УДК 517.917

© *М. И. Гомоюнов*

К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИИ В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ[1]

Для динамической системы, подверженной воздействиям управления и помехи и содержащей последействие в управляющих силах, рассматривается задача об управлении с оптимальным гарантированным результатом для показателя качества, представляющего собой евклидову норму совокупности отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целей. На основе функциональной трактовки, опирающейся на своеобразный прогноз движений, исходная задача сводится к вспомогательной дифференциальной игре для системы без запаздывания и с терминальной платой. Функция цены этой игры вычисляется на базе конструкции выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из метода стохастического программного синтеза, оптимальные стратегии строятся методом экстремального сдвига на сопутствующие точки. Рассматриваются иллюстрирующие примеры, приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные игры, запаздывание по управлению.

Введение

В рамках теоретико-игрового подхода [1–3] для линейной динамической системы, подверженной воздействиям управления и неконтролируемой помехи и содержащей последействие в управляющих силах [4–6], рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи с показателем качества, представляющим собой евклидову норму совокупности отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целей.

Известны методы решения рассматриваемой задачи в случае, когда показатель качества является терминальным [5, 6], то есть не содержит промежуточных моментов времени оценки движения, а также в случае, когда отсутствует эффект запаздывания в управлении [3, 7, 8]. В настоящей статье предложенные в этих работах конструкции развиваются для общего случая одновременного наличия как запаздывания по управлению, так и промежуточных оценок качества движения.

На основе функциональной трактовки процесса управления, опирающейся на своеобразный прогноз движений, исходная задача сводится к вычислению функции цены и построению оптимальных стратегий во вспомогательных дифференциальных играх для систем без запаздывания по управлению и с терминальной платой. Данная трактовка восходит к функциональному подходу, предложенному для систем с последействием в [9]. Подобная интерпретация процесса управления применялась также ранее, например, в [7, 10].

Функция цены вспомогательной дифференциальной игры вычисляется методом выпуклых сверху оболочек [3, 11], оптимальные стратегии строятся методом экстремального сдвига на сопутствующие точки [2, 3].

Полученные разрешающие конструкции иллюстрируются на примерах, приводятся результаты численных экспериментов.

§ 1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_\tau(t)u(t-\tau) + C(t)v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \tag{1.1}$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s, \quad \tau = const > 0.$$

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1015), а также РФФИ (проект 09-01-00313).

Здесь x — фазовый вектор, $\dot{x}(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$, u — вектор управления, v — вектор помехи, t_0 и ϑ — начальный и терминальный моменты времени соответственно, P и Q — известные компакты, матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $B_\tau(t)$ и $C(t)$ кусочно-непрерывны, τ — величина запаздывания. Задано начальное состояние системы

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$u_{t_0}(\cdot) = \big\{u_{t_0}(\xi) = u(t_0 + \xi),\ \xi \in [-\tau, 0)\big\} = p_0(\cdot). \tag{1.3}$$

На значение x_0 фазового вектора в начальный момент времени t_0 наложено ограничение $\|x_0\| \leqslant R$, где R достаточно большое число. Символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму соответствующего вектора. Предыстория управления $p_0(\cdot)$ выбирается из множества $\mathbf{U}$ измеримых по Борелю вектор-функций из $[-\tau, 0)$ в P.

Всякую тройку $\{t, x, p(\cdot)\}$, где $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p(\cdot) \in \mathbf{U}$, назовем позицией системы (1.1). Обозначим

$$R(t) = (1 + R)e^{\lambda(t - t_0)} - 1,$$

где

$$\lambda = \max\left\{\max_{t \in [t_0, \vartheta], \|x\| \leqslant 1} \|A(t)x\|, \max_{t \in [t_0, \vartheta], u \in P, u_\tau \in P, v \in Q} \|B(t)u + B_\tau(t)u_\tau + C(t)v\|\right\}.$$

Определим множество S возможных позиций

$$S = \big\{\{t, x, p(\cdot)\} \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U} : \|x\| \leqslant R(t)\big\}.$$

Допустимыми считаем измеримые по Борелю реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta) = \big\{u(t) \in P,\ t \in [t_0, \vartheta)\big\}$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta) = \big\{v(t) \in Q,\ t \in [t_0, \vartheta)\big\}$. При этом в соответствии с условием (1.3) реализацию управления $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ доопределяем при $t \in [t_0 - \tau, t_0)$, полагая $u(t) = p_0(t - t_0)$. Из начальной позиции $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$ пара реализаций $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ единственным образом порождает движение $x[t_0[\cdot]\vartheta] = \big\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \in [t_0, \vartheta]\big\}$, где $x(t)$ — удовлетворяющая условию (1.2) абсолютно непрерывная вектор-функция, которая вместе с $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет равенству (1.1). Для всякого из возможных движений $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ справедливо неравенство $\|x(t)\| \leqslant R(t)$, поэтому при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ имеет место включение $\{t, x(t), u_t(\cdot)\} \in S$, где $u_t(\cdot) = \big\{u_t(\xi) = u(t + \xi),\ \xi \in [-\tau, 0)\big\}$.

Пусть заданы натуральное число N и моменты времени $t_i \in [t_0, \vartheta]$, $i = \overline{1, N}$ такие, что $t_{i+1} > t_i$, $i = \overline{1, N-1}$, и $t_N = \vartheta$. Для каждого момента t_i заданы постоянная $(p_i \times n)$-матрица D_i, $1 \leqslant p_i \leqslant n$ и целевой вектор $c_i \in \mathbb{R}^n$. Показатель γ качества движения $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ имеет вид

$$\gamma = \gamma\big(x[t_0[\cdot]\vartheta]\big) = \left(\sum_{i=1}^{N} \|D_i(x(t_i) - c_i)\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Цель задачи управления — доставить показателю γ как можно меньшее значение. При этом действия помехи неизвестны и, в частности, могут быть нацелены на максимизацию γ.

Замечание 1. Показатель γ из (1.4) может быть дан изначально или такой функционал вводится как аппроксимирующий для исходного показателя качества

$$\gamma_* = \left(\int_{t_0}^{\vartheta} \|D(t)(x(t) - c(t))\|^2\, dt\right)^{1/2},$$

где $D(t)$ — известная кусочно-постоянная матрица-функция, $c(t)$ — заданная кусочно-непрерывная вектор-функция.

Дальнейшая формализация задачи проводится в рамках концепции, изложенной в [2, 3].

Допустимой стратегией управления $U(\cdot)$ называем произвольную функцию

$$U(\cdot) = \Big\{U\big(t, x, p(\cdot), \varepsilon\big) \in P :\ \{t, x, p(\cdot)\} \in S,\ \varepsilon > 0\Big\},$$

где ε — параметр точности, выбираемый до начала процесса управления. Его значение остается неизменным при всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Стратегия $U(\cdot)$ действует на систему (1.1) в дискретной по времени схеме на базе некоторого разбиения

$$\Delta_\delta = \{\tau_j : \tau_1 = t_0,\, 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leqslant \delta,\, j = \overline{1, J},\, \tau_{J+1} = \vartheta\}. \tag{1.5}$$

Тройка $\{U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет допустимый закон управления $\mathcal{U}$, который по шагам разбиения Δ_δ в цепи обратной связи формирует кусочно-постоянную реализацию управления $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ согласно правилу

$$u(t) = U\big(\tau_j, x(\tau_j), u_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon\big), \quad u_{\tau_j}(\cdot) = \big\{u_{\tau_j}(\xi) = u(\tau_j + \xi),\, \xi \in [-\tau, 0)\big\}, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J}.$$

Таким образом, из начальной позиции $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$ закон управления $\mathcal{U} = \{U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ в паре со случившейся реализацией $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ единственным образом определяет реализацию движения $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ как решение пошагового уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)U\big(\tau_j, x(\tau_j), u_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon\big) + B_\tau(t)u_{\tau_j}(-\tau) + C(t)v(t), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J},$$

с начальным условием $x(\tau_1) = x_0$. При этом начальное значение фазового вектора $x(\tau_j)$ для промежутка $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ при $j > 1$ совпадает с конечным значением фазового вектора $x(\tau_j)$ для предыдущего промежутка $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$. Значение показателя качества (1.4), реализовавшееся на этом движении, обозначим через $\gamma\big(U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, v[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big)$.

