведение $f(\cdot) \cdot g(\cdot)$ $(f, g : I \to \mathbb{R})$ непрерывно в окрестности $t_0 \in I$, а в t_0 один из сомножителей (или оба) не определен, но существует предел $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)g(t) = C$, то полагаем $(f \cdot g)(t_0) = C$ и считаем функцию $(fg)(\cdot)$ непрерывной в точке t_0.

Пусть $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$. Определим квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ функции $x : I \to \mathbb{R}$ равенствами

$$
\begin{gathered}
{}^{0}x \doteq {}^{0}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x, \\
{}^{k}x \doteq {}^{k}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{kk}\frac{d}{dt}\big({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\big) + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{kk}\big({}^{\nu}_{\mathcal{P}}x\big) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Квазидифференциальным выражением (КдВ) n-го порядка называется выражение

$$(Lx)(t) \doteq ({}^{n}_{\mathcal{P}}x)(t), \quad t \in I. \tag{1.2}$$

Матрица $\mathcal{P}$ называется порождающей для выражения (1.2). Наряду с выражением (1.2) рассмотрим также квазидифференциальное уравнение (КдУ)

$$(Lx)(t) = f(t), \qquad t \in I \quad (f : I \to \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Решением уравнения (1.3) называется всякая функция $x : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и п.в. в I удовлетворяющая уравнению (1.3).

Теорема 1. *Если $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$ и функция $f(\cdot)/p_{nn}(\cdot)$ локально суммируема в I, то существует единственное решение уравнения* (1.3), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$({}^{k}_{\mathcal{P}}x)(a) = \gamma_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad a \in I, \quad \gamma_k \in \mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача Коши (1.3), (1.4) эквивалентна задаче

$$\dot z = A(t)z + \widehat f(t), \quad z(a) = \gamma, \tag{1.5}$$

где $z = {}_{\mathcal P}x \doteq \big({}^{0}_{\mathcal P}x, \ldots, {}^{n-1}_{\mathcal P}x\big)^{\top}$, $\widehat f = (0, \ldots, 0, f/p_{nn})^{\top}$,

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{p_{10}}{p_{11}} & \dfrac{1}{p_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{p_{20}}{p_{22}} & -\dfrac{p_{21}}{p_{22}} & \dfrac{1}{p_{22}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{p_{n-1,0}}{p_{n-1,n-1}} & -\dfrac{p_{n-1,1}}{p_{n-1,n-1}} & -\dfrac{p_{n-1,2}}{p_{n-1,n-1}} & \ldots & \dfrac{1}{p_{n-1,n-1}} \\ -\dfrac{p_{n0}}{p_{nn}} & -\dfrac{p_{n1}}{p_{nn}} & -\dfrac{p_{n2}}{p_{nn}} & \ldots & -\dfrac{p_{n-1,n}}{p_{nn}} \end{pmatrix},$$

$\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})^{\top}$. При условиях теоремы матрица A и вектор $\widehat f$ удовлетворяют условиям Каратеодори. Следовательно, задача (1.5), а с ней и задача (1.2), (1.4) имеет единственное решение, компоненты которого — квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal P}x$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — локально абсолютно непрерывны. $\square$

Обыкновенное дифференциальное выражение (0.1), его формально сопряженное в смысле Лагранжа выражение (0.3), формально самосопряженное в смысле Лагранжа обыкновенное дифференциальное выражение, рассмотренное в [6, с. 19], различные обыкновенные дифференциальные и квазидифференциальные системы, рассмотренные в [27]–[30] являются частными случаями квазидифференциального выражения (1.2) (подробнее см. [9, 31]). По-видимому, одной из первых работ, в которых систематически изучаются КдУ вида (1.3), является работа Д. Шина (Шин Ден Юна) [32].

1.2°. Пусть $\mathcal P \in \mathfrak A_n(I)$. Обозначим через $\mathfrak X_{\mathcal P}$ множество функций $x : I \to \mathbb R$, обладающих непрерывными кусочно абсолютно непрерывными на I квазипроизводными ${}^{k}_{\mathcal P}x$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, а функция ${}^{n}_{\mathcal P}x/p_{nn}$ локально суммируема. В силу теоремы 1 линейное пространство $\mathfrak X_{\mathcal P}$ изоморфно $\mathbb R \times \mathrm{Ł}_{loc}(I)$, где $\mathrm{Ł}_{loc}$ — линейное пространство локально суммируемых на I функций. Таким образом, для каждой $\mathcal P \in \mathfrak A_n(I)$ пространство $\mathfrak X_{\mathcal P}$ содержит достаточно большой запас функций.

Нижеследующий пример показывает, что сами элементы $\mathfrak X_{\mathcal P}$ могут быть очень «плохими» функциями, лишь бы их квазипроизводные обладали нужной гладкостью.

Пусть $n = 2$, $I = \mathbb R$, $a \in I$, δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — рационально независимые иррациональные числа, $\mathbb Q = \{r_1, r_2, \ldots\}$ — множество рациональных чисел, $\alpha(t) \doteq \sum\limits_{r_k < t} (1/2^k)$ (здесь сумма распространяется на те k, для которых $r_k < t$), $p_{00}(t) \doteq 1/\alpha(t)$, $p_{11}(t) \doteq 1/\alpha(t-\delta_1)$, $p_{10}(t) \doteq \alpha(t-\delta_2)$, $p_{22}(t) \doteq 1/\alpha(t-\delta_3)$, $p_{21}(t) \doteq \alpha(t-\delta_1)\alpha(t-\delta_2)/\alpha(t-\delta_3)$, $p_{20}(t) \equiv 0$. Очевидно, $\mathcal P \in \mathfrak A_2(I)$. Здесь элементы $\mathfrak X_{\mathcal P}$ разрывны во всех рациональных точках, квазипроизводные ${}^{0}_{\mathcal P}x$ и ${}^{1}_{\mathcal P}x$ абсолютно непрерывны; функции $({}^{0}_{\mathcal P}x)'$ разрывны в точках множества $(\mathbb Q + \delta_1) \cup (\mathbb Q + \delta_2)$. Решение задачи (1.2),(1.4) с данной порождающей матрицей $\mathcal P$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ и

$$f(t) = \frac{\alpha(t-\delta_4)}{\alpha(t-\delta_3)} \int_a^t \frac{\alpha(s-\delta_1)}{\alpha(s-\delta_2)} ds$$

имеет вид

$$x(t) = \alpha(t) \exp\Big(-\int_a^t \alpha(\tau-\delta_1)\alpha(\tau-\delta_2)d\tau\Big) \int_a^t f(s)\alpha(s-\delta_1)ds.$$

Здесь функция $({}^{1}_{\mathcal P}x)'$ разрывна в точках множества $(\mathbb Q + \delta_3) \cup (\mathbb Q + \delta_4)$.

Из теоремы 1 следует, что однородное уравнение

$$Lx = 0 \quad (t \in I) \tag{1.6}$$

имеет фундаментальную систему решений

$$\{x_k\}_1^n, \quad x_k \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

для которой определитель (аналог вронскиана)

$$W_{\mathcal{P}} \doteq \det({}^{i-1}_{\mathcal{P}}x_k)_1^n$$

не обращается в нуль ни в одной точке из I. Частное решение неоднородного уравнения (1.2) может быть найдено квазидифференциальным аналогом метода вариации произвольных постоянных, который приводит к представлению

$$x_*(t) = \int_a^t C_{\mathcal{P}}(t,\, s)\,(f(s)/p_{nn}(s))\,ds \qquad (t \in I), \tag{1.7}$$

где x_* — решение уравнения (1.2), удовлетворяющее начальным условиям (1.4) при $\gamma_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$,

$$C_{\mathcal{P}}(t,\, s) = \begin{vmatrix} ({}^0_{\mathcal{P}}x_1)(s) & \ldots & ({}^0_{\mathcal{P}}x_n)(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ({}^{n-2}_{\mathcal{P}}x_1)(s) & \ldots & ({}^{n-2}_{\mathcal{P}}x_n)(s) \\ x_1(t) & \ldots & x_n(t) \end{vmatrix} \Big/ W_{\mathcal{P}}(s)$$

— функция Коши уравнения (1.6). Непосредственной проверкой с учетом определений (1.1) убеждаемся в том, что $C_{\mathcal{P}}(\cdot,\, s)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.6) при всех $s \in I$. Кроме того, легко видеть, что

$$({}^k_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}})(t,\, s)\Big|_{t=s} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \qquad ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}})(t,\, s)\big|_{t=s} = 1. \tag{1.8}$$

Из теоремы 1 следует, что, как и в случае ОДУ, уравнение (1.6) и начальные условия (1.8) однозначно определяют функцию Коши.

Общее решение уравнения (1.2) дается обычной формулой

$$x = \sum_{k=1}^n c_k x_k + x_*,$$

где c_i — произвольные постоянные, а x_* определяется формулой Коши (1.7).

Так как $x_k \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то определитель $W_{\mathcal{P}}$ локально абсолютно непрерывен. Если его продифференцировать и учесть определения (1.1), то окажется, что он удовлетворяет уравнению

$$dW_{\mathcal{P}}/dt = -\sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1,\,k}(t)/p_{k+1,\,k+1}(t))\, W_{\mathcal{P}},$$

из которого получаем следующий аналог формулы Остроградского–Лиувилля:

$$W_{\mathcal{P}}(t) = W_{\mathcal{P}}(a)\exp\int_a^t \left(-\sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1,\,k}(\tau)/p_{k+1,\,k+1}(\tau))\right) d\tau.$$

Если зафиксировать первые n строк матрицы $\mathcal{P}$, то уравнение (1.6) однозначно восстанавливается по фундаментальной системе его решений по формуле

$$Lx = \frac{p_{nn}}{W_{\mathcal{P}}} \begin{vmatrix} {}^0_{\mathcal{P}}x_1 & \ldots & {}^0_{\mathcal{P}}x_n & {}^0_{\mathcal{P}}x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_1 & \ldots & {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_n & {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x \\ ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_1)' & \ldots & ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_n)' & ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}x)' \end{vmatrix} = 0.$$

1.3°. Пусть $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}(I)$. Положим $\mathcal{R} \doteq \mathcal{P}^+ = (r_{ik})_0^n$,

$$r_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{p_{n-k,\,n-i}\, p_{n-i,\,n-i}}{p_{n-k,\,n-k}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots, i); \tag{1.9}$$

$\mathcal{R}$ — нижняя треугольная матрица. Очевидно, что $\mathcal{R}^+ = (\mathcal{P}^+)^+ = \mathcal{P}$ и $\mathcal{R} \in \mathfrak{A}_n(I)$. Поэтому можно говорить о квазипроизводных ${}^{k}_{\mathcal{R}}y$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и рассматривать выражение (уравнение)

$$(L^+y)(t) \doteq (-1)^n ({}^{n}_{\mathcal{R}}y)(t) \qquad \Big((L^+y)(t) = g(t)\Big), \tag{1.10}$$

которое называется *формально сопряженным* (сопряженным в смысле Лагранжа) выражению (1.2) (уравнению (1.3)), так как имеет место тождество Лагранжа

$$yLx - xL^+y = d[x,\, y]/dt, \tag{1.11}$$

$$[x,\, y] \doteq \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\, ({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x)\, ({}^{n-k}_{\mathcal{R}}y) = ({}_{\mathcal{P}}x)^T\, H({}_{\mathcal{R}}y), \tag{1.12}$$

$H = ((-1)^{i-1}\, \delta_{i,\, n-k+1})_1^n$. Для доказательства тождества (1.11) достаточно продифференцировать билинейную форму (1.12) и учесть определения (1.1) и (1.9). Проинтегрировав тождество (1.11), получим следующую формулу Грина:

$$\int_a^b (y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t))\, dt = (\beta_{\mathcal{P}}x)^T \mathfrak{N}(\beta_{\mathcal{R}}y), \tag{1.13}$$

где $\beta_{\mathcal{P}}x = (({}_{\mathcal{P}}x)^T(a),\, ({}_{\mathcal{P}}x)^T(b))^T$, $\mathfrak{N} = \mathrm{diag}(-H,\, H)$ $([a,\, b] \subset I,\ x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}})$.