Гарантированным результатом для фиксированной стратегии $U(\cdot)$ и начальной позиции $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$ называем величину

$$\Gamma_u\big[U(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big] = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \lim_{\delta \to 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[t_0[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, v[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big), \tag{1.6}$$

где верхняя грань вычисляется по всем возможным разбиениям (1.5) и допустимым реализациям помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$. Из данного определения следует

Утверждение 1. *Пусть заданы стратегия $U(\cdot)$ и начальная позиция $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$. Тогда для любого $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon(\zeta) > 0$ и функция $\delta(\zeta, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$ такие, что, каковы бы ни были закон управления $\mathcal{U} = \{U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и допустимая реализация помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, имеет место неравенство*

$$\gamma\big(U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, v[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big) \leqslant \Gamma_u\big[U(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big] + \zeta,$$

если только

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta), \quad 0 < \delta \leqslant \delta(\zeta, \varepsilon). \tag{1.7}$$

Значение $\Gamma_u\big[U(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big]$ — наименьшее из чисел, обладающих подобным свойством.

Величина оптимального гарантированного результата управления определяется следующим образом:

$$\Gamma_u^0\big(t_0, x_0, p_0(\cdot)\big) = \inf_{U(\cdot)} \Gamma_u\big[U(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big], \tag{1.8}$$

где нижняя грань вычисляется на допустимых стратегиях управления. Если эта нижняя грань достигается, то соответствующую стратегию $U^0(\cdot)$ называем оптимальной.

Задача заключается в том, чтобы найти величину оптимального гарантированного результата $\Gamma_u^0\big(t_0, x_0, p_0(\cdot)\big)$ и построить оптимальную стратегию $U^0(\cdot)$.

Для дальнейших рассуждений потребуется также дополнительно рассмотреть задачу о формировании самых неблагоприятных (с точки зрения целей управления) воздействий помехи, то есть воздействий, нацеленных на максимизацию показателя качества γ. При этом допустимой стратегией помехи $V(\cdot)$ будем считать произвольную функцию

$$V(\cdot) = \Big\{V\big(t, x, p(\cdot), \varepsilon\big) \in Q : \{t, x, p(\cdot)\} \in S,\, \varepsilon > 0\Big\}.$$

Допустимый закон формирования помехи $\mathcal{V}$ на базе стратегии $V(\cdot)$ будем отождествлять с тройкой $\{V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$. Из начальной позиции $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$ в паре с какой-либо допустимой реализацией управления $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ закон $\mathcal{V}$ однозначно порождает реализацию движения системы (1.1) как решение пошагового уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_\tau(t)u(t-\tau) + C(t)V\big(\tau_j, x[\tau_j], u_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J}.$$

Реализовавшееся на этом движении значение показателя качества (1.4) будем обозначать через $\gamma\big(V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, u[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big)$. Соответственно гарантированный результат для фиксированной стратегии $V(\cdot)$ из начальной позиции $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$ и контроптимальный гарантированный результат воздействий помехи определяются следующим образом:

$$\Gamma_v\big[V(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big] = \varliminf_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[t_0[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, u[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big), \tag{1.9}$$

$$\Gamma_v^0\big(t_0, x_0, p_0(\cdot)\big) = \sup_{V(\cdot)} \Gamma_v\big[V(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big]. \tag{1.10}$$

Подобно утверждению 1 имеет место

Утверждение 2. *Пусть заданы стратегия $V(\cdot)$ и начальная позиция $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$. Тогда для любого $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon(\zeta) > 0$ и функция $\delta(\zeta, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$ такие, что, каковы бы ни были закон формирования помехи $\mathcal{V} = \{V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и допустимая реализация управления $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, при условии (1.7) будет справедливо неравенство*

$$\gamma\big(V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, u[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big) \geqslant \Gamma_v\big[V(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big] - \zeta.$$

Значение $\Gamma_v\big[V(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big]$ — наибольшее из чисел, обладающих подобным свойством.

Если в (1.10) верхняя грань достигается, то соответствующую стратегию помехи $V^0(\cdot)$ называем контроптимальной.

Следующая лемма вытекает (см., например, [2, с. 82]) непосредственно из определений гарантированных результатов (1.6) и (1.9).

Лемма 1. *Для любой начальной позиции $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$, каковы бы ни были стратегии $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, справедливо неравенство*

$$\Gamma_u\big[U(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big] \geqslant \Gamma_v\big[V(\cdot);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big].$$

§ 2. Вспомогательная дифференциальная игра

Для описания вспомогательной дифференциальной игры, на базе которой будет построено решение поставленной задачи, рассмотрим следующие предварительные построения.

Пусть $k = \overline{1, N}$, $\{t, x, p(\cdot)\} \in S$, $t \in [t_0, t_k)$. Здесь t_k — момент времени оценки качества движения из показателя (1.4). Обозначим

$$w_k\big(t, x, p(\cdot)\big) = D_k \left(X(t_k, t)x + \int_{-\tau}^{0} X(t_k, t+\xi+\tau) B_\tau(t+\xi+\tau) \chi(t_k - t - \xi - \tau) p(\xi) d\xi - c_k \right), \tag{2.1}$$

где $X(t, \xi)$ — матрица Коши для системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$; $\chi(t)$ — функция Хевисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Справедлива оценка

$$\|w_k\big(t, x, p(\cdot)\big)\| \leqslant W_k, \quad \{t, x, p(\cdot)\} \in S, \quad t \in [t_0, t_k), \tag{2.2}$$

где

$$W_k = \max_{t\in[t_0,t_k],\|x\|\leqslant 1} \|D_k X(t_k,t)x\|R(\vartheta) + \tau \max_{t\in[t_0,t_k],u\in P} \|D_k X(t_k,t)B_\tau(t)u\| + \|D_k c_k\|. \tag{2.3}$$

Пусть $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ — движение системы (1.1), порожденное из позиции $\{t_0,x_0,p_0(\cdot)\}\in S$ допустимыми реализациями $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$. Рассмотрим величину $w_k(t) = w_k\big(t,x(t),u_t(\cdot)\big)$, где $u_t(\cdot) = \big\{u_t(\xi) = u(t+\xi),\, \xi\in[-\tau,0)\big\}$. Учитывая соотношение (2.1), при почти всех $t\in[t_0,t_k)$ имеет место равенство

$$\dot w_k(t) = D_k\big(X(t_k,t)B(t) + X(t_k,t+\tau)B_\tau(t+\tau)\chi(t_k-t-\tau)\big)u(t) + D_k X(t_k,t)C(t)v(t).$$

Определим вспомогательную z_k-систему. Пусть z_k — p_k-мерный фазовый вектор этой системы, а его эволюция подчинена уравнению

$$\dot z_k = B_k(t)u + C_k(t)v, \quad t_0\leqslant t\leqslant\vartheta, \tag{2.4}$$

где

$$B_k(t) = D_k\big(X(t_k,t)B(t) + X(t_k,t+\tau)B_\tau(t+\tau)\chi(t_k-t-\tau)\big)\chi(t_k-t),$$
$$C_k(t) = D_k X(t_k,t)C(t)\chi(t_k-t).$$

Следующая лемма устанавливает связь между изменением величины (2.1) в силу исходной системы (1.1) и движением вспомогательной z_k-системы (2.4).

Лемма 2. *Пусть $\{t_*,x_*,p_*(\cdot)\}\in S$, $t_*\in[t_0,t_k)$ и $t^*\in(t_*,\vartheta]$. Пусть $x[t_*[\cdot]t^*] = \big\{x(t)\in\mathbb{R}^n,\, t\in[t_*,t^*]\big\}$ — решение системы* (1.1)*, порожденное измеримыми по Борелю реализациями $u[t_*[\cdot]t^*) = \big\{u(t)\in P,\, t\in[t_*,t^*)\big\}$ и $v[t_*[\cdot]t^*) = \big\{v(t)\in Q,\, t\in[t_*,t^*)\big\}$ при условиях $x(t_*) = x_*$ и $u(t-\tau) = p_*(t-t_*)$ для $t\in[t_*-\tau,t_*)$, а $z_k[t_*[\cdot]t^*] = \big\{z_k(t)\in\mathbb{R}^{p_k},\, t\in[t_*,t^*]\big\}$ — решение системы* (2.4) *при тех же самых реализациях $u[t_*[\cdot]t^*)$ и $v[t_*[\cdot]t^*)$, которое удовлетворяет условию $z_k(t_*) = w_k\big(t_*,x_*,p_*(\cdot)\big)$. Тогда*

$$z_k(t^*) = \begin{cases} w_k\big(t^*,x(t^*),u_{t^*}(\cdot)\big), & \text{если } t^*<t_k,\\ D_k\big(x(t_k)-c_k\big), & \text{если } t_k\leqslant t^*,\end{cases}$$

где $u_{t^*}(\cdot) = \big\{u_{t^*}(\xi) = u(t^*+\xi),\, \xi\in[-\tau,0)\big\}$.

Справедливость этой леммы можно проверить непосредственно, опираясь на формулу Коши и свойства матрицы $X(t,\xi)$.