Как и в случае ОДУ, можно доказать (см. [31, с. 13]), что если $\{u_k\}_{k=1}^n$ — ФСР однородного уравнения (1.6), то функциии

$$v_i = \frac{1}{p_{nn}} \cdot \frac{1}{W_{\mathcal{P}}} \cdot \frac{\partial W_{\mathcal{P}}}{\partial({}^{n-1}_{\mathcal{P}}u_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

образуют ФСР однородного сопряженного уравнения

$$L^+y = 0, \tag{1.14}$$

причем (ср. [8, 32])

$${}^{k}_{\mathcal{R}}v_i = \frac{(-1)^k}{W_{\mathcal{P}}} \cdot \frac{\partial W_{\mathcal{P}}}{\partial({}^{n-k-1}_{\mathcal{P}}u_i)} \qquad (t \in I, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

1.4°. Скажем, что $\mathcal{P} \in \mathfrak{B}_n(I)$, если $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$ и выполняются неравенства $p_{ii}(t) > 0$ п.в на I, $i = 0, 1, \ldots, n$. В дальнейшем будем предполагать, что $\mathcal{P} \in \mathfrak{B}_n(I)$; тогда из (1.9) следует, что и $\mathcal{R} = \mathcal{P}^+ \in \mathfrak{B}_n(I)$. Нам будет удобно «погружать» множества $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$ в пространство $\mathbb{L}_q[a, b]$ при некотором q, $1 < q < +\infty$, $J \doteq [a, b] \subset I$. Это означает, что мы считаем $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ множеством решений всевозможных задач Коши (1.3), (1.4) при всевозможных $f \in \mathbb{L}_p[a, b]$, $p \doteq \frac{q}{q-1}$. Аналогичные задачи рассматриваются и для получения $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$.

Линейные КдВ Lx (см. (1.2)) и L^+y (см. (1.10))определяют некоторые линейные операторы, действующие из $\mathbb{L}_q[a, b]$ в $\mathbb{L}_p[a, b]$. А именно,

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{D}(\mathbf{L}^+) = \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}, \quad \mathbf{L}x = Lx, \quad \mathbf{L}^+y = L^+y \quad (x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}).$$

Следующий пример показывает, что не обязательно $q = p = 2$. Пусть $n = 2$, $[a, b] = [0, 1]$, $\mathcal{P} \doteq \mathrm{diag}\left(\sqrt[3]{t},\ \sqrt[3]{t},\ \sqrt[3]{t}\right)$ (здесь $\mathcal{R} = \mathcal{P}$),

$$x(t) = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}, \quad x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{L}_q[0, 1] \subset \mathbb{L}_2[0, 1] \quad (2 < q < 3,\ 1 < p < 2).$$

При этом $(Lx)(t) = \frac{5}{36\sqrt{t}}$, $\mathbf{L}x \notin \mathbb{L}_2[0,1]$.

В связи со сказанным «скалярное» произведение

$$\langle x, y\rangle_p \doteq \int_a^b x(t)y(t)\,dt \qquad (\langle y, x\rangle_q = \langle x, y\rangle_p, \quad x \in \mathbb{L}_p[a,b], \quad y \in \mathbb{L}_q[a,b])$$

оказывается «внешним» (при $p = q = 2$ это произведение оказывается обычным «внутренним» произведением). С помощью «внешнего» произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ формулу Грина (1.13) можно записать в виде

$$\langle y, \mathbf{L}x\rangle_q - \langle x, \mathbf{L}^+ y\rangle_p = (\beta_{\mathcal{P}} x)^T \mathfrak{N}(\beta_{\mathcal{R}} y) \quad (x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}). \tag{1.15}$$

А если обозначить $\mathbf{L}_\beta$ $\left(\mathbf{L}^+{}_\beta\right)$ — сужение оператора $\mathbf{L}$ $\left(\mathbf{L}^+\right)$ на множество

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta} \doteq \{x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ \beta_{\mathcal{P}} x = 0\} \qquad \Big(\mathfrak{X}_{\mathcal{R},\beta} \doteq \{y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}},\ \beta_{\mathcal{R}} y = 0\}\Big),$$

то в виде

$$\langle \mathbf{L}_\beta\, x,\ y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^+ y\rangle_q \qquad \Big(\langle \mathbf{L}x,\ y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^+{}_\beta\, y\rangle_q\Big), \tag{1.16}$$

$x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$, $y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$ $\quad \big(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ \ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\beta}\big)$.

§ 2. Сопряженный оператор

2.1°. Пусть $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ — соответственно образ и ядро оператора $\mathbf{A} : \mathbb{L}_q[a,b] \to \mathbb{L}_p[a,b]$, ${}^\perp B \subset \mathbb{L}_p[a,b]$ — «ортогональное дополнение» множества $B \subset \mathbb{L}_q[a,b]$:

$${}^\perp B \doteq \{x \in \mathbb{L}_p[a,b] : \langle x, y\rangle_p = 0,\ y \in B\}.$$

Лемма 1. $\mathcal{R}(\mathbf{L}_\beta) = {}^\perp\mathcal{N}(\mathbf{L}^+)$.

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно следующему: уравнение (1.3) имеет решение в $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$ тогда и только тогда, когда $\langle f, y\rangle_p = 0$ для всех $y \in \mathcal{N}(\mathbf{L}^+)$. Пусть x — решение уравнения (1.3) при условии ${}_{\mathcal{P}}x(a) = 0, \{y_k\}_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{N}(\mathbf{L}^+)$, $Y \doteq \left({}^{i-1}_{\mathcal{R}} y_k\right)_{i,k=1}^n$. Из формулы Грина (1.15) видим, что

$$\langle f, y_k\rangle_p = \langle Lx, y\rangle_p = {}_{\mathcal{P}}x(b) H\, {}_{\mathcal{R}}y(b).$$

Система равенств

$$\langle f, y_k\rangle_p = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

таким образом, эквивалентна системе ${}_{\mathcal{P}}x(b)HY(b) = 0$. Так как $\det HY(b) \neq 0$, то отсюда следует, что равенства (2.1) выполняются в том и только том случае, если ${}_{\mathcal{P}}x(b) = 0$, то есть когда $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$. □

Следствие 1. *Образ* $\mathcal{R}(\mathbf{L}_\beta)$ *замкнут* (*в топологии* $\mathbb{L}_p[a,b]$).

Лемма 2. *Множество* $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$ *плотно в* $\mathbb{L}_q[a,b]$.

Доказательство. Так как функционал $\langle\cdot, x\rangle_p$ непрерывен, то достаточно доказать, что в $\mathbb{L}_p[a,b]$ нет отличного от нуля g такого, что $\langle g, x\rangle_p = 0$ для всех $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$. Пусть $g \in \mathbb{L}_p[a,b]$, $\langle g, x\rangle_p = 0$ для всех $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$, и y — произвольное решение сопряженного уравнения (1.10). Из формулы Грина (1.16) видим

$$0 = \langle g, x\rangle_p = \langle x, g\rangle_q = \langle x,\ L^+ y\rangle_q = \langle \mathbf{L}_\beta x, y\rangle_p.$$

Так как $\mathbf{L}_\beta x$ пробегает все множество $\mathcal{R}(\mathbf{L}_\beta)$, то отсюда в силу леммы 1 следует, что $y \in \mathcal{N}(\mathbf{L}^+)$, то есть $g = 0$. □

Следствие 2. *Операторы* $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_\beta$, $\mathbf{L}^+$, $\mathbf{L}^+_\beta$ *имеют плотные в* $\mathbb{L}_q[a,b]$ *области определения.*

Доказательство. Утверждения немедленно следуют из леммы 2 и включений $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{R},\beta}\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$. □

Лемма 3. *Для любых* $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ *существует функция* $y\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$, *удовлетворяющая условиям*

$$ {}_{\mathcal{R}}y(a)=\xi,\qquad {}_{\mathcal{R}}y(b)=\eta. \tag{2.2}$$

Доказательство. Построим функцию $u\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$, обладающую свойствами: ${}_{\mathcal{R}}u(a)=0$, ${}_{\mathcal{R}}u(b)=\eta$. Пусть $\Gamma\doteq\Big(\int_a^b x_i(t)({}^{0}_{\mathcal{P}}x_k)(t)\,dt\Big)^n_{i,k=1}$, где $\{x_i\}_{i=1}^n$ — произвольный базис в $\mathcal{N}(\mathbf{L})$; $X\doteq\big({}^{i-1}_{\mathcal{P}}x_k\big)^n_{i,k=1}$. Ввиду линейной независимости x_k $\det\Gamma\neq0$. Положим

$$c=(c_1,\dots,c_n)^\top\doteq-\Gamma^{-1}X(b)H\eta,\qquad g(t)\doteq\sum_{i=1}^n c_i\big({}^{0}_{\mathcal{P}}x_i\big)(t)$$

и определим решение уравнения (1.10) начальным условием ${}_{\mathcal{R}}u(a)=0$. Из определения g $\langle g,x_k\rangle_p=-({}_{\mathcal{P}}x_k)^\top(b)H\eta$, а из формулы Грина (1.15)

$$\langle g,x_k\rangle_p=\langle x_k,\,L^+u\rangle_q=-({}_{\mathcal{P}}x_k)^\top(b)H({}_{\mathcal{R}}u)(b)\quad(k=1,\dots,n).$$

Отсюда $X^\top(b)H\big(\eta-({}_{\mathcal{R}}u)(b)\big)=0$; так как $\det X^\top(b)H\neq0$, то $({}_{\mathcal{R}}u)(b)=\eta$.

Точно так же строится функция $v\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$, обладающая свойствами: ${}_{\mathcal{R}}v(a)=\xi$, ${}_{\mathcal{R}}u(b)=0$. Функция $y=u+v$ — требуемая. □

2.2°. Пусть $\mathbf{A}:\mathbb{L}_q[a,b]\to\mathbb{L}_p[a,b]$ — линейный оператор с плотной областью определения. Тогда сопряженный оператор $\mathbf{A}^*:\mathbb{L}_q[a,b]\to\mathbb{L}_p[a,b]$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}^*)\doteq\{y\in\mathbb{L}_q[a,b]:\exists z\in\mathbb{L}_p[a,b],\ \langle\mathbf{A}x,y\rangle_p=\langle x,z\rangle_q,\ \forall x\in\mathcal{D}(\mathbf{A})\},\quad \mathbf{A}^*y=z.$$

В силу плотности $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ элемент z определяется однозначно. Если окажется, что $\mathcal{D}(\mathbf{A}^*)$ плотна в $\mathbb{L}_q[a,b]$, то существует $(\mathbf{A}^*)^*=\mathbf{A}^{**}$, причем $\mathbf{A}\subset\mathbf{A}^{**}$. Кроме того, если $\mathbf{B}\subset\mathbf{A}$ и существует $\mathbf{A}^*$, то существует и $\mathbf{B}^*$ и $\mathbf{A}^*\subset\mathbf{B}^*$.