Теперь зафиксируем $i=\overline{0,N-1}$ и для $t\in[t_i,t_{i+1})$ введем следующий информационный образ позиции $\{t,x,p(\cdot)\}\in S:$

$$\mathbf{w}^{[i]}\big(t,x,p(\cdot)\big) = \Big\{w_k\big(t,x,p(\cdot)\big)\in\mathbb{R}^{p_k},\ k=\overline{i+1,N}\Big\}\in\mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[i]}}, \quad \mathbf{p}^{[i]} = \sum_{k=i+1}^{N} p_k. \tag{2.5}$$

Здесь и далее подобная запись означает, что первые p_{i+1} координат $\mathbf{p}^{[i]}$-мерного вектора $\mathbf{w}^{[i]}$ совпадают с координатами вектора w_{i+1}, следующие p_{i+2} координаты – с координатами w_{i+2} и так далее, последние p_N координат совпадают с координатами вектора w_N.

Из $(p_k\times r)$-матриц $B_k(t)$ $(k=\overline{i+1,N})$ составим $(\mathbf{p}^{[i]}\times r)$-матрицу $\mathbf{B}^{[i]}(t)$ так, что первые p_{i+1} строк матрицы $\mathbf{B}^{[i]}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_{i+1}(t)$, следующие p_{i+2} строк — со строками $B_{i+2}(t)$ и так далее, последние p_N строк совпадают со строками матрицы $B_N(t)$. По такому же правилу из $(p_k\times s)$-матриц $C_k(t)$ $(k=\overline{i+1,N})$ составим $(\mathbf{p}^{[i]}\times s)$-матрицу $\mathbf{C}^{[i]}(t)$. Определим вспомогательную $\mathbf{z}^{[i]}$-систему. Пусть $\mathbf{z}^{[i]} = \big\{z_k^{[i]}\in\mathbb{R}^{p_k},\, k=\overline{i+1,N}\big\}$ — фазовый вектор этой системы размерности $\mathbf{p}^{[i]}$, а его эволюция подчинена уравнению

$$\dot{\mathbf{z}}^{[i]} = \mathbf{B}^{[i]}(t)u + \mathbf{C}^{[i]}(t)v, \quad t_0\leqslant t\leqslant\vartheta. \tag{2.6}$$

Заданному в момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$ состоянию $\mathbf{z}_*^{[i]} \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[i]}}$ и допустимым реализациям $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ однозначно соответствует решение $\mathbf{z}^{[i]}[t_0[\cdot]\vartheta] = \big\{\mathbf{z}^{[i]}(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[i]}},\ t \in [t_0, \vartheta]\big\}$ системы (2.6), которое удовлетворяет условию $\mathbf{z}^{[i]}(t_*) = \mathbf{z}_*^{[i]}$.

Учитывая связь между системами (2.4) и (2.6), из леммы 2 следует

Лемма 3. *Пусть* $\{t_*, x_*, p_*(\cdot)\} \in S$, $t_* \in [t_i, t_{i+1})$ *и* $t^* \in (t_*, \vartheta]$. *Пусть* $x[t_*[\cdot]t^*]$ *— решение системы* (1.1)*, порожденное реализациями* $u[t_*[\cdot]t^*)$ *и* $v[t_*[\cdot]t^*)$ *при условиях* $x(t_*) = x_*$ *и* $u(t-\tau) = p_*(t - t_*)$ *для* $t \in [t_* - \tau, t_*)$*, а* $\mathbf{z}^{[i]}[t_*[\cdot]t^*]$ *— решение системы* (2.6) *при тех же самых реализациях* $u[t_*[\cdot]t^*)$ *и* $v[t_*[\cdot]t^*)$*, которое удовлетворяет условию* $\mathbf{z}^{[i]}(t_*) = \mathbf{w}^{[i]}\big(t_*, x_*, p_*(\cdot)\big)$. *Тогда для любого* $k = \overline{i+1, N}$ *имеем*

$$z_k^{[i]}(t^*) = \begin{cases} D_k\big(x(t_k) - c_k\big), & \text{если } t_k \leqslant t^*, \\ w_k\big(t^*, x(t^*), u_{t^*}(\cdot)\big), & \text{если } t_k > t^*. \end{cases}$$

Вспомогательная дифференциальная игра рассматривается для системы (2.6) с начальным условием
$$\mathbf{z}^{[i]}(t_i) = \mathbf{z}_*^{[i]} \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[i]}} \tag{2.7}$$
при показателе качества
$$\gamma^{[i]} = \|\mathbf{z}^{[i]}(\vartheta)\|. \tag{2.8}$$

Первый игрок назначает воздействия управления $u \in P$ и нацелен минимизировать $\gamma^{[i]}$. Второй игрок распоряжается воздействиями помехи $v \in Q$ и нацелен максимизировать $\gamma^{[i]}$.

Позицией игры (2.6)–(2.8) называем пару $\{t, \mathbf{z}^{[i]}\}$. Множество $\mathbf{S}^{[i]}$ возможных позиций определим следующим образом:

$$\mathbf{S}^{[i]} = \Big\{\big\{t, \mathbf{z}^{[i]} = \{z_k^{[i]},\ k = \overline{i+1, N}\}\big\} \in [t_i, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[i]}} : \|z_k^{[i]}\| \leqslant Z_k(t),\ k = \overline{i+1, N}\Big\}, \tag{2.9}$$

где
$$Z_k(t) = W_k + (t - t_0) \max_{t \in [t_0, \vartheta], u \in P, v \in Q} \|B_k(t)u + C_k(t)v\|.$$

Соответственно на значение фазового вектора $\mathbf{z}_*^{[i]}$ в момент времени t_i наложим ограничение $\{t_i, \mathbf{z}_*^{[i]}\} \in \mathbf{S}^{[i]}$.

Известно (см., например, [2, с. 231], [3, с. 65]), что игра (2.6)–(2.8) имеет цену $\rho^{[i]}\big(t_i, \mathbf{z}_*^{[i]}\big)$ и седловую точку, складывающуюся из равномерно оптимальных [2, с. 70] минимаксной стратегии управления $\mathbf{u}_0^{[i]}(t, \mathbf{z}^{[i]}, \varepsilon) \in P$ и максиминной стратегии помехи $\mathbf{v}_0^{[i]}(t, \mathbf{z}^{[i]}, \varepsilon) \in Q$, где $\{t, \mathbf{z}^{[i]}\} \in \mathbf{S}^{[i]}$, $\varepsilon > 0$. В частности, имеют место следующие утверждения, характеризующие свойство оптимальности этих стратегий.

Утверждение 3. *Для любого* $\zeta_i > 0$ *найдутся число* $\varepsilon_i(\zeta_i) > 0$ *и функция* $\delta_i(\zeta_i, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_i(\zeta_i)$ *такие, что, каковы бы ни были* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_i(\zeta_i)$ *и* $0 < \delta \leqslant \delta_i(\zeta_i, \varepsilon)$*, для всякого движения* $\mathbf{z}^{[i]}[t_i[\cdot]\vartheta]$ *системы* (2.6)*, порожденного в согласии с* (2.7) *из начальной позиции* $\{t_i, \mathbf{z}_*^{[i]}\} \in \mathbf{S}^{[i]}$ *какой-либо допустимой реализацией помехи* $v[t_i[\cdot]\vartheta)$ *и законом управления* $\mathcal{U}^{[i]} = \big\{\mathbf{u}_0^{[i]}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta^{[i]}\big\}$*, назначающим управляющие воздействия по шагам разбиения*

$$\Delta_\delta^{[i]} = \big\{\xi_j : \xi_1 = t_i,\ 0 < \xi_{j+1} - \xi_j \leqslant \delta,\ j = \overline{1, J},\ \tau_{J+1} = \vartheta\big\} \tag{2.10}$$

согласно правилу
$$u(t) = \mathbf{u}_0^{[i]}\Big(\xi_j, \mathbf{z}^{[i]}(\xi_j), \varepsilon\Big), \quad t \in [\xi_j, \xi_{j+1}),$$

будет справедливо неравенство
$$\gamma^{[i]} \leqslant \rho^{[i]}\big(t, \mathbf{z}_*^{[i]}\big) + \zeta_i.$$