Теорема 2. $\quad\big(\mathbf{L}_\beta\big)^*=\mathbf{L}^+,\qquad\big(\mathbf{L}^+{}_\beta\big)^*=\mathbf{L},\qquad\mathbf{L}^*=\mathbf{L}^+{}_\beta,\qquad\big(\mathbf{L}^+\big)^*=\mathbf{L}_\beta.$

Доказательство. Из формулы Грина (1.16) видим, что $\mathbf{L}^+\subset\big(\mathbf{L}_\beta\big)^*$. Докажем обратное включение.

Пусть $g\in\mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}_\beta\big)^*\Big)$ $\big(\subset\mathbb{L}_q[a,b]\big)$. Положим $h\doteq\big(\mathbf{L}_\beta\big)^*g$ $\big(\in\mathbb{L}_p[a,b]\big)$, y — решение уравнения $L^+y=h$ $(y\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}})$. В силу (1.16)

$$\langle x,h\rangle_q=\langle x,\,L^+y\rangle_q=\langle L_\beta x,y\rangle_p\quad\text{и}\quad\langle x,h\rangle_q=\langle x,\,\big(L_\beta\big)^*g\rangle_q=\langle L_\beta x,g\rangle_p.$$

Отсюда $\langle L_\beta x,y-g\rangle_q=0$. По лемме 1 $y-g\in\mathcal{N}(\mathbf{L}^+)$. Так как $y\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$, то и $g\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$, то есть $\mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}_\beta\big)^*\Big)\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$. Значит, $\big(\mathbf{L}_\beta\big)^*=\mathbf{L}^+$. Поменяв ролями $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$, получим, что $\big(\mathbf{L}^+{}_\beta\big)^*=\mathbf{L}$.

Из доказанного следует, что $\big(\mathbf{L}^+\big)^*=\big(\mathbf{L}_\beta\big)^{**}$, поэтому $\mathbf{L}_\beta\subset\big(\mathbf{L}^+\big)^*$. Так как $\mathbf{L}^+{}_\beta\subset\mathbf{L}^+$, то $\big(\mathbf{L}^+\big)^*\subset\big(\mathbf{L}^+{}_\beta\big)^*=\mathbf{L}$. Пусть $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ — произвольны; определим y согласно лемме 3 так, чтобы выполнялись условия (2.2). Пусть $x\in\mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}^+\big)^*\Big)$ $\Big(\subset\mathcal{D}(\mathbf{L})\Big)$. Из определения сопряженного оператора

$$\langle\mathbf{L}x,y\rangle_p=\langle\big(\mathbf{L}^+\big)^*x,y\rangle_p=\langle x,\,\mathbf{L}^+)y\rangle_q,$$

а из формулы Грина (1.15)

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^+ y\rangle_q + \big(\beta_{\mathcal{P}} x\big)^\top \mathfrak{N} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Так как $\det \mathfrak{N} \neq 0$, то ввиду произвольности ξ и η $\beta_{\mathcal{P}} x = 0$, то есть $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta=\mathcal{D}(\mathbf{L}_\beta)}$ и $\big(\mathbf{L}^+\big)^* \subset \mathbf{L}_\beta$. Таким образом, $\big(\mathbf{L}^+\big)^* = \mathbf{L}_\beta$.

Точно так же доказывается, что $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^+{}_\beta$. □

§ 3. Двухточечные краевые условия

Пусть M_0, M_1 — заданные $m \times n$-матрицы $(1 \leqslant m < 2n)$; полагаем

$$\ell x \doteq M_0\big({}_{\mathcal{P}} x\big)(a) + M_1\big({}_{\mathcal{P}} x\big)(b) = \big(M_0\, M_1\big)\big(\beta_{\mathcal{P}} x\big), \quad \ell : \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}^m.$$

Выберем $(2n-m)\times n$-матрицы $\widehat{M_0}$ и $\widehat{M_1}$ так, чтобы ранг $2n\times 2n$-матрицы $M \doteq \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ \widehat{M_0} & \widehat{M_1} \end{pmatrix}$ был равен $2n$; обозначим $S_k = \big(\delta_{i,k-j+1}\big)_{i,j=1}^k$ (δ_{ij} — символ Кронекера) и положим

$$M^+ \doteq S_{2n} M^{-1} \mathfrak{N} \doteq \begin{pmatrix} M_0^+ & M_1^+ \\ \widehat{M_0^+} & \widehat{M_1^+} \end{pmatrix}$$

(разбиение на блоки матрицы M^+ такое же, как и у матрицы M);

$$\widetilde{\ell^+} y \doteq M^+(\beta_{\mathcal{R}} y), \quad \widetilde{\ell} x \doteq M(\beta_{\mathcal{P}} x), \quad \widehat{\ell} x \doteq \big(\widehat{M_0}\,\widehat{M_1}\big)\big(\beta_{\mathcal{P}} x\big), \quad \ell^+ y \doteq \big(M_0^+\, M_1^+\big)\big(\beta_{\mathcal{R}} y\big),$$
$$\widehat{\ell^+} y \doteq \big(\widehat{M_0^+}\,\widehat{M_1^+}\big)\big(\beta_{\mathcal{R}} y\big) \quad \big(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}\big).$$

В этих обозначениях формула Грина (1.15) перепишется в виде следующей *формулы краевых форм* (ср. [5, с. 312]):

$$\langle Lx, y\rangle_p - \langle x, L^+ y\rangle_q = (\ell x)^\top S_m \big(\widehat{\ell^+} y\big) + (\widehat{\ell} x)^\top S_{2n-m}\big(\ell^+ y\big) \quad \big(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}\big). \tag{3.1}$$

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ и $\{y_k\}_{k=1}^n$ — соответственно базисы в $\mathcal{N}(\mathbf{L})$ и $\mathcal{N}(\mathbf{L}^+)$, $\Lambda \doteq \ell\xi^\top$, $\Lambda^+ \doteq \ell^+\eta^\top$, $\xi = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $\eta = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, r $\big(r^+\big)$ — ранг матрицы Λ $\big(\Lambda^+\big)$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [6, с. 22] и формулы краевых форм (3.1) показывается, что $r - r^+ = m - n$.

Обозначим через $\mathbf{L}_\ell$ $\big(\mathbf{L}^+_{\ell^+}\big)$ — сужение оператора $\mathbf{L}$ $\big(\mathbf{L}^+\big)$ на множество

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell} \doteq \{x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} : \ell x = 0\} \qquad \Big(\mathfrak{X}_{\mathcal{R},\ell^+} \doteq \{y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}} : \ell^+ y = 0\}\Big).$$

Обозначения такого типа мы будем применять и ниже без дополнительных объяснений.

Так как $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{R},\beta} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell^+}$, то операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^+$ имеют плотные области определения и существуют сопряженные операторы $\big(\mathbf{L}_\ell\big)^*$ и $\big(\mathbf{L}^+_{\ell^+}\big)^*$. Кроме того, из теоремы 2 следует, что

$$\mathbf{L}^+{}_\beta \subset \big(\mathbf{L}_\ell\big)^* \subset \mathbf{L}^+, \qquad \mathbf{L}_\ell \subset \big(\mathbf{L}^+_{\ell^+}\big)^* \subset \mathbf{L}. \tag{3.2}$$

Лемма 4. *Для любого $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ существует $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ такой, что $\widetilde{\ell} x = \gamma$.*

Доказательство. По лемме 3 существует $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ такой, что $\beta_{\mathcal{P}} x = M^{-1}\gamma$. Так как $\widetilde{\ell} x = M\beta_{\mathcal{P}} x = \gamma$, то x — требуемый. □

Следствие 3. *Для любого $\delta \in \mathbb{R}^{2n-m}$ существует $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}$ такой, что $\widehat{\ell} x = \delta$.*

Лемма 5. $\mathcal{R}(\mathbf{L}_\ell) = {}^{\perp}\mathcal{N}(\mathbf{L}^+_{\ell+})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в лемме 1, надо доказать. что уравнение (1.3) тогда и только тогда имеет решение из $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}$, когда $\langle f, y\rangle_p = 0$ для любого $y \in \mathcal{N}(\mathbf{L}^+_{\ell+})$. Если $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}$ — решение уравнения (1.3), то из формулы (3.1) следует, что $\langle f, y\rangle_p = 0$ для любого $y \in \mathcal{N}(\mathbf{L}^+_{\ell+})$. Обратно, пусть $\langle f, y\rangle_p = 0$ для любого такого y. Предположим, что существует решение x уравнения (1.3) такое, что для некоторой компоненты $\ell_{\mathbf{i_0}}x \neq 0$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant m)$ Положим $\gamma_i = 0$ для всех $i \neq i_0$, $\gamma_{i_0} \neq 0$. По лемме 4 существует $y^o \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$ такой, что $\widetilde{\ell^+}y^o = S_{2n}\gamma$. Так как $y^o \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\ell^+}$, то согласно (3.1) $\langle f, y\rangle_p = \gamma_{i_0}\cdot \ell_{\mathbf{i_0}}x \neq 0$. Это противоречие с условием означает, что $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}$. □

Следствие 4. *Образ* $\mathcal{R}(\mathbf{L}_\ell)$ *замкнут* (*в топологии* $\mathbb{L}_p[a,b]$).

Теорема 3. $\quad (\mathbf{L}_\ell)^* = \mathbf{L}^+_{\ell+}, \qquad (\mathbf{L}^+_{\ell+})^* = \mathbf{L}_\ell.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы краевых форм (3.1) следует

$$\langle \mathbf{L}_\ell x, y\rangle_p = \langle x,\, \mathbf{L}^+_{\ell+}y\rangle_q \quad \bigl(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell},\ \ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\ell^+}\bigr),$$

поэтому $\mathbf{L}^+_{\ell+} \subset (\mathbf{L}_\ell)^*$. Докажем обратное включение.

Пусть $y \in \mathcal{D}\Bigl((\mathbf{L}_\ell)^*\Bigr)$. В силу (3.2) $y \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^+)$. Для произвольного $\delta \in \mathbb{R}^{2n-m}$ определим $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}$ согласно следствию 3. После этого из (3.2) и (3.1) получаем

$$\langle x,\, (\mathbf{L}_\ell)^* y\rangle_q = \langle x,\, \mathbf{L}^+ y\rangle_q = \langle \mathbf{L}_\ell x, y\rangle_p - \delta^\top S_{2n-m}\ell^+ y,$$

откуда (δ произвольно!) следует, что $\ell^+ y = 0$, то есть $y \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^+_{\ell+})$. Значит, $(\mathbf{L}_\ell)^* = \mathbf{L}^+_{\ell+}$.