Утверждение 4. *Для любого* $\overline{\zeta}_i > 0$ *найдутся число* $\overline{\varepsilon}_i(\overline{\zeta}_i) > 0$ *и функция* $\overline{\delta}_i(\overline{\zeta}_i, \overline{\varepsilon}) > 0$, $0 < \overline{\varepsilon} \leqslant \overline{\varepsilon}_i(\overline{\zeta}_i)$ *такие, что, каковы бы ни были* $0 < \overline{\varepsilon} \leqslant \overline{\varepsilon}_i(\overline{\zeta}_i)$ *и* $0 < \overline{\delta} \leqslant \overline{\delta}_i(\overline{\zeta}_i, \overline{\varepsilon})$, *для всякого движения* $\mathbf{z}^{[i]}[t_i[\cdot]\vartheta]$ *системы* (2.6), *порожденного в согласии с* (2.7) *из начальной позиции* $\{t_i, \mathbf{z}^{[i]}_*\} \in \mathbf{S}^{[i]}$ *какой-либо допустимой реализацией управления* $u[t_i[\cdot]\vartheta)$ *и законом* $\mathcal{V}^{[i]} = \{\mathbf{v}^{[i]}_0(\cdot), \varepsilon, \Delta^{[i]}_{\overline{\delta}}\}$, *назначающим воздействия помехи по шагам разбиения* (2.10) *согласно правилу*

$$v(t) = \mathbf{v}^{[i]}_0\left(\xi_j, \mathbf{z}^{[i]}(\xi_j), \varepsilon\right), \quad t \in [\xi_j, \xi_{j+1}),$$

имеет место неравенство

$$\gamma^{[i]} \geqslant \rho^{[i]}\big(t, \mathbf{z}^{[i]}_*\big) - \overline{\zeta}_i.$$

Отметим также, что из определения (2.9) следует, что для всех рассматриваемых движений $\mathbf{z}^{[i]}[t_i[\cdot]\vartheta]$ системы (2.6) выполняется включение $\{t, \mathbf{z}^{[i]}(t)\} \in \mathbf{S}^{[i]}$, $t \in [t_i, \vartheta]$. Отсюда при $t = \vartheta$ получаем равномерную по начальной позиции $\{t_i, \mathbf{z}^{[i]}_*\} \in \mathbf{S}^{[i]}$ оценку терминального состояния $\|\mathbf{z}^{[i]}(\vartheta)\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=i+1}^{N} Z^2_k(\vartheta)$, из которой, если учесть оценку (2.2), вытекает

Лемма 4. *Для каждого* $i = \overline{0, N-1}$ *найдется такая константа* $R_i > 0$, *что для всех* $\{t_i, x, p(\cdot)\} \in S$ *справедливо неравенство*

$$\rho^{[i]}\left(t_i, \mathbf{w}^{[i]}\big(t_i, x, p(\cdot)\big)\right) \leqslant R_i.$$

§ 3. Связь исходной задачи со вспомогательной дифференциальной игрой

Следующая теорема сводит исходную задачу нахождения величины оптимального гарантированного результата управления в системе (1.1)–(1.4) и построения соответствующей оптимальной стратегии управления, обеспечивающей достижение этого результата, к задаче поиска цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре (2.6)–(2.8).

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\Gamma^0_u\big(t_0, x_0, p_0(\cdot)\big) = \rho^{[0]}\left(t_0, \mathbf{w}^{[0]}\big(t_0, x_0, p_0(\cdot)\big)\right), \quad \{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S.$$

Стратегия

$$\begin{gathered} U^0\big(t, x, p(\cdot), \varepsilon\big) = \mathbf{u}^{[i]}_0\left(t, \mathbf{w}^{[i]}\big(t, x, p(\cdot)\big), \varepsilon\right), \\ \{t, x, p(\cdot)\} \in S, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = \overline{0, N-1}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

является оптимальной в задаче (1.1)–(1.4).

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 5. *Для любого* $\zeta > 0$ *найдутся число* $\varepsilon(\zeta) > 0$ *и функция* $\delta(\zeta, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$ *такие, что, каковы бы ни были позиция* $\{t_0, x_0, p_0(\cdot)\} \in S$, *значение параметра точности* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$, *разбиение* (1.5) *с шагом* $0 < \delta \leqslant \delta(\zeta, \varepsilon)$ *и допустимая реализация помехи* $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, *для стратегии* (3.1) *справедливо неравенство*

$$\gamma\big(U^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta;\, v[t_0[\cdot]\vartheta);\, t_0, x_0, p_0(\cdot)\big) \leqslant \rho^{[0]}\left(t_0, \mathbf{w}^{[0]}\big(t_0, x_0, p_0(\cdot)\big)\right) + \zeta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксировав $\zeta > 0$, выберем числа $\zeta_i = \zeta_i(\zeta) > 0$, исходя из условий

$$\zeta_0 \leqslant \zeta/\sqrt{N}, \quad \zeta^2_i + 2\zeta_i R_i \leqslant \zeta^2_0, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{3.2}$$

где константы R_i взяты из леммы 4. Далее для так выбранных чисел ζ_i возьмем $\varepsilon_i(\zeta_i) > 0$ и $\delta_i(\varepsilon, \zeta_i) > 0$ из утверждения 3. Положим

$$\varepsilon(\zeta) = \min_{i=\overline{0,N-1}} \varepsilon_i(\zeta_i), \quad \delta(\zeta, \varepsilon) = \min_{i=\overline{0,N-1}} \delta_i(\zeta_i, \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta), \tag{3.3}$$

и покажем, что эти $\varepsilon(\zeta)$ и $\delta(\zeta,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям леммы.

Пусть $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(\zeta)$, $0<\delta\leqslant\delta(\zeta,\varepsilon)$. Для упрощения последующих рассуждений будем считать, что разбиение Δ_δ промежутка времени управления содержит все моменты t_i из показателя качества (1.4). Пусть $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ — движение системы (1.1), порожденное из начальной позиции $\{t_0,x_0,p_0(\cdot)\}\in S$ законом управления $\mathcal{U}=\big\{U^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\big\}$ в паре с некоторой допустимой реализацией помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, а $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ — соответствующая реализация управления. Отметим, что множество S возможных позиций исходной системы (1.1) и множество $\mathbf{S}^{[i]}$ возможных позиций вспомогательной игры (2.6)–(2.8) определены так, что при любом $i=\overline{0,N-1}$ имеет место включение

$$\Big\{t,\mathbf{w}^{[i]}\big(t,x(t),u_t(\cdot)\big)\Big\}\in\mathbf{S}^{[i]},\quad t\in[t_i,t_{i+1}).$$

Обозначим

$$\mathbf{w}^{[i]}=\mathbf{w}^{[i]}\big(t_i,x(t_i),u_{t_i}(\cdot)\big),\quad \rho^{[i]}=\rho^{[i]}\big(t_i,\mathbf{w}^{[i]}\big),\quad \Delta^{[i]}=\Delta_\delta\cap[t_i,\vartheta],\quad i=\overline{0,N-1}.$$

Зафиксируем $i=\overline{1,N-1}$ и некоторое $\overline{\zeta_i}>0$. Для этого $\overline{\zeta_i}$ возьмем $\overline{\varepsilon}_i(\overline{\zeta}_i)>0$ и $\overline{\delta}_i(\overline{\zeta}_i,\overline{\varepsilon})>0$ из утверждения 4. Пусть $0<\overline{\varepsilon}\leqslant\overline{\varepsilon}_i(\overline{\zeta}_i)$, $0<\overline{\delta}\leqslant\overline{\delta}_i(\overline{\zeta}_i,\overline{\varepsilon})$ и разбиение $\Delta^{[i]}_{\overline{\delta}}$ из (2.10) содержит точки t_k, $k=\overline{i+1,N}$, из показателя (1.4). Пусть $\mathbf{z}^{[i-1]}[t_{i-1}[\cdot]\vartheta]$ — движение вспомогательной $\mathbf{z}^{[i-1]}$-системы, порожденное из начальной позиции $\big\{t_{i-1},\mathbf{z}^{[i-1]}_*=\mathbf{w}^{[i-1]}\big\}\in\mathbf{S}^{[i-1]}$ законом управления $\mathcal{U}^{[i-1]}=\big\{\mathbf{u}^{[i-1]}_0(\cdot),\varepsilon,\Delta^{[i-1]}\big\}$, когда реализация помехи формировалась следующим образом: на промежутке времени $[t_{i-1},t_i)$ действовала зафиксированная выше реализация помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, а на промежутке $[t_i,\vartheta)$ реализация помехи формировалась законом $\mathcal{V}^{[i]}_*=\big\{\mathbf{v}^{[i]}_*(\cdot),\overline{\varepsilon},\Delta^{[i]}_{\overline{\delta}}\big\}$, где

$$\mathbf{v}^{[i]}_*\Big(t,\mathbf{z}^{[i-1]}=\big\{z^{[i-1]}_i,z^{[i-1]}_{i+1},\ldots,z^{[i-1]}_N\big\},\overline{\varepsilon}\Big)=\mathbf{v}^{[i]}_0\Big(t,\big\{z^{[i-1]}_{i+1},\ldots,z^{[i-1]}_N\big\},\overline{\varepsilon}\Big),\quad \big\{t,\mathbf{z}^{[i-1]}\big\}\in\mathbf{S}^{[i-1]}.$$