Заменив $\mathcal{P}$ на $\mathcal{R}$ и ℓ на ℓ^+, получим второе равенство. □

Доказанная теорема означает, что сопряженной к краевой задаче

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in J, \quad \ell x = 0 \tag{3.3}$$

является краевая задача

$$(L^+y)(t) = g(t), \quad t \in J, \quad \ell^+ y = 0; \tag{3.4}$$

это вместе с тем, что $\mathbf{L}_\ell$, $\mathbf{L}^+_{\ell+} : \mathbb{L}_q[a,b] \to \mathbb{L}_p[a,b]$ как раз и говорит об *адекватном описании сопряженного оператора.*

Напомним: $\mathcal{P}, \mathcal{R} \in \mathfrak{B}_n(I)$. Скажем, что $t_0 \in I$ является P-нулем функции $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ кратности k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, если $(\overset{i}{_\mathcal{P}}x)(t_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $(\overset{k}{_\mathcal{P}}x)(t_0) \neq 0$. Естественно, что аналогично говорим об $\mathcal{R}$-нуле. Через $\varphi_{\mathcal{P}}(x, t_0)$ обозначаем кратность P-нуля функции $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ в точке $t_0 \in I$. Далее, пусть

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\alpha} \doteq \{x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} : (\,_\mathcal{P}x)(a) = 0\}, \quad \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\alpha^+} \doteq \{y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}} : (\,_\mathcal{R}y)(b) = 0\},$$
$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P},k} \doteq \{x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} : \varphi_{\mathcal{P}}(x,a) \geqslant k,\ \ \varphi_{\mathcal{P}}(x,b) \geqslant n-k\},$$
$$\mathfrak{X}_{\mathcal{R},k^+} \doteq \{y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}} : \varphi_{\mathcal{R}}(x,a) \geqslant n-k,\ \ \varphi_{\mathcal{P}}(x,b) \geqslant k\}.$$

Следствие 5.

$$(\mathbf{L}_\alpha)^* = \mathbf{L}^+_{\alpha^+}, \quad (\mathbf{L}^+_{\alpha^+})^* = \mathbf{L}_\alpha, \quad (\mathbf{L}_\mathbf{k})^* = \mathbf{L}^+_{\mathbf{k}^+}, \quad (\mathbf{L}^+_{\mathbf{k}^+})^* = \mathbf{L}_\mathbf{k}.$$

§ 4. Многоточечные краевые условия

4.1°. Рассмотрим классические многоточечные краевые условия для уравнения (1.3):

$$\lambda x \doteq \sum_{i=0}^{\nu+1} M_i(\,_{\mathcal{P}}x)(a_i) = 0 \tag{4.1}$$

$(a \doteq a_0 < a_1 < \ldots < a_{\nu+1} \doteq b,\ \nu \geqslant 1)$, где $m \times n$-матрицы M_i таковы, что ранг $m \times (\nu+2)n$-матрицы $M \doteq (M_0\, M_1\, \ldots M_{\nu+1})$ равен m.

Обозначим

$$\Delta \doteq \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}, \quad \gamma_{\mathcal{P}} x \doteq \operatorname{col}\big((\,_{\mathcal{P}}x)(a_i)\big)_{i=0}^{\nu+1}, \quad \gamma_{\mathcal{P}} : \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}^{n(\nu+2)};$$

таким образом, $\lambda x = M\gamma_{\mathcal{P}} x$; для $\gamma_{\mathcal{P}}$ применяем упрощенное обозначение: $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} \doteq \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\ell}, \mathbf{L}_\gamma \doteq \mathbf{L}_\ell$ при $\ell = \gamma_{\mathcal{P}}$. Очевидно, $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\lambda}$.

Лемма 6. *Множество* $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$ *плотно в* $\mathbb{L}_q[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in \mathbb{L}_q[a,b]$. По лемме 2 для любого ε найдутся $x_i \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ такие, что

$$(\,_{\mathcal{P}}x)(a_i) = 0, \quad (\,_{\mathcal{P}}x)(a_{i+1}) = 0, \qquad \int_{a_i}^{a_{i+1}} |x_i(t) - y(t)|\, dt < \frac{\varepsilon^q}{\nu+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Положим $x(t) \doteq x_i(t)$, $f(t) \doteq \big(\,^{n}_{\mathcal{P}}x_i\big)(t)$ для $t \in J_i \doteq [a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \ldots, \nu-1$, $x(t) = x_\nu(t)$, $f(t) \doteq \big(\,^{n}_{\mathcal{P}}x_\nu\big)(t)$ для $t \in J_\nu \doteq [a_\nu, b]$. Легко видеть, что $f \in \mathbb{L}_p[a,b]$, $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$ и $\|x - y\|_{\mathbb{L}_q} < \varepsilon$.

Следствие 6. *Множество* $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\lambda}$ *плотно в* $\mathbb{L}_q[a,b]$.

Лемма 7. *Для любых* $\delta_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu+1)$ *существует функция* $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ *такая, что*

$$\big(\,_{\mathcal{P}}x\big)(a_i) = \delta_i \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu+1). \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив лемму 3 на каждом из отрезков $\operatorname{cl} J_i$ $(i = 0, \ldots, \nu)$, получим функцию, удовлетворяющую условиям (4.2). В силу «непрерывной стыковки» $\Big(\big(\,_{\mathcal{P}}x\big)(a_i - 0) = \big(\,_{\mathcal{P}}x\big)(a_i +) = \delta_i, \quad i = 1, \ldots, \nu\Big)$ $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$. □

Введем линейное пространство $\big(\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\big)$ функций y, имеющих кусочно абсолютно непрерывные на J квазипроизводные $\,^{k}_{\mathcal{P}}y$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, которые допускают разрывы первого рода в точках $a_i \in \Delta$ и таких, что $\big(\,^{n}_{\mathcal{P}}y\big) \in \mathbb{L}_p[a,b]$. Очевидно, $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{L}_q[a,b]$ и, так как $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}} \subset \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$, то согласно лемме 2 $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ плотно в $\mathbb{L}_q[a,b]$. Обозначим

$$\big(\sigma\,^{i}_{\mathcal{R}}y\big)(t) \doteq \big(\,^{i}_{\mathcal{R}}y\big)(t+0) - \big(\,^{i}_{\mathcal{R}}y\big)(t-0) \quad (i = 0, \ldots, n-1), \quad \big(\sigma\,_{\mathcal{R}}y\big) \doteq \operatorname{col}\big(\sigma^{i}_{\mathcal{R}}y)\big)_{i=0}^{n-1};$$
$$\delta_{\mathcal{R}}y \doteq \Big(\big(\,_{\mathcal{R}}y\big)^{\top}(a),\ \big(\sigma\,_{\mathcal{R}}y\big)^{\top}(a_1), \ldots,\ \big(\sigma\,_{\mathcal{R}}y\big)^{\top}(a_\nu),\ \big(\,_{\mathcal{R}}y\big)^{\top}(b)\Big); \quad \mathfrak{M} \doteq \operatorname{diag}(-H, \ldots, -H,\, H)$$

— $(\nu+2)n \times (\nu+2)n$-блочно-диагональная матрица; $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$ — расширение оператора $\mathbf{L}^{+}$ на $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ по формуле

$$\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)(t) \doteq \big(\mathbf{L}^{+}\big)(t), \quad t \in \operatorname{cl} J_i \quad (i = 0, \ldots, \nu).$$

Перепишем формулу Грина (1.13) в новых обозначениях:

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p - \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_q = \big(\gamma\,_{\mathcal{P}}x\big)^{\top}\mathfrak{M}\big(\delta\,_{\mathcal{R}}y\big) \qquad (x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}, \quad y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}). \tag{4.3}$$

Если $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$, $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$, то отсюда следует, что

$$\langle \mathbf{L}_\gamma x, y\rangle_p = \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_q. \tag{4.4}$$

Лемма 8. *Для любых* $\eta_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu + 1)$ *существует* $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ *такая, что* $\delta_{\mathcal{R}} y = \eta \doteq \operatorname{col}\big(\eta_i\big)_{i=0}^{\nu+1}$.

Доказательство. Последовательно решаем задачи Коши для уравнения (1.10): $({}_{\mathcal{R}}y_0)(a) = \eta_0$ $(t \in \operatorname{cl} J_0)$, $({}_{\mathcal{R}}y_i)(a_i) = ({}_{\mathcal{R}}y_{i-1})(a_i) + \eta_i$ $(t \in J_i,\ i = 1, \ldots, \nu - 1)$. Для нахождения y_ν воспользуемся леммой 3 при $({}_{\mathcal{R}}y_\nu)(a_\nu) = ({}_{\mathcal{R}}y_{\nu-1})(a_\nu) + \eta_\nu$, $({}_{\mathcal{R}}y_\nu)(b) = \eta_{\nu+1}$. Функция $y = y_i$ при $t \in J_i$, $i = 0, 1, \ldots, \nu$ — требуемая. $\square$

Лемма 9. $\dim \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big) = (\nu + 1)n$.

Доказательство. Пусть $\{y_k\}_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+}\big)$. Положим $\widetilde{y}_{ik} \doteq y_k$ при $t \in J_i$, $\widetilde{y}_{ik} \doteq 0$ при $t \in J \setminus J_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu,\ k = 1, \ldots, n)$. Тогда $\widetilde{y}_{ik} \in \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)$ и образуют линейно независимую систему. Пусть $y \in \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)$. Для $t \in J_i$ $y = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik} y_k$, поэтому $y = \sum\limits_{i=0}^{\nu} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik} \widetilde{y}_{ik}$ $(t \in J)$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Из (4.4) и лемм 6 и 9 вытекает следующее утверждение.

Лемма 10. $\mathcal{R}\big(\mathbf{L}_\gamma\big) = {}^{\perp}\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)$.

В силу леммы 6 и следствия 6 существуют операторы $\big(\mathbf{L}_\gamma\big)^*$ и $\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^*$.

Теорема 4. $\big(\mathbf{L}_\gamma\big)^* = \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$, $\quad \big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^* = \mathbf{L}_\gamma$.

Доказательство. Включение $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} \subset \big(\mathbf{L}_\gamma\big)^*$ следует из (4.4). Пусть $z \in \mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}_\gamma\big)^*\Big)$, $\big(\mathbf{L}_\gamma\big)^* z \doteq h$ $(h \in \mathbb{L}_p[a, b])$, y — произвольное решение уравнения $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)(t) = h(t)$ $\big(y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\big)$. Как при доказательстве теоремы 3, сравним два выражения для $\langle x, h\rangle_q$. В итоге придем к выводу, что $y - z \in \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)$, то есть $z \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}} = \mathcal{D}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)$. Значит, $\big(\mathbf{L}_\gamma\big)^* \subset \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$, а вместе с ранее показанным обратным включением, $\big(\mathbf{L}_\gamma\big)^* = \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$.

Из (4.4) следует, что $\mathbf{L}_\gamma \subset \big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^*$. Пусть $x \in \mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^*\Big)$. Так как $\mathbf{L}^{+}_{\beta} \subset \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$, то $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^* \subset \big(\mathbf{L}^{+}_{\beta}\big)^* = \mathbf{L}$. Значит, $x \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}\big) = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$. Отсюда и из определения оператора $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^*$ получаем:

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p = \langle \big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^* x, y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\rangle_q \quad \big(y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\big), \tag{4.5}$$

а из (4.3): $\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\rangle_q + \big(\gamma_{\mathcal{P}} x\big)^{\top} \mathfrak{M}(\delta_{\mathcal{R}} y)$. Сравнив последнее равенство с (4.5), получим, что $\big(\gamma_{\mathcal{P}} x\big)^{\top} \mathfrak{M}(\delta_{\mathcal{R}} y) = 0$. Отсюда и из леммы 8 в силу произвольности $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ следует, что $\gamma_{\mathcal{P}} x = 0$, то есть $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} = \mathcal{D}(\mathbf{L}_\gamma)$. Значит, $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^* \subset \mathbf{L}_\gamma$, то есть окончательно, $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)^* = \mathbf{L}_\gamma$. $\square$

Пусть $\mathfrak{d}(A)$, $\mathfrak{n}(A)$, $\kappa(A)$ означают соответственно дефект, размерность ядра (нуль-пространства) и индекс оператора $A : \mathbb{L}_p[a, b] \to \mathbb{L}_q[a, b]$ в смысле [1, с. 7].

Из лемм 9, 10 и теоремы 4 сразу получаем утверждение следующей теоремы.

Теорема 5. *Уравнение* $\big(\mathbf{L}_\gamma x\big)(t) = f(t)$ $(f \in \mathbb{L}_p[a, b])$ *нормально и корректно разрешимо,* $\kappa\big(\mathbf{L}_\gamma\big) = -(\nu + 1)n$. *Уравнение* $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\big)(t) = g(t)$ $(g \in \mathbb{L}_p[a, b])$ *везде разрешимо,* $\kappa\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big) = (\nu + 1)n$. (См. [1].)

4.2°. Для построения оператора $\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^*$ понадобится ряд новых обозначений. Пусть $\widehat{M}$ — такая $\big((\nu + 2)n - m\big) \times (\nu + 2)n$-матрица, что ранг матрицы $\widetilde{M} \doteq (M^{\top}\, \widehat{M}^{\top})^{\top}$ равен $(\nu + 2)n$; пусть далее,

$$\widetilde{\lambda} x \doteq \widetilde{M}\big(\gamma_{\mathcal{P}} x\big), \quad \widehat{\lambda} x \doteq \widehat{M}\big(\gamma_{\mathcal{P}} x\big), \quad \widetilde{M}^{+} \doteq S_{(\nu+2)n}\big(\widetilde{M}^{-1}\big)^{\top} \mathfrak{M} = \Big(\big(M^{+}\big)^{\top}\, \big(\widehat{M}^{+}\big)^{\top}\Big)^{\top}$$

(M^+ и $\widehat{M}^+$ — подматрицы матрицы $\widetilde{M}$, состоящие соответственно из первых $(\nu+2)n-m$ и последних m строк; напомним также, что $\lambda\, x = M(\gamma_{\mathcal{P}} x)$); наконец, пусть

$$\lambda^+ y \doteq M^+\big(\delta_{\mathcal{R}} y\big), \quad \widetilde{\lambda}^+ y \doteq \widetilde{M}^+\big(\delta_{\mathcal{R}} y\big), \quad \widehat{\lambda}^+ y \doteq \big(\delta_{\mathcal{R}} y\big).$$

Теперь мы снова можем переписать формулу Грина (4.3) в виде *формулы краевых форм*:

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p - \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\rangle_q = \big(\widetilde{\lambda} x^\top\big) S_{(\nu+2)n}\big(\widetilde{\lambda}^+ y\big) = \big(\lambda\, x\big)^\top S_m\big(\widehat{\lambda}^+ y\big) + \big(\widetilde{\lambda} x\big)^\top S_{(\nu+2)n-m}\big(\lambda^+ y\big) \tag{4.6}$$

$\big(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\big)$. Отсюда для $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\lambda}$, $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R},\lambda^+}$

$$\langle \mathbf{L}_\lambda x, y\rangle_p = \langle x,\, \mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+} y\rangle_q. \tag{4.7}$$

Точно так же, как лемма 4, с помощью леммы 7 доказывается следующая лемма.

Лемма 11. *Для любого* $\widetilde{\delta} \in \mathbb{R}^{(\nu+2)n}$ *существует функция* $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ *такая, что* $\widetilde{\lambda} x = \widetilde{\delta}$.

Лемма 12. *Образ* $\mathcal{R}\big(\mathbf{L}_\lambda\big)$ *замкнут и* $\mathcal{R}\big(\mathbf{L}_\lambda\big) =^{\perp} \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о опирается на (4.7) и лемму 11 и аналогично доказательству леммы 5. □

Из леммы 8 при $\eta = \big(\widetilde{M}\big)^{-1}\delta$ получаем следующее утверждение.

Лемма 13. *Для любого* $\delta \in \mathbb{R}^{(\nu+2)n}$ *существует функция* $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ *такая, что* $\widetilde{\lambda}^+ y = \delta$.

Теорема 6. $\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^* = \mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}$, $\big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)^* = \mathbf{L}_\lambda$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.7) следует, что $\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+} \subset \big(\mathbf{L}_\lambda\big)^*$. Пусть $y \in \mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^*\Big)$. Так как $\mathbf{L}_\gamma \subset \mathbf{L}_\lambda$, то $\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^* \subset \big(\mathbf{L}_\gamma\big)^* = \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$. Для $\delta = 0 \in \mathbb{R}^m$ и произвольного $\widehat{\delta} \in \mathbb{R}^{(\nu+2)n-m}$ определим x согласно лемме 11 $\Big(\widetilde{\delta} = \big(\delta^\top, \widehat{\delta}^\top\big)^\top\Big)$. Тогда из формулы краевых форм (4.6) получаем

$$\langle x,\, \big(\mathbf{L}_\lambda\big)^* y\rangle_q = \langle x,\, \mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+} y\rangle_q = \langle \mathbf{L}_\lambda x, y\rangle_p - \widehat{\delta}^\top S_{(\nu+2)n-m}\big(\lambda^+ y\big).$$

Отсюда и из определения $\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^*$ ввиду произвольности $\widehat{\delta}$ следует, что $\lambda^+ y = 0$, то есть $y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\lambda^+} = \mathcal{D}\big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)$, и значит, $\big(\mathbf{L}_\lambda\big)^* \subset \mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Из (4.7) видим, что $\mathbf{L}_\lambda \subset \big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)^*$. Пусть $x \in \mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)^*\Big)$. Имеет место цепочка импликаций

$$\big(y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\gamma}\big) \Rightarrow \big(\delta_{\mathcal{R}} y = 0\big) \Rightarrow \big(\lambda^+ y = 0\big) \Rightarrow \big(\mathfrak{X}_{\mathcal{R},\gamma} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\lambda^+}\big) \Rightarrow \big(\mathbf{L}_\gamma \subset \mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big(\big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)^* \subset \mathbf{L}\Big) \Rightarrow \big(x \in \mathcal{D}(\mathbf{L})\big).$$

Заменив во второй части доказательства теоремы 4 ссылки на (4.3) и лемму 8 ссылками на (4.6) и лемму 13 соответственно,

$$\mathbf{L}_\gamma, \quad \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}, \quad \gamma_{\mathcal{P}x}, \quad \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}, \quad \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}, \quad \mathfrak{M}, \quad \delta_{\mathcal{R}} y$$

на

$$\mathbf{L}_\lambda, \quad \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\lambda}, \quad \lambda x, \quad \mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}, \quad \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R},\lambda^+}, \quad S_m, \quad \widehat{\lambda}^+ y$$

соответственно, получим, что $\big(\mathbf{L}^{+;\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)^* \subset \mathbf{L}_\lambda$. □

Таким образом, задачей, сопряженной задаче (1.3), (4.1), является краевая задача

$$\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\big)(t) = g(t) \quad \big(g \in \mathbb{L}_p[a,b],\ t \in J\big), \quad \lambda^+ y = 0. \tag{4.8}$$

4.3°. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathcal{N}(\mathbf{L})$, $\{y_k\}_{k=1}^{(\nu+1)n}$ — базис в $\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big)$, $\Lambda \doteq \big(\lambda_i x_k\big)$ $(i = 1,\dots,m; k = 1,\dots,n)$, $\Lambda^+ \doteq \big(\lambda_i^+ y_k\big)$ $(i = 1,\dots,(\nu+2)n-m;\ k = 1,\dots,(\nu+1)n)$, λ_i и λ_i^+ — компоненты λ и l^+ соответственно; r (r^+) — ранг матрицы Λ (Λ^+). Легко видеть, что $\mathfrak{n}(\mathbf{L}_\lambda) = n - r$, $\mathfrak{d}(\mathbf{L}_\lambda) = (\nu+1)n - r^+$.

Теорема 7. *Уравнения* $\mathbf{L}_\lambda x = f$ *и* $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+} y = g$ (эквивалентные краевым задачам (1.3), (4.1) и (4.8) *соответственно*) *нормально разрешимы;* $\kappa(\mathbf{L}_\lambda) = n - m$, $\kappa(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}) = m - n$.

Доказательство. Нормальная разрешимость следует из леммы 12. Найдем индекс $\mathbf{L}_\lambda$. Подставив в (4.6) $x = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, получим

$$\Lambda^\top S_m\big(\widehat{\lambda} y\big) + \widehat{\Lambda}^\top S_{(\nu+2)n-m}\big(\lambda^+ y\big) = 0 \quad \big(y \in \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\big),\ \widehat{\Lambda} \doteq (\widehat{\lambda}_i x_k),$$
$$i = 1, \ldots, (\nu+2)n - m;\ k = 1, \ldots, n,\ \widehat{\lambda}_i \text{— компоненты } \widehat{\lambda}\big).$$

Отсюда следует, что линейная система $\Lambda^\top S_m c = 0$ имеет линейно независимые решения $c = \widehat{\lambda}^+ \widetilde{y}_i$ $\big(i = 1, \ldots, (\nu+1)n - r^+,\ \widetilde{y}_i \in \mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big)\big)$, поэтому

$$m - r \geqslant (\nu+1)n - r^+. \tag{4.9}$$

Если подставить в (4.6) $y = y_k$ $(k = 1, \ldots, (\nu+1)n)$, то получим равенство

$$(\lambda x)^\top S_m\big(\widehat{\Lambda}^+ y\big) + (\widehat{\lambda} x)^\top S_{(\nu+2)n-m}\Lambda^+ = 0 \quad \big(x \in \mathcal{N}\big(\mathbf{L}\big),\ \widehat{\Lambda}^+ \doteq (\widehat{\lambda}^+_i y_k),$$
$$i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, (\nu+1)n,\ \widehat{\lambda}^+_i \text{— компоненты } \widehat{\lambda}^+\big).$$