Подчеркнем, что в согласии с определением (2.9) включение $\{t,\mathbf{z}^{[i-1]}\}\in\mathbf{S}^{[i-1]}$, $t\in[t_i,\vartheta]$ влечет включение $\big\{t,\mathbf{z}^{[i]}=\big\{z^{[i-1]}_{i+1},\ldots,z^{[i-1]}_N\big\}\big\}\in\mathbf{S}^{[i]}$. Применяя лемму 3 на каждом шаге разбиения $\Delta^{[i-1]}\cap[t_{i-1},t_i]=\Delta_\delta\cap[t_{i-1},t_i]$ для соответствующих частей построенных движений $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\mathbf{z}^{[i-1]}[t_{i-1}[\cdot]\vartheta]$, получаем

$$z^{[i-1]}_i(t_i)=D_i\big(x(t_i)-c_i\big),\quad z^{[i-1]}_k(t_i)=w^{[i]}_k\big(t_i,x(t_i),u_{t_i}(\cdot)\big),\quad k=\overline{i+1,N}. \tag{3.4}$$

По выбору ε и δ (см. (3.2),(3.3)) в согласии с утверждением 3 имеем неравенство

$$\|\mathbf{z}^{[i-1]}(\vartheta)\|\leqslant\rho^{[i-1]}+\zeta_{i-1}. \tag{3.5}$$

Пусть $\mathbf{z}^{[i]}[t_i[\cdot]\vartheta]$ — движение вспомогательной $\mathbf{z}^{[i]}$-системы, порожденное из начальной позиции $\big\{t_i,\mathbf{z}^{[i]}_*=\mathbf{w}^{[i]}\big\}\in\mathbf{S}^{[i]}$ законом формирования помехи $\mathcal{V}^{[i]}=\big\{\mathbf{v}^{[i]}_0(\cdot),\overline{\varepsilon},\Delta^{[i]}_{\overline{\delta}}\big\}$ и законом управления $\mathcal{U}^{[i-1]}_*=\big\{\mathbf{u}^{[i-1]}_*(\cdot),\varepsilon,\Delta^{[i]}\big\}$, где

$$\mathbf{u}^{[i-1]}_*\big(t,\mathbf{z}^{[i]},\varepsilon\big)=\mathbf{u}^{[i-1]}_0\Big(t,\big\{D_i\big(x(t_i)-c_i\big),\mathbf{z}^{[i]}\big\},\varepsilon\Big),\quad \big\{t,\mathbf{z}^{[i]}\big\}\in\mathbf{S}^{[i]}.$$

Отметим, что включение $\big\{t,\mathbf{z}^{[i-1]}=\big\{D_i\big(x(t_i)-c_i\big),\mathbf{z}^{[i]}\big\}\big\}\in\mathbf{S}^{[i-1]}$ непосредственно вытекает из определения (2.9) и оценки $\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|\leqslant W_i$, справедливой в силу соотношений (2.1) и (2.2). Учитывая равенства $\mathbf{z}^{[i]}_*=\mathbf{w}^{[i]}$ и (3.4) получаем

$$z^{[i-1]}_k(t_i)=w^{[i]}_k\big(t_i,x(t_i),u_{t_i}(\cdot)\big)=z^{[i]}_k(t_i),\quad k=\overline{i+1,N}. \tag{3.6}$$

Напомним, что векторы $z^{[i-1]}_k(t)$ и $z^{[i]}_k(t)$ имеют одинаковую динамику z_k-системы (2.4), а пары законов $\mathcal{U}^{[i-1]}_*$, $\mathcal{V}^{[i-1]}$ и $\mathcal{U}^{[i]}$, $\mathcal{V}^{[i]}_*$ подобраны выше таким образом, чтобы формируемые ими реализации управляющих воздействий соответственно в $\mathbf{z}^{[i-1]}$-системе и $\mathbf{z}^{[i]}$-системе совпадали на промежутке $[t_i,\vartheta)$. Поэтому из равенства (3.6) вытекает равенство

$$z_k^{[i]}(\vartheta)=z_k^{[i-1]}(\vartheta),\quad k=\overline{i+1,N}. \tag{3.7}$$

По выбору $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\delta}$, в согласии с утверждением 4 имеет место неравенство

$$\|\mathbf{z}^{[i]}(\vartheta)\|\geqslant\rho^{[i]}-\overline{\zeta}_i. \tag{3.8}$$

Из (3.4), (3.5) и (3.7) выводим

$$\|\mathbf{z}^{[i]}(\vartheta)\|^2+\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|^2=\|\mathbf{z}^{[i-1]}(\vartheta)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[i-1]}+\zeta_{i-1}\Big)^2. \tag{3.9}$$

В силу (3.8) имеем

$$\|\mathbf{z}^{[i]}(\vartheta)\|^2+\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|^2\geqslant\Big(\max\Big\{0,\rho^{[i]}-\overline{\zeta}_i\Big\}\Big)^2+\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|^2. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10), учитывая произвольность $\overline{\zeta}_i>0$, получаем неравенство

$$\Big(\rho^{[i]}\Big)^2+\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[i-1]}+\zeta_{i-1}\Big)^2, \tag{3.11}$$

которое справедливо при любом $i=\overline{1,N}$ (в случае $i=N$ полагаем $\rho^{[N]}=0$).

Теперь докажем неравенство

$$\sum_{k=i}^{N}\|D_k\big(x(t_k)-c_k\big)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[i-1]}\Big)^2+\big(N-(i-1)\big)\zeta_0^2,\quad i=\overline{1,N}. \tag{3.12}$$

Будем рассуждать по индукции от $i=N$ до $i=1$. При $i=N$ в согласии с (3.11) и леммой 4, учитывая выбор (3.2) величины ζ_{N-1}, получаем

$$\|D_N(x(t_N)-c_N)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[N-1]}+\zeta_{N-1}\Big)^2=\Big(\rho^{[N-1]}\Big)^2+2\rho^{[N-1]}\zeta_{N-1}+\zeta_{N-1}^2\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\rho^{[N-1]}\Big)^2+2R_{N-1}\zeta_{N-1}+\zeta_{N-1}^2\leqslant\Big(\rho^{[N-1]}\Big)^2+\zeta_0^2.$$

Предположим далее, что при некотором $m=\overline{2,N-1}$ неравенство (3.12) справедливо для всех $i=\overline{m+1,N}$. Тогда, вновь используя соотношения (3.2), (3.11) и лемму 4, получаем следующую цепочку неравенств, которые доказывают справедливость неравенства (3.12) и при $i=m:$

$$\sum_{k=m}^{N}\|D_k\big(x(t_k)-c_k\big)\|^2=\sum_{k=m+1}^{N}\|D_k\big(x(t_k)-c_k\big)\|^2+\|D_m\big(x(t_m)-c_m\big)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[m]}\Big)^2+(N-m)\zeta_0^2+$$
$$+\|D_m\big(x(t_m)-c_m\big)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[m-1]}+\zeta_{m-1}\Big)^2+(N-m)\zeta_0^2=\Big(\rho^{[m-1]}\Big)^2+2\rho^{[m-1]}\zeta_{m-1}+\zeta_{m-1}^2+$$
$$+(N-m)\zeta_0^2\leqslant\Big(\rho^{[m-1]}\Big)^2+2R_{m-1}\zeta_{m-1}+\zeta_{m-1}^2+(N-m)\zeta_0^2\leqslant\Big(\rho^{[m-1]}\Big)^2+\big(N-(m-1)\big)\zeta_0^2.$$

Из (3.12) при $i=1$, учитывая (3.2), имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|^2\leqslant\Big(\rho^{[0]}\Big)^2+N\zeta_0^2\leqslant\Big(\rho^{[0]}\Big)^2+\zeta^2\leqslant\Big(\rho^{[0]}+\zeta\Big)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей этого неравенства, заключаем

$$\gamma\big(U^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta;\,v[t_0[\cdot]\vartheta);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)=\left(\sum_{i=1}^{N}\|D_i\big(x(t_i)-c_i\big)\|^2\right)^{1/2}\leqslant\rho^{[0]}\Big(t_0,\mathbf{w}^{[0]}\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\Big)+\zeta.$$

Лемма доказана. □

Подобным образом с понятными изменениями проверяется, что для стратегии формирования помехи

$$V^0\big(t,x,p(\cdot),\varepsilon\big)=\mathbf{v}_0^{[i]}\Big(t,\mathbf{w}^{[i]}\big(t,x,p(\cdot)\big),\varepsilon\Big),$$
$$\{t,x,p(\cdot)\}\in S,\quad \varepsilon>0,\quad t\in[t_i,t_{i+1}),\quad i=\overline{0,N-1}, \tag{3.13}$$

справедлива следующая

Лемма 6. *Для любого* $\zeta>0$ *найдутся число* $\varepsilon(\zeta)>0$ *и функция* $\delta(\zeta,\varepsilon)>0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(\zeta)$ *такие, что, каковы бы ни были позиция* $\{t_0,x_0,p_0(\cdot)\}\in S$, *значение параметра точности* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(\zeta)$, *разбиение* (1.5) *с шагом* $0<\delta\leqslant\delta(\zeta,\varepsilon)$ *и допустимая реализация управления* $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, *для стратегии* (3.13) *справедливо неравенство*

$$\gamma\big(V^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta;\,u[t_0[\cdot]\vartheta);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\geqslant\rho^{[0]}\Big(t_0,\mathbf{w}^{[0]}\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\Big)-\zeta.$$

Доказательство теоремы 1. Из утверждений 1, 2 и лемм 5, 6 следует, что имеют место неравенства

$$\Gamma_u\big[U^0(\cdot);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big]\leqslant\rho^0\Big(t_0,\mathbf{w}^{[0]}\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\Big)\leqslant\Gamma_v\big[V^0(\cdot);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big].$$

Если учесть лемму 1 и определение (1.8) оптимального гарантированного результата управления, из этих неравенств вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\Gamma_u^0\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\leqslant\Gamma_u\big[U^0(\cdot);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big]\leqslant\rho^{[0]}\Big(t_0,\mathbf{w}^{[0]}\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\Gamma_v\big[V^0(\cdot);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big]\leqslant\inf_{U(\cdot)}\Gamma_u\big[U(\cdot);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big]=\Gamma_u^0\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big),$$

которая доказывает равенство

$$\Gamma_u^0\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)=\Gamma_u\big[U^0(\cdot);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big]=\rho^{[0]}\Big(t_0,\mathbf{w}^{[0]}\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\Big),$$

а вместе с ним и теорему. □

Замечание 2. Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что стратегия (3.13) является оптимальной стратегией формирования помехи.

§ 4. Оценка оптимального гарантированного результата и построение оптимального закона управления

Применяя во вспомогательной дифференциальной игре (2.6)–(2.8) метод выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из стохастического программного синтеза (см. [11] и [3, с. 86–92]) — для вычисления цены игры и метод экстремального сдвига на сопутствующую точку (см. [2, с. 210] и [3, с. 117–121]) — для построения оптимальных стратегий, опираясь на теорему 1, приходим к следующей процедуре приближенного вычисления оптимального гарантированного результата (1.8) и построения закона управления, обеспечивающего его достижение.

Пусть выбрано разбиение

$$\Delta_k=\big\{\tau_j,\,\tau_1=t_0,\tau_j<\tau_{j+1},\,j=\overline{1,k},\,\tau_{k+1}=\vartheta\big\} \tag{4.1}$$

отрезка $[t_0,\vartheta]$, содержащее все точки разрыва матриц-функций $A(t)$, $B(t)$, $B_\tau(t)$ и $C(t)$, а также все моменты t_i из показателя качества (1.4). Пусть $\mathbf{l}=\big\{l_k\in\mathbb{R}^{p_k},\,k=\overline{1,N}\big\}\in\mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[0]}}$. Обозначим

$$\Delta\psi_j(\mathbf{l})=\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle\mathbf{l},\mathbf{B}^{[0]}(\xi)u+\mathbf{C}^{[0]}(\xi)v\rangle\,d\xi,$$

где символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение. Попятно по шагам разбиения Δ_k (4.1) построим последовательность функций $\varphi_j(\mathbf{l})$, $j=\overline{1,k+1}$, исходя из следующих рекуррентных соотношений:

$$\varphi_{k+1}(\mathbf{l})\equiv 0,\quad \psi_j(\mathbf{l})=\Delta\psi_j(\mathbf{l})+\varphi_{j+1}(\mathbf{l}),\quad \varphi_j(\mathbf{l})=\big\{\psi_j(\mathbf{l})\big\}^*,\quad j=\overline{1,k},$$

где символ $\big\{\psi_j(\mathbf{l})\big\}^*$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi_j(\mathbf{l})$ в области $\big\{\mathbf{l}\in\mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[0]}}:\|\mathbf{l}\|\leqslant 1\big\}$, то есть минимальную из всех вогнутых функций, которые мажорируют $\psi_j(\mathbf{l})$ при $\|\mathbf{l}\|\leqslant 1$.

Пусть $i=\overline{0,N-1}$ и $\mathbf{l}^{[i]}=\big\{l_k^{[i]}\in\mathbb{R}^{p_k},\,k=\overline{i+1,N}\big\}\in\mathbb{R}^{\mathbf{p}^{[i]}}$. По функциям $\varphi_j(\mathbf{l})$ определим функции

$$\varphi_j^{[i]}(\mathbf{l}^{[i]})=\varphi_j\Big(\mathbf{l}=\big\{l_k=0,\,k=\overline{1,i};\quad l_k=l_k^{[i]},\,k=\overline{i+1,N}\big\}\Big),\quad j=\overline{1,k+1},$$

и рассмотрим величину

$$e^{[i]}(\tau_j,\mathbf{z}^{[i]};\,\Delta_k)=\max_{\|\mathbf{l}^{[i]}\|\leqslant 1}\big[\langle\mathbf{l}^{[i]},\mathbf{z}^{[i]}\rangle+\varphi_j^{[i]}(\mathbf{l}^{[i]})\big],\quad \tau_j\in\Delta_k\cap[t_i,\vartheta],\quad \{\tau_j,\mathbf{z}^{[i]}\}\in\mathbf{S}^{[i]}.$$

Согласно методу выпуклых сверху оболочек при измельчении разбиения Δ_k (4.1) величина $e^{[i]}(\cdot)$ будет приближать (см., например, [3, с. 116], а также [7,8]) цену $\rho^{[i]}(\cdot)$ игры (2.6)–(2.8).

Пусть выбрано значение параметра точности $\varepsilon>0$. Рассмотрим для системы (2.6) стратегию управления $\mathbf{u}_{\Delta_k}^{[i]}(t,\mathbf{z}^{[i]},\varepsilon)$, $\{t,\mathbf{z}^{[i]}\}\in\mathbf{S}^{[i]}$, которая при $t=\tau_j\in\Delta_k\cap[t_i,\vartheta]$ определяется методом экстремального сдвига на сопутствующую точку, выбираемую по функции $e^{[i]}(\cdot)$. Проводя соответствующие выкладки, получаем

$$\mathbf{u}_{\Delta_k}^{[i]}(\tau_j,\mathbf{z}^{[i]},\varepsilon)\in\arg\min_{u\in P}\langle s_0^{[i]},\mathbf{B}^{[i]}(\tau_j)u\rangle,\quad \tau_j\in\Delta_k\cap[t_i,\vartheta],\quad \{\tau_j,\mathbf{z}^{[i]}\}\in\mathbf{S}^{[i]},$$

где

$$s_0^{[i]}=\frac{\mathbf{l}_0^{[i]}\varepsilon(\tau_j)}{\sqrt{1+\|\mathbf{l}_0^{[i]}\|^2}},\quad \mathbf{l}_0^{[i]}=\arg\max_{\|\mathbf{l}^{[i]}\|\leqslant 1}\left[\langle\mathbf{l}^{[i]},\mathbf{z}^{[i]}\rangle+\varphi_j^{[i]}(\mathbf{l}^{[i]})-\varepsilon(\tau_j)\sqrt{1+\|\mathbf{l}^{[i]}\|^2}\right],$$

$$\varepsilon(\tau_j)=\sqrt{\varepsilon+\varepsilon(\tau_j-t_0)}.$$

Определим для системы (1.1) стратегию управления $U_{\Delta_k}^0(\cdot)$ согласно правилу

$$\begin{gathered}U_{\Delta_k}^0\big(t,x,p(\cdot),\varepsilon\big)=\mathbf{u}_{\Delta_k}^{[i]}\Big(t,\mathbf{w}^{[i]}\big(t,x,p(\cdot)\big),\varepsilon\Big),\\ \{t,x,p(\cdot)\}\in S,\quad \varepsilon>0,\quad t\in[t_i,t_{i+1}),\quad i=\overline{0,N-1}.\end{gathered}\tag{4.2}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для любого $\xi>0$ существует $\delta=\delta(\xi)>0$ такое, что, каковы бы ни были начальная позиция $\{t_0,x_0,p_0(\cdot)\}\in S$ и разбиение Δ_k (4.1) диаметра $\delta_k=\max\limits_{j=\overline{1,k}}(\tau_{j+1}-\tau_j)\leqslant\delta$, будет выполняться неравенство*

$$\Big|\Gamma_u^0\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)-e^{[0]}\Big(t_0,\mathbf{w}^{[0]}\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big);\,\Delta_k\Big)\Big|<\xi.$$

Кроме того, для всякого $\zeta>0$ найдутся такие число $\varepsilon(\zeta)>0$ и функция $\delta(\zeta,\varepsilon)>0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(\zeta)$, что для любых $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(\zeta)$ и $0<\delta\leqslant\delta(\varepsilon,\zeta)$, для всякого разбиения Δ_k диаметра $\delta_k\leqslant\delta$ закон управления $\big\{U_{\Delta_k}^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_k\big\}$ на базе стратегии (4.2) будет обеспечивать неравенство

$$\gamma\big(U_{\Delta_k}^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_k;\,v[t_0[\cdot]\vartheta);\,t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)\leqslant\Gamma_u^0\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)+\zeta,$$

каковы бы ни были начальная позиция $\{t_0,x_0,p_0(\cdot)\}\in S$ и допустимая реализации помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$.