Это значит, что линейная система $c^\top S_{(\nu+2)n-m}\Lambda^+ = 0$ имеет линейно независимые решения $c = \widehat{\lambda}\widetilde{x}_k$ $\big(\widetilde{x}_k \in \mathcal{N}(\mathbf{L}_\lambda),\ k = 1, \ldots, n - r\big)$, поэтому

$$(\nu+2)n - m - r^+ \geqslant n - r. \tag{4.10}$$

Отсюда и из (4.9) следует

$$r^+ - r = (\nu+1)n - m; \quad \kappa(\mathbf{L}_\lambda) = \mathfrak{n}(\mathbf{L}_\lambda) - \mathfrak{d}(\mathbf{L}_\lambda) = n - r - (\nu+1)n + r^+ = n - m, \quad \kappa\big(\mathbf{L}^{,\boldsymbol{\Delta}}_{\lambda^+}\big) = m - n.$$

4.4°. В качестве иллюстрации к теореме 6 рассмотрим классические однородные краевые условия Валле Пуссена:

$$\varphi_{\mathcal{P}}(x, a_i) \geqslant \mu_i \quad \Big(i = 0, 1, \ldots, \nu+1;\ \sum_{i=0}^{\nu+1} \mu_i = n\Big). \tag{4.11}$$

Здесь строки матрицы M — единичные попарно ортогональные векторы (одна компонента 1, остальные — нули). В качестве матрицы $\widehat{M}$ возьмем матрицу такого же вида, дополняющую M до ортогональной матрицы $\widetilde{M}$. Так как $\big(\widetilde{M}^{-1}\big) = \widetilde{M}$, то в каждой строке матрицы $\widetilde{M}^+$ один элемент будет равен ± 1, остальные — нули. Проделав все вычисления, получим, что сопряженные к (4.11) краевые условия имеют вид

$$\varphi_{\mathcal{R}}(y, a_i) \geqslant n - \mu_i, \quad i = 0,\ i = \nu+1; \tag{4.12}$$
$$\big(\sigma_{\mathcal{R}} y\big)(a_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, n - \mu_i,\ i = 1, \ldots, \nu. \tag{4.13}$$

Отсюда видим, что решения уравнения $\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\big)(t) = g(t)$, удовлетворяющие условиям (4.13), на самом деле имеют в точках a_i непрерывные квазипроизводные до порядка $n - \mu_i - 1$ включительно $(i = 1, \ldots, \nu)$. В связи с этим введем следующие определения и обозначения.

Будем говорить, что $x \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{P}}$ имеет в точке $a_i \in \Delta$ $\mathcal{P}$-дефект δ $(0 \leqslant \delta < n)$ и записывать $(\mathrm{def}_{\mathcal{P}} x)(a_i) = \delta$, если квазипроизводная $\binom{n-\delta}{\mathcal{P}} x\big)$ имеет разрыв в точке a_i, а все младшие квазипроизводные непрерывны в этой точке.

Пусть $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_\nu)$ $(0 \leqslant \rho_i \leqslant n)$. Обозначим

$$\mathfrak{X}^{\Delta,\rho}_{\mathcal{P}} \doteq \big\{x : x \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{P}},\ \big(\mathrm{def}\, x\big)(a_i \leqslant \rho_1,\ \ i = 1, \ldots, \nu)\big\}.$$

Элементы этого множества будем называть $(\mathcal{P},\Delta,\rho)$-сплайнами (по аналогии с L-сплайнами из [33]). Очевидно,

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}=\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\overline{0}}\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\rho}\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\delta}\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\overline{n}}=\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta}$$

$\big(\rho_i\leqslant\delta_i,\ \delta=(\delta_1,\dots,\nu),\ \overline{0}=(0,\dots,0),\ \overline{n}=(n,\dots,n)\big)$.

Так как имеет место включение $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}^{\Delta}\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta}$, то из леммы 6 следует, что $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\rho}$ плотно в пространстве $\mathbb{L}_q[a,b]$.

Пусть $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\mu}$ — сужение оператора $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$ на $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\mu}$ $\big(\mu=(\mu_1,\dots,\mu_\nu)\big)$. Согласно теореме 6 краевой задачей, сопряженной задаче Валле Пуссена (1.3), (4.11), является краевая задача для уравнения

$$\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\mu}y\big)(t)=g(t)\quad(t\in J,\ g\in\mathbb{L}_p[a,b])\tag{4.14}$$

с краевыми условиями (4.12). Эти краевые условия заданы только в двух точках: $a=a_0$ и $b=a_{\nu+1}$, их число равно $2n-\mu_0-\mu_{\nu+1}>n$.

§ 5. Обобщенные краевые задачи

5.1°. Выше мы заметили, что краевые задачи, сопряженные к многоточечным, уже не являются классическими. В них исходное уравнение удовлетворяется не на всем промежутке J, а на частичных промежутках J_i $(i=0,1,\dots,\nu)$. *Обобщенные краевые задачи* такого рода возникают не только как сопряженные к многоточечным (см., например, [16, 34, 35] — так называемые импульсные краевые задачи; см. также [36]–[38]; сюда относятся также краевые задачи для уравнений переменной структуры [39] и другие).

Рассмотрим как исходную произвольную многоточечную краевую задачу на множестве $(\mathcal{P},\Delta,\rho)$-сплайнов ($\rho=(\rho_1,\dots,\rho_\nu)$, $0\leqslant\rho_i\leqslant n$). Введем очередную порцию обозначений:

$$\big(\alpha_{\mathcal{P}}^{0}x\big)(t)\doteq\big({}_{\mathcal{P}}x\big)(t),\quad\big(\alpha_{\mathcal{P}}^{n}x\big)(t)\doteq\big(\sigma_{\mathcal{P}}x\big)(t),$$
$$\big(\alpha_{\mathcal{P}}^{\tau}x\big)(t)\doteq\Big(\big({}^{0}_{\mathcal{P}}x\big)(t),\dots,\big({}^{n-\tau-1}_{\mathcal{P}}x\big)(t),\ \big(\sigma_{\mathcal{P}}^{n-\tau}x\big)(t),\dots,\big(\sigma_{\mathcal{P}}^{n-1}x\big)(t)\big)\Big)^{\top}\ (1\leqslant\tau\leqslant n-1),$$
$$\theta_{\mathcal{P}}^{\rho}x\doteq\Big(\big({}_{\mathcal{P}}x\big)^{\top}(a),\ \big(\alpha_{\mathcal{P}}^{\rho_1}x\big)^{\top}(a_1),\dots,\big(\alpha_{\mathcal{P}}^{\rho_\nu}x\big)^{\top}(a_\nu),\ \big({}_{\mathcal{P}}x\big)^{\top}(b)\Big)^{\top};$$

$\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}$ — расширение оператора $\mathbf{L}$ на множество $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\rho}$ по формуле $\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}\big)(t)=\big(\mathbf{L}\big)(t)$, $t\in\operatorname{cl}J_i$ $(i=0,\dots,\nu)$.

Краевая задача, о которой только что шла речь, имеет вид

$$\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}\big)(t)=f(t)\qquad(t\in J,\ \ f\in\mathbb{L}_p[a,b]),\tag{5.1}$$
$$\vartheta x\doteq M\theta_{\mathcal{P}}^{\rho}x=0,\tag{5.2}$$

где M — заданная $m\times(\nu+2)n$-матрица ранга m.

Еще раз перепишем формулу Грина в подходящем виде. Теперь удобно записать ее так:

$$\langle\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}x,y\rangle_p-\langle x,\,\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}y\rangle_q=\big(\theta_{\mathcal{P}}^{\rho}x\big)^{\top}\mathfrak{M}\big(\theta_{\mathcal{R}}^{\rho'}y\big)\tag{5.3}$$

$\big(x\in\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\rho},\ y\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}^{\Delta,\rho'},\ \rho'=(\rho_1',\dots,\rho_\nu'),\ \rho_i'=n-\rho_i\big)$.

Рассмотрим вначале вспомогательную задачу, которую естественно назвать *обобщенной задачей Коши* для уравнения (5.1). «Начальные» условия в этой задаче имеют вид

$$\big({}_{\mathcal{P}}x\big)(a)=\xi_0\ \big(\in\mathbb{R}^n\big),\quad\big({}^{k}_{\mathcal{P}}x\big)(a_i+)=\xi_{ik}\ \big(\in\mathbb{R}\big),\quad k=n-\rho_i,\dots,n-1,\ i=1,\dots,\nu.\tag{5.4}$$

Лемма 14. *Существует единственный* $(\mathcal{P},\Delta,\rho)$ *-сплайн — решение задачи* (5.1), (5.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно решаем задачи Коши:

$$\binom{n}{\mathcal{P}}x_0\big)(t) = f(t)\ \ (t\in \operatorname{cl} J_0),\ \ \big({}_{\mathcal{P}}x_0\big)(a) = \xi_0;\ \ \big({}^{n}_{\mathcal{P}}x_i\big)(t) = f(t)\ \ (t\in \operatorname{cl} J_i),$$
$$\big({}^{k}_{\mathcal{P}}x_i\big)(a_i) = \big({}^{k}_{\mathcal{P}}x_{i-1}\big)(a_i)(k=0,\ldots,n-\rho_i-1),\ \ \big({}^{k}_{\mathcal{P}}x_i\big)(a_i) = \xi_{ik}\ (k=n-\rho_i,\ldots,n-1,\ i=1,\ldots,\nu).$$

На каждом шаге решение существует и единственно. Полагаем $x(t)=x_i(t)$ $(t\in J_i,\ i=1,\ldots,\nu)$. Очевидно, $x\in\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\rho}$ и является решением задачи (5.1), (5.4).

Пусть $\widetilde{x}$ — еще одно такое решение. Тогда $z\doteq x-\widetilde{x}\in\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$, $\big({}^{n}_{\mathcal{P}}z\big)(t)=0$ $(t\in J)$, $\big({}_{\mathcal{P}}z\big)(a)=0$. Значит, $z\equiv 0$, то есть $\widetilde{x}=x$. □

Следствие 7. $\dim\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}\big)=n+\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i,\quad \dim\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}\big)=n(\nu+1)-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i.$

Определим матрицы $\widehat{M}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}^{+}$ точно так же, как в п. 4.2^o и положим

$$\widetilde{\vartheta}x\doteq\widetilde{M}\big(\theta^{\rho}_{\mathcal{P}}x\big),\qquad \widetilde{\vartheta}^{+}y\doteq\widetilde{M}^{+}\big(\theta^{\rho'}_{\mathcal{R}}y\big). \tag{5.5}$$

Пусть опять, как в п. 4.2^o, последние $(\nu+2)n-m$ компонент $\widetilde{\vartheta}^{+}$ образуют $\widehat{\vartheta}$, первые $(\nu+2)n-m$ компонент $\widetilde{\vartheta}^{+}$ образуют ϑ^{+}, а последние m — $\widehat{\vartheta}^{+}$. Пусть $\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}_{\vartheta}$ и $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}_{\vartheta^{+}}$ — сужения операторов $\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}$ и $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}$ соответственно на множества $\mathfrak{X}^{\Delta,\rho}_{\mathcal{P},\vartheta}\doteq\{x\in\mathfrak{X}^{\Delta,\rho}_{\mathcal{P}}:\vartheta x=0\}$ и $\mathfrak{X}^{\Delta,\rho'}_{\mathcal{R},\vartheta^{+}}\doteq\{y\in\mathfrak{X}^{\Delta,\rho'}_{\mathcal{R}}:\vartheta^{+}y=0\}$.