Отметим, что подобным образом с понятными изменениями, решая задачу о формировании в системе (1.1) самых неблагоприятных с точки зрения целей управления воздействий помехи, можно рассмотреть стратегию

$$\begin{gathered} V^0_{\Delta_k}\big(t,x,p(\cdot),\varepsilon\big) = \mathbf{v}^{[i]}_{\Delta_k}\Big(t,\mathbf{w}^{[i]}\big(t,x,p(\cdot)\big),\varepsilon\Big), \\ \{t,x,p(\cdot)\}\in S, \quad \varepsilon>0, \quad t\in[t_i,t_{i+1}), \quad i=\overline{0,N-1}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где функция $\mathbf{v}^{[i]}_{\Delta_k}(t,\mathbf{z}^{[i]},\varepsilon)$, $\{t,\mathbf{z}^{[i]}\}\in\mathbf{S}^{[i]}$ определяется в точках разбиения $\Delta_k\cap[t_i,\vartheta]$ следующими соотношениями:

$$\mathbf{v}^{[i]}_{\Delta_k}(\tau_j,\mathbf{z}^{[i]},\varepsilon)\in\arg\min_{v\in Q}\langle s^{[i]}_0,\mathbf{C}^{[i]}(\tau_j)v\rangle, \quad \tau_j\in\Delta_k\cap[t_i,\vartheta], \quad \{\tau_j,\mathbf{z}^{[i]}\}\in\mathbf{S}^{[i]},$$

$$s^{[i]}_0 = -\frac{\mathbf{l}^{[i]}_0\varepsilon(\tau_j)}{\sqrt{1+\|\mathbf{l}^{[i]}_0\|^2}}, \quad \mathbf{l}^{[i]}_0=\arg\max_{\|\mathbf{l}^{[i]}\|\leqslant 1}\Big[\langle\mathbf{l}^{[i]},\mathbf{z}^{[i]}\rangle+\varphi^{[i]}_j(t_0,\mathbf{l}^{[i]})+\varepsilon(\tau_j)\sqrt{1+\|\mathbf{l}^{[i]}\|^2}\Big].$$

При должном выборе значения параметра точности $\varepsilon>0$ и мелкости разбиения Δ_k (4.1) закон $\big\{V^0_{\Delta_k}(\cdot),\varepsilon,\Delta_k\big\}$ формирования помехи на основе стратегии (4.3) будет обеспечивать в системе (1.1)–(1.4) достижение контроптимального гарантированного результата (1.10) воздействий помехи.

Следует заметить, что размерность $\mathbf{p}^{[0]}$ области, в которой согласно вышеописанной процедуре на каждом шаге разбиения Δ_k (4.1) требуется строить выпуклые сверху оболочки φ_j вспомогательных функций ψ_j, зависит от числа N моментов оценки качества движения из показателя (1.4), а значит, даже при относительно небольшой размерности n фазового вектора x системы (1.1) величина $\mathbf{p}^{[0]}$ может быть достаточно велика. В связи с этим эффективно применять данную процедуру для численного решения задачи удается лишь тогда, когда функции ψ_j оказываются вогнутыми и проводить овыпукление не требуется, как, например, в случае отсутствия помехи в системе (1.1), либо когда выпуклые оболочки φ_j удается построить аналитически. Соответствующие примеры приведены в следующем параграфе.

В дальнейшем планируется редуцировать данную процедуру так, чтобы размерность переменных, по которым требуется проводить овыпукление, была по возможности меньше и не зависела от N, как это сделано, например, в [7, 8] для задач без запаздывания по управлению.

§ 5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу управления системой

$$\begin{pmatrix}\dot x_1(t)\\ \dot x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b(t)\end{pmatrix}u(t)+\begin{pmatrix}b_\tau(t)\\0\end{pmatrix}u(t-0.5)+\begin{pmatrix}c(t)\\0\end{pmatrix}v(t), \tag{5.1}$$

$$0\leqslant t\leqslant 2, \quad |u|\leqslant 1, \ |v|\leqslant 1,$$

где

$$b(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,0.5],\\ 2t-1, & t\in(0.5,1],\\ 1, & t\in(1,2],\end{cases} \quad b_\tau(t)=\begin{cases}2t, & t\in[0,0.5],\\ 2-2t, & t\in(0.5,1.5],\\ 2t-4, & t\in(1.5,2],\end{cases} \quad c(t)=\begin{cases}t-0.5, & t\in[0,0.5],\\ -2t^2+3t-1, & t\in(0.5,1],\\ 2-t, & t\in(1,1.5],\\ 0.5, & t\in(1.5,2],\end{cases}$$

при начальных условиях

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{pmatrix}=x_0, \quad u_0(\xi)=p_0(\xi), \quad \xi\in[-0.5,0), \tag{5.2}$$

и показателе качества

$$\gamma=\left(\|\,(1\ \ 0)\left[\begin{pmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right]\|^2+\|\,(1\ \ 0)\left[\begin{pmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right]\|^2\right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

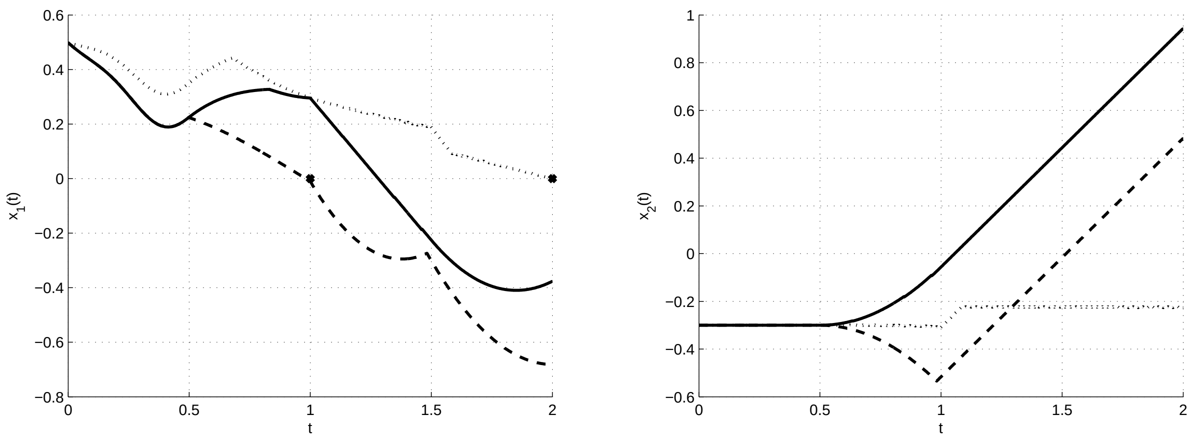

Рис. 1.