Из формулы Грина (5.3) следует (ср. (4.6))

$$\langle\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}x,y\rangle_p-\langle x,\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}y\rangle_q=\big(\widetilde{\vartheta}x\big)^{\top}S_{(\nu+2)n}\big(\widetilde{\vartheta}^{+}y\big)=\big(\vartheta x\big)^{\top}S_m\big(\vartheta^{+}y\big)+\big(\widehat{\vartheta}x\big)^{\top}S_{(\nu+2)n-m}\big(\vartheta^{+}y\big) \tag{5.6}$$

$\big(x\in\mathfrak{X}^{\Delta,\rho}_{\mathcal{P}},\ y\in\mathfrak{X}^{\Delta,\rho'}_{\mathcal{R}}\big)$. Справедливы также аналоги лемм 11–13.

Теорема 8. $\Big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}_{\vartheta}\Big)^{*}=\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}_{\vartheta^{+}},\quad \Big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}_{\vartheta^{+}}\Big)^{*}=\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}_{\vartheta}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует доказательству теоремы 6. □

Таким образом, задачей, сопряженной задаче (5.1), (5.2), является задача

$$\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}y\big)(t)=g(t)\ \ (t\in J,\ \ g\in\mathbb{L}_p[a,b]),\quad \vartheta^{+}y=0. \tag{5.7}$$

Для краевых задач (5.1), (5.2), (5.7) справедлива теорема, аналогичная теореме 7.

Теорема 9. *Уравнения* $\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}_{\vartheta}x=f$ *и* $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}_{\vartheta^{+}}y=g$ *нормально разрешимы*; $\kappa\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}_{\vartheta}\big)=n-m+\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i.$

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство теоремы 7. Надо лишь в обозначениях перед ее формулировкой и в рассуждениях доказательства заменить $\mathbf{L}$ на $\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}$, $\dim\mathcal{N}(\mathbf{L})$ на $\dim\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}\big)=n+\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i$; отметить, что $\dim\mathcal{N}\Big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\rho'}_{\vartheta^{+}}\Big)=n(\nu+1)-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i-r^{+}$; ссылку на (4.6) заменить ссылкой на (5.6); неравенства (4.9), (4.10) запишутся в виде $m-r\geqslant(\nu+1)n-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i-r^{+}$, $(\nu+2)n-m-r^{+}\geqslant n+\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i-r$, и окончательно получим равенство $r^{+}-r=(\nu+1)n-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\rho_i-m$, завершающее доказательство. □

5.2$^{\mathbf{o}}$. Сопряженная краевая задача (5.7) имеет в точности такой же вид, что и исходная задача (5.1), (5.2); все отличие состоит в том, что матрица $\mathcal{P}$ заменяется на матрицу $\mathcal{R}$, матрица M — на матрицу M^{+}, вектор ρ — на вектор ρ'. Это и означает то, что мы ранее обозначали как *адекватное описание сопряженного оператора.* Введем в связи с этим определение.

Назовем класс краевых задач *замкнутым*, если он вместе с каждой своей задачей, содержит также и ее сопряженную. Линейный оператор $\mathbf{A}$, соответствующий некоторой краевой задаче из замкнутого класса, имеет адекватное описание своего сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$. Только в замкнутом классе можно говорить о самосопряженной краевой задаче (то есть о самосопряженности оператора $\mathbf{A}$, соответствующего такой задаче.) Так, краевая задача (5.1), (5.2) будет самосопряженной, если n четное, $\mathcal{R}=\mathcal{P}$, $m=n+\frac{\nu n}{2}$, а матрица $\widetilde{M}$ есть решение матричного уравнения $X^\top SX=\mathfrak{M}$.

Приведем примеры замкнутых классов краевых задач: A) класс произвольных двухточечных краевых задач, рассмотренных в §2; B) класс распадающихся двухточечных краевых задач (часть краевых условий сосредоточена в точке a, остальные — в точке b); этот класс является частью класса A; Г) класс двухточечных задач Валле Пуссена; краевые условия имеют вид: $\varphi_{\mathcal{P}}(x,a)\geqslant k$, $\varphi_{\mathcal{P}}(x,b)\geqslant n-k$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$; это часть класса B; сопряженные краевые условия имеют вид $\varphi_{\mathcal{R}}(y,a)\geqslant n-k$, $\varphi_{\mathcal{R}}(y,b)\geqslant k$ (см. следствие 5); Δ) класс обобщенных многоточечных задач вида (5.1), (5.2); о его замкнутости мы уже говорили выше. Как показано в §4, класс краевых задач с краевыми условиями (4.1) замкнутым не является (см. теорему 6). Еще один пример замкнутого класса дает рассматриваемый ниже класс обобщенных задач Валле Пуссена. С одной стороны, это часть класса Δ, с другой — расширение класса задач Валле Пуссена вида (1.3), (4.11), который, как показывают краевые условия (4.12), (4.13), замкнутым не является.

Обобщенной задачей Валле Пуссена (ОЗВП) назовем краевую задачу

$$\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho}\big)(t)=f(t)\qquad (t\in J,\ \ f\in\mathbb{L}_p[a,b]),\tag{5.8}$$

$$\varphi_{\mathcal{P}}(x,\,a_i)\geqslant\mu_i,\quad i=0,1,\ldots,\nu+1,\tag{5.9}$$

$$\sum_{i=0}^{\nu+1}\mu_i=n+\sum_{\nu=1}^{\nu}\rho_i\tag{5.10}$$

$\big(0<\mu_0,\mu_{\nu+1}<n;\ \ \mu_i m\rho_i\geqslant 0,\ \ 0<\mu_i+\rho_i\leqslant n,\ \ i=1,\ldots,\nu\big)$.

Классическая задача (1.3), (4.11) получается из (5.8), (5.9) при $\rho_i=0$ $(i=1,\ldots,\nu)$. Задача (4.14), (4.12), сопряженная к классической задаче (1.3), (4.11) — тоже задача вида (5.8), (5.9); в этом случае вместо $\mathcal{P}$ надо взять $\mathcal{R}$, вместо ρ взять $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_\nu)$, вместо μ_0 и $\mu_{\nu+1}$ взять $n-\mu_0$ и $n-\mu_{\nu+1}$, вместо μ_i взять 0 $(i=1,\ldots,\nu)$; условие (5.10) при этом тоже выполняется. «Неклассическая» задача Валле Пуссена, рассмотренная Ю. В. Покорным в [36, 37] (для обыкновенного дифференциального уравнения) получается из (5.8), (5.9) при $\mu_0+\mu_{\nu+1}=n$, $\mu_i=\rho_i=1$ $(i=1,\ldots,\nu)$ (и соответствующем $\mathcal{P}$). В общей же постановке задача (5.8), (5.9) ранее изучалась только автором в [40] (позднее некоторые результаты из [40] были передоказаны в [41, 42]).

Так как краевые условия (5.9) — частный случай условий (5.2), то сопряженные краевые условия определяются построениями п. 5.1^o. Сопряженные краевые условия теперь принимают вид

$$\begin{gathered}\varphi_{\mathcal{R}}(y,a_i)\geqslant\rho_i,\ \ i=1,\ldots,\nu+1\quad(\rho_0=n-\mu_0,\ \rho_{\nu+1}=n-\mu_{\nu+1}),\\ \big(\sigma_{\mathcal{R}}^{k-1}y\big)(a_i)=0,\quad k=n-\rho_i',\ldots,n-\mu_i,\ i=1,\ldots,\nu.\end{gathered}\tag{5.11}$$

Последнее равенство означает, что фактически $(\operatorname{def}_{\mathcal{R}}y)(a_i)\leqslant\mu_i$ $(\leqslant\rho_i'=n-\rho_i)$, то есть $y\in\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}^{+,\Delta,\mu}$ $\big(\subset\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}^{+,\Delta,\rho'}\big)$. Таким образом, задачей, сопряженной задаче (5.1), (5.9), является краевая задача для уравнения

$$\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta},\mu}y\big)(t)=g(t)\quad(t\in J,\ g\in\mathbb{L}_p[a,b])\tag{5.12}$$

при краевых условиях (5.11). Учитывая определения ρ_0 и $\rho_{\nu+1}$, можно переписать условие (5.10) в виде $\sum\limits_{i=0}^{\nu+1}\rho_i=n+\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}\mu_i$. Следовательно, задача (5.12), (5.11) также есть ОЗВП, и класс

ОЗВП действительно замкнут. ОЗВП (5.8), (5.9) является самосопряженной, если n — четное, $\mathcal{R} = \mathcal{P}$, $\mu_0 = \mu_{\nu+1} = \frac{n}{2}$, $\mu_i = \rho_i$ $(i = 1, \ldots, \nu)$.

Если исходное уравнение $Lx = f$ — обыкновенное дифференциальное, то краевая задача (5.12), (5.11) все же квазидифференциальная. Однако, если коэффициенты исходного уравнения достаточно гладкие (то есть выполнены условия (0.2)), то задача (5.12), (5.11) может быть переписана как ОЗВП для обыкновенного дифференциального уравнения (квазипроизводные $\overset{k}{_\mathcal{R}}y$ могут быть заменены производными $y^{(k)}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$).

В заключение этого пункта отметим одно свойство функции Грина краевой задачи из замкнутого класса. Остановимся на классе $\Delta)$ задач вида (5.1), (5.2). Поскольку эти задачи *обобщенные*, то нуждается в обобщении само понятие функции Грина.

Функцией Грина $G(t,s)$ краевой задачи (5.1), (5.2) называется функция $G : J \times J \to \mathbb{R}$, сечение $g(t) = G(t,s)$ которой при каждом $s \in J$ обладает свойствами: 1) $\bigl(\overset{k}{_\mathcal{P}}g\bigr)(t)(k = 0, \ldots, n-2)$ при $t \in J_i$ и квазипроизводная $\bigl(\overset{n-1}{_\mathcal{P}}g\bigr)(t)$ при $t \in J_i$, $t \neq s$ абсолютно непрерывны $(i = 0, \ldots, \nu)$, причем $\bigl(\overset{n-1}{_\mathcal{P}}g\bigr)(s+) - \bigl(\overset{n-1}{_\mathcal{P}}g\bigr)(s-) = 1$; 2) $\bigl(\operatorname{def} g\bigr)(a_i) \leqslant \rho_i, i = 1, \ldots, \nu$; 3) $\Bigl(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\rho} g\Bigr)(t) = 0$, $t \in [a,s) \cup (s,b]$; 4) $\vartheta g = 0$.

Пусть $m = n + \sum\limits_{i=1}^{\nu} \rho_i$. Тогда краевые задачи (5.1), (5.2) и (5.7) фредгольмовы (см. [1]). Пусть соответствующие однородные уравнения имеют лишь тривиальные решения. Это значит, что функции Грина $G(t,s)$ и $G^+(t,s)$ задач (5.1), (5.2) и (5.7) соответственно существуют, а решения полуоднородных задач имеют обычные представления

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds \quad \text{и} \quad y(t) = \int_a^b G^+(t,s)\, g(s)\, ds;$$

из этих представлений и формулы краевых форм (5.6) ввиду произвольности $f,\, g \in \mathbb{L}_p[a,b]$ получаем равенство

$$\bigl(\overset{0}{_\mathcal{R}}G^+\bigr)(t,s) = (-1)^n \bigl(\overset{0}{_\mathcal{P}}G\bigr)(s,t) \tag{5.13}$$

(квазипроизводные в обеих частях равенства берутся по первому аргументу). Сопряженные краевые условия дают, таким образом, представление о свойствах функции Грина данной задачи по второму аргументу. Равенство типа (5.13) говорит о том, что функции Грина краевой задачи из замкнутого класса обладают примерно одинаковыми свойствами. Так, например, уже сам вид сопряженных краевых условий позволяет в силу (5.13) утверждать, что функция Грина ОЗВП (5.8), (5.9) имеет по второму аргументу в точках $a_i \in \Delta$ дефекты порядка не выше μ_i и $\mathcal{R}$-нули порядка не ниже ρ_i $(i = 0, \ldots, \nu)$, а в точках a_0 и $a_{\nu+1}$ $\mathcal{R}$-нули порядка не ниже $n - \mu_0$ и $n - \mu_{\nu+1}$ соответственно. Детально ОЗВП изучена в [40].

5.3°. Рассмотрим, наконец, наиболее общую в классе $\mathfrak{X}_\mathcal{P}^\Delta$ линейную многоточечную краевую задачу

$$\bigl(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}} x\bigr)(t) = f(t) \quad (t \in J,\ f \in \mathbb{L}_p[a,b]), \tag{5.14}$$

$$\phi x \doteq \sum_{i=0}^{\nu+1} M_i \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)(a_i-) + K_i \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)(a_i+) = 0, \tag{5.15}$$

где M_i и K_i $(M_0 = K_{\nu+1} = 0)$ — такие $m \times n$-матрицы, что ранг $m \times 2(\nu+1)n$-матрицы $M \doteq (K_0\, M_1\, K_1 \ldots K_\nu\, M_{\nu+1})$ равен m $(1 \leqslant m < 2(\nu+1)n)$. Положим $\omega_\mathcal{P} : \mathfrak{X}_\mathcal{P}^\Delta \to \mathbb{R}^{2(\nu+1)n}$,

$$\omega_\mathcal{P} x \doteq \Bigl(\bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)^\top(a),\ \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)^\top(a_1-),\ \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)^\top(a_1+),\ \ldots,\ \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)^\top(a_\nu-),\ \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)^\top(a_\nu+),\ \bigl({_\mathcal{P}}x\bigr)^\top(b)\Bigr)^\top;$$

тогда $\phi x = M \omega_\mathcal{P} x$. Теперь формулу Грина можно записать так:

$$\langle \mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}} x,\, y\rangle_p - \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\rangle_q = \bigl(\omega_\mathcal{P} x\bigr)^\top \mathfrak{W}\bigl(\omega_\mathcal{R} y\bigr) \tag{5.16}$$

$\big(x \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}},\ \mathfrak{W} \doteq \operatorname{diag}(-H, -H, \dots -H, H)$ — $2(\nu+1)n \times 2(\nu+1)n$ -блочно-диагональная матрица$\big)$

Введем, как в п. 4.2^o $\big(2(\nu+1)n-m\big) \times 2(\nu+1)n$ -матрицу $\widehat{M}$, дополняющую M до невырожденной $2(\nu+1)n \times 2(\nu+1)n$ -матрицы $\widetilde{M}$ и положим

$$\widetilde{\phi}x \doteq \widetilde{M}\omega_{\mathcal{P}}x, \quad \widetilde{M}^{+} \doteq S_{2(\nu+1)n}\big(\widetilde{M}^{-1}\big)^{\top}\mathfrak{W}, \quad \widetilde{\phi}^{+}y \doteq \widetilde{M}^{+}\omega_{\mathcal{R}}y; \tag{5.17}$$

введем также вектор-функционалы

$$\widehat{\phi} : \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}^{2(\nu+1)n-m}, \quad \phi^{+} : \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}^{2(\nu+1)n-m}, \quad \widehat{\phi}^{+} : \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}^{m},$$

$\widehat{\phi}$ состоит из последних $2(\nu+1)n-m$ компонент $\widetilde{\phi}$, ϕ^{+} — из первых $2(\nu+1)n-m$ компонент, а $\widehat{\phi}^{+}$ — из последних m компонент $\widetilde{\phi}^{+}$. Из формулы Грина (5.16) опять получаем формулу краевых форм

$$\langle \mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}x,\, y\rangle_p - \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_q = (\phi x)^{\top}S_m\big(\widehat{\phi}^{+}y\big) + \big(\widehat{\phi}x\big)^{\top}S_{2(\nu+1)n-m}\big(\phi^{+}y\big), \tag{5.18}$$

а для функций $x \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{P},\phi}$, $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R},\phi^{+}}$ (обозначения аналогичны обозначениям §4)

$$\langle \mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}x,\, y\rangle_p = \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi^{+}}y\rangle_q \tag{5.19}$$

$\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi},\ \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi^{+}}$ — сужения $\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}$, $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$ на $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{P},\phi}$, $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R},\phi^{+}}$ соответственно$\big)$.

Из формул (5.18), (5.19), рассуждая как в § 4, придем к следующим утверждениям.

Теорема 10. $\mathcal{R}\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}\big) = {}^{\perp}\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi^{+}}\big)$ (*и следовательно, образ* $\mathcal{R}\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}\big)$ *замкнут*); $\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}\big)^{*} = \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi^{+}}$, $\quad \big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi^{+}}\big)^{*} = \mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}$.

Теорема 11. *Уравнение* $\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}x = f$ *нормально разрешимо,* $\kappa\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta}}{}_{\phi}\big) = 2(\nu+1)n - m$.

Согласно теореме 10 краевая задача, сопряженная задаче (5.14), (5.15), имеет вид (см. (5.17))

$$\big(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}y\big)(t) = g(t) \quad (t \in J,\ f \in \mathbb{L}_p[a,b]), \qquad \phi^{+}y = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 781 с.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. М.: Иностр. лит., 1953. 346 с.
5. Коддингтон Э. Ф., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит., 1958. 474 с.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1959. 468 с.
9. Дерр В. Я. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2010. 106 с.
10. Ландо Ю. К. Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 6. С. 1112–1126.
11. Пархимович И. В. Многоточечные краевые задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений в классах гладких функций // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 3. С. 549–552.
12. Пархимович И. В. О построении s-сопряженных операторов к интегро-дифференциальным // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 8. С. 1486–1493.
13. Tvrdy M., Veivoda O. General boundary value problems for an integrodifferential system and its adjoints // Čas. pestov. math. 1973. Vol. 97. P. 26–42.

14. Tvrdy M., Veivoda O. General boundary value problems for an integrodifferential system and its adjoints // Čas. pestov. math. 1974. Vol. 98. P. 399–419.
15. Schwabik S., Tvrdy M., Veivoda O. Differential and integral equations: boundary value problems and adjoints. Prague: Academia, 1979. 246 p.
16. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.
17. Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Сопряженное уравнение для общей линейной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 11. С. 1966–1973.
18. Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи / Удм. гос. ун-т; Ижевск, 1984. 40 с. Деп. в ВИНИТИ, 11.05.84. № 2994-84.
19. Дерр В. Я. Сопряженное уравнение для линейной функционально-квазидифференциальной краевой задачи // Краевые задачи. Пермь. 1985. С. 48–52.
20. Cole R. The expansion problem with boundary conditions at a finite set points // Canad. J. Math. 1961. Vol. 13. P. 462–479.
21. Cole R. General boundary conditions for an ordinary lineary differential system // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 3. P. 521–550.
22. Krall A. M. Differential operators and their adjoints under integral and multie point boundary conditions // J. Different. Equat. 1964. Vol. 4, № 3. P. 326–336.
23. Krall A. M. Boundary value problems with interior-point boundary conditions // Pacific J. Math. 1969. Vol. 29. P. 561–570.
24. Zettl A. Adjoint and selfadjoint boundary value problems with interface conditions // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16. P. 852–859.
25. Bryan R. N. Adjoint interior-point boundary value conditions for lineary differential operators // Canad. Math. Bul. 1977. Vol. 20. P. 447–450.
26. Brown R. C., Tvrdy M. Generalised boundary value problems with abstract side conditions and their adjoints // Czechoslovak. Math. J. 1980. Vol. 31 (160). P. 501–509.
27. Elias U. The extremal solutions of the equation $Ly + p(x)y = 0$ // J. of Math. anal. and appl. 1975. № 55. P. 253–265.
28. Kusano T., Naito M. Oscillation criteria of general linear ordinary differential equations // Pacific J. of Math. 1981. Vol. 92, № 2. P. 345–358.
29. Nehari Z. Disconjugate linear differential operators // Trans. Amer. J. Math. Soc. 1969. Vol. 129. P. 500–516.
30. Trench W. F. Canonical forms and principal systems for general disconjugate equations // Trans. Amer. J. Math. Soc. 1974. Vol. 189. P. 319–327.
31. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 1 (16). С. 3–105.
32. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сб. 1940. Т. 7 (49). С. 479–532.
33. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 126 с.
34. Азбелев Н. В. О некоторых тенденциях в обобщениях дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 8. С. 1291–1304.
35. Анохин А. В. О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1037–1040.
36. Покорный Ю. В. О неклассической задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 6. С. 1018–1027.
37. Покорный Ю. В. О переопределенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 4. С. 761.
38. Покорный Ю. В., Лазарев К. П. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач. 1987. Т. 23, № 4. С. 658–670.
39. Das P. C., Prasad U. S. Adjoints and selfadjointness for a differential operator with varying structure // Proc. of Royal Soc. of Edinburgh. 1982. Vol. 93A. P. 15–34.
40. Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 11. С. 105–112.
41. Литманович О. Ю. Спектральные свойства функции Грина. Интегральные преобразования с конечными пределами // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 1995. 139 с.

42. Бравый Е. И. Линейные функционально-дифференциальные уравнения с внутренними сингулярностями // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1996. 107 с.

Поступила в редакцию 10.05.11

V. Ya. Derr

On an adequate description of adjoint operator

We study multipoint boundary value problems for quasidifferential equations, under certain (broad) assumptions on the coefficients of the equation so that there exists the formally adjoint (in the sense of Lagrange) quasidifferential equation. The operator corresponding to the original boundary value problem is densely defined in a reflexive Banachian space and has closed image in its adjoint; the operator corresponding to the adjoint problem has exactly the same properties. We note that the adjoint boundary value problem is not classical: its solution satisfies the quasidifferential equation only in the open intervals between points in which boundary conditions are specified. These considerations lead us to the notion of the generalized boundary value problem. In particular, we introduce the notion of the generalized Valle-Pousin problem (GVPP), where the number of boundary conditions may exceed the order of the equation by allowing higher quasiderivatives of the solution to be discontinuous at the interior points in which boundary conditions are specified. We also show that the boundary value problem adjoint to GVPP is itself a GVPP.

Keywords: Green formula, formula of boundary forms, adjoint operator, adjoint boundary value problem.

Mathematical Subject Classifications: 34B10, 47A05

Дерр Василий Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: derr@uni.udm.ru

Derr Vasilii Yakovlevich, doctor of physics and mathematics, professor, department of mathematical analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.