Пусть выбрано разбиение Δ_k отрезка времени управления $[0,2]$. В данном примере для выпуклых оболочек φ_j из вышеприведенной процедуры можно выписать аналитическое представление

$$\varphi_j(l_1,l_2)=\sqrt{1-\big(l_1\big)^2}\int_{\tau_j}^{2}\alpha(\xi)\,d\xi+|l_1+l_2|\int_{\tau_j}^{2}\beta(\xi)\,d\xi,\quad j=\overline{1,k},$$

где

$$\alpha(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1],\\ 3-2t, & t\in(1,1.5],\\ t-1.5, & t\in(1.5,2],\end{cases}\qquad \beta(t)=\begin{cases}t-0.5, & t\in[0,0.5],\\ 3-2t, & t\in(0.5,1],\\ 0, & t\in(1,2].\end{cases}$$

Тогда по теореме 2 получаем следующую репрезентативную формулу для величины оптимального гарантированного результата в задаче (5.1)–(5.3):

$$\Gamma_u^0\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big) = \max_{l_1^2+l_2^2\leqslant 1}\Bigg[\, l_1w_1\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)+l_2w_2\big(t_0,x_0,p_0(\cdot)\big)+ +\sqrt{1-\big(l_1\big)^2}\textstyle\int_0^2\alpha(\xi)\,d\xi+|l_1+l_2|\int_0^2\beta(\xi)\,d\xi\,\Bigg].$$

На рис. 1 показаны результаты симулирования процесса управления в задаче (5.1)–(5.3) в случае, когда $x_{10}=0.5$, $x_{20}=-0.3$, $p_0(\xi)=\cos(4\pi\xi)$, $\xi\in[-0.5,0)$. При этом были взяты значение параметра точности $\varepsilon=0.004$ и равномерное разбиение Δ_k с шагом $\delta_k=0.002$. Априорно посчитанная величина оптимального гарантированного результата $\Gamma_u^0\approx 0.479$. Сплошной линией изображено движение системы (5.1), реализовавшееся при действии стратегии управления, построенной согласно правилу (4.2), и стратегии формирования помехи, построенной согласно (4.3). Полученное значение показателя качества (5.3) в этом случае равно

$$\gamma\approx 0.48\approx\Gamma_u^0.$$

Штриховой линией изображено движение, реализовавшееся при отсутствии помехи и при действии стратегии управления (4.2). Полученный результат

$$\gamma\approx 0.296<\Gamma_u^0.$$

Пунктирной линией изображено движение, реализовавшееся при действии стратегии управления $U(t,x,p(\cdot),\varepsilon)=-\mathrm{sign}(x_1b(t))$, $\{t,x,p(\cdot)\}\in S$, и стратегии формирования помехи из (4.3). Значение показателя (5.3)

$$\gamma\approx 0.682>\Gamma_u^0.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу управления системой

$$\begin{cases} \ddot{r}_1(t) = -2r_1(t) + 0.02r_2(t) - 0.4\dot{r}_1(t) + 0.4u_2(t-0.4) + y_1(t), \\ \ddot{r}_2(t) = 0.01r_1(t) - r_2(t) - 0.1\dot{r}_2(t) - u_1(t-0.4) + y_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant 4, \\ \dot{y}_1(t) = (5-t)u_1(t), & u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \\ \dot{y}_2(t) = (4-0.5t)u_2(t), \end{cases} \tag{5.4}$$

при начальных условиях

$$\begin{gathered} r_1(0) = \dot{r}_1(0) = \dot{r}_2(0) = 0, \quad r_2(0) = 1, \\ u_1(\xi) = 2\sin(2.5\pi\xi), \quad u_2(\xi) = 2\cos(2.5\pi\xi), \quad \xi \in [-0.4, 0), \end{gathered} \tag{5.5}$$

и показателе качества

$$\begin{gathered} \gamma = \Big(\big(r_1(0.5) - 0.5\big)^2 + \big(r_2(0.5) - 0.5\big)^2 + \big(\dot{r}_1(0.5) - 0.1\big)^2 + \big(\dot{r}_2(0.5) + 0.1\big)^2 + \\ + \big(r_1(1) - 1\big)^2 + r_2^2(1) + \big(r_1(1.5) - 0.5\big)^2 + \dot{r}_1^2(2) + \dot{r}_2^2(2.5) + \big(r_2(3) + 0.5\big)^2 + \\ + \big(\dot{r}_1(3.5) - 0.1\big)^2 + \big(\dot{r}_2(3.5) - 0.1\big)^2 + r_1^2(4) + r_2^2(4) + \dot{r}_1^2(4) + \dot{r}_2^2(4) \Big)^{1/2}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

После замены $x_1 = r_1$, $x_2 = \dot{r}_1$, $x_3 = r_2$, $x_4 = \dot{r}_2$, $x_5 = y_1$, $x_6 = y_2$ система (5.4) переписывается в виде (1.1), где соответственно следует подставить

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0.4 & 0.02 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & -1 & -0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_\tau(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5-t & 0 \\ 0 & 4-0.5t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T, \quad t_0 = 0, \quad \vartheta = 4, \quad \tau = 0.4.$$

Здесь и далее символ T над матрицей означает транспонирование. При этом начальные условия (5.5) переписываются в виде (1.2), (1.3) следующим образом:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad p_0(\xi) = \begin{pmatrix} 2\sin(2.5\pi\xi) \\ 2\cos(2.5\pi\xi) \end{pmatrix}, \quad \xi \in [-0.4, 0).$$

Показатель качества (5.6) приводится к виду (1.4) при подстановке

$$N = 8, \quad t_i = 0.5i, \quad i = \overline{1, 8},$$

$$D_1 = D_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \; D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \; D_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \; D_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \; D_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$D_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \; D_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \; c_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

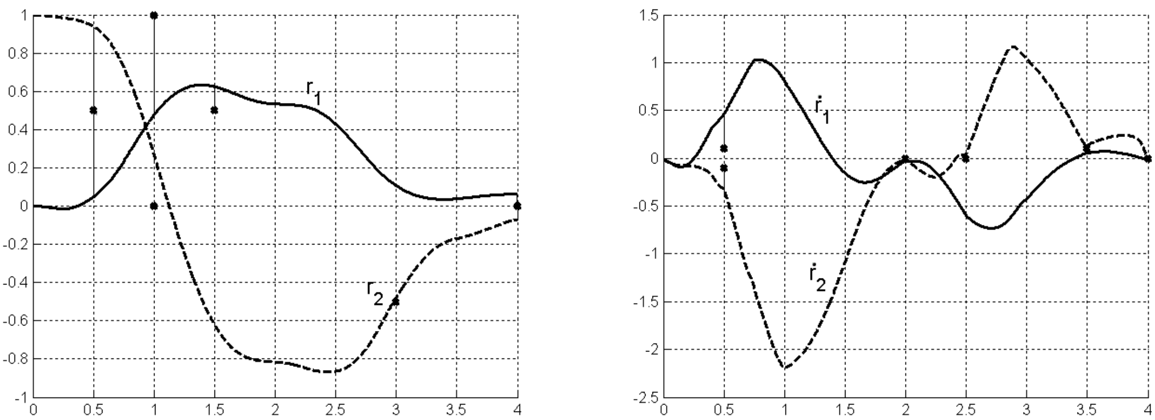

Рис. 2.

$$c_4 = c_5 = c_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На рис.2 показан результат симулирования процесса управления в задаче (5.4)–(5.6) при действии стратегии управления (4.2) на базе равномерного разбиения отрезка времени управления $[0, 4]$ с шагом $\delta_k = 0.0025$. Значение параметра точности $\varepsilon = 0.025$.

Априорно посчитанная величина оптимального гарантированного результата $\Gamma_u^0 \approx 0.975$. Реализовавшееся значение показателя качества (5.6)

$$\gamma \approx 0.979 \approx \Gamma_u^0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. Banks H. T., Jakobs M. Q., Latina M. R. The synthesys of optimal controls for linear problems with retarded conrols // J. Optimizat. Theory and Appl. 1971. Vol. 8. № 5. P. 319–366.
5. Осипов Ю. С., Пименов В. Г. К теории дифференциальных игр в системах с последействием // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 963–977.
6. Пименов В. Г. К задаче о регулировании системой с запаздыванием в управлении // Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск, 1987. С. 223–229.
7. Красовский Н. Н., Лукоянов Н. Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.
8. Лукоянов Н. Ю. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.
9. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
10. Лукоянов Н. Ю., Решетова Т. Н. Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 586–597.
11. Красовский А. Н. Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

Поступила в редакцию 16.05.11

M. I. Gomoyunov

On the problem of optimizing the guarantee in a system with delay in control

For a dynamical system under control and disturbances, and with delay in control, the problem of control with the optimal guaranteed result is considered for a quality index which is the Euclidean norm of the set of deviations of a system motion at the given instants from the given targets. On the basis of a functional treatment basing on a proper prediction of the motion the problem is reduced to an auxiliary differential game for a system without delay and with a terminal quality index. The value of this game is calculated from the construction of upper convex hulls of auxiliary functions from the method of stochastic program synthesis, optimal strategies are formed by the method of an extremal shift to the corresponding points. Illustrating examples and results of numerical experiments are presented.

Keywords: optimal control, differential games, delay in control.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 93B52, 49J35

Гомоюнов Михаил Игоревич, программист, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: gomojunov@mail.ru

Gomoyunov Mikhail Igorevich, programmer, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.