МАТЕМАТИКА

УДК 517.972.8

© *А. П. Бакланов*

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Рассматривается игровая задача на максимин функции платы, определенной на произведении множеств притяжения терминальных состояний систем первого и второго игрока. Данные множества притяжения найдены с помощью конструкций расширения в классе конечно-аддитивных мер.

Ключевые слова: импульсное управление, конечно-аддитивные меры, максимин, расширение.

Введение

Во многих технических системах управления с импульсными ограничениями целесообразно использовать одноимпульсный режим, отвечающий однократному включению двигателя; таким образом, объекту управления сообщается некоторый импульс скорости, после чего он продолжает свободное движение по новой траектории. Данный режим особенно часто применяется в задачах космической навигации [1]. При практическом использовании данного режима невозможно реализовать мгновенный импульс, поэтому используется достаточно «узкий» импульс большой амплитуды. В случае разрывных зависимостей в коэффициентах при управлении вышеупомянутое ударное воздействие приводит к эффекту, имеющему смысл произведения разрывной функции на обобщенную. В связи с этим одной из важных задач является нахождение пучка траекторий для всех таких ударных воздействий. Однако, в силу неопределенности в конкретном выборе «протяженности» импульса, мы будем рассматривать асимптотический вариант данной задачи, которая будет встроена в игровую постановку, а именно: имеем в виду двоих игроков, стремящихся использовать «узкие» импульсы управления. В связи с исследованием задач импульсного управления отметим оригинальный подход, предложенный Н. Н. Красовским [2] и основанный на конструкциях расширения в классе обобщенных функций. В данной работе мы будем использовать подход, изложенный в [3]–[6]. Он связан с введением ограничений асимптотического характера и построением связанных с ними множеств притяжения (МП) в пространстве терминальных состояний. Данные МП являются асимптотическими аналогами областей достижимости (ОД). Построение упомянутых МП будет осуществляться посредством введения обобщенных управлений — конечно-аддитивных (к.-а.) вероятностных мер.

В статье рассматривается игровая постановка, где функция платы зависит от терминальных состояний систем первого и второго игрока. Более того, импульсы управления первого и второго игрока должны быть «узкими», а коэффициенты при управлениях могут быть разрывными функциями. Также рассмотрена асимптотическая постановка данной задачи (рассматриваются аналоги предельно «узких» импульсов). Переход к асимптотическому результату реализуется благодаря расширению исходной задачи в классе к.-а. вероятностных мер. Подобный подход применялся в [7]–[9].

§ 1. Основные обозначения и определения

Мы будем использовать общие конструкции [3]–[6], [10] расширений абстрактных задач о достижимости. Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Мы используем кванторы, пропозициональные связки, а также принимаем аксиому

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 09-П-1-1014).

выбора. Семейством будем называть множество, все элементы которого сами являются множествами. Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества S. Через B^A обозначаем множество всех операторов, действующих из множества A в множество B; при $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ множество $f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f, а $(f|C) \in B^C$ есть def сужение f на C, для которого $(f|C)(u) = f(u)\ \forall u \in C$. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ — натуральный ряд и $\overline{1,s} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \,|\, i \leqslant s\}\ \forall s \in \mathbb{N}$. В дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно. Если $s \in \mathbb{N}$, то через $\mathbb{R}^s$ обозначаем множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{1,s}} : \overline{1,s} \to \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

получая фактически s-мерное арифметические пространство; строго говоря, кортеж (1.1) есть отображение из $\overline{1,s}$ в $\mathbb{R}$. На самом же деле, (1.1) можно рассматривать как s-мерный вектор. В дальнейшем оснащаем (при $s \in \mathbb{N}$) линейное конечномерное пространство $\mathbb{R}^s$ нормой

$$|| \cdot ||^{(s)} \stackrel{\triangle}{=} (||x||^{(s)})_{x \in \mathbb{R}^s},$$

где при $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^s$ число $||\widetilde{x}||^{(s)}$ есть наибольшее из $|\widetilde{x}(i)|$, $i \in \overline{1,s}$. Норма $||\cdot||^{(s)}$ порождает обычную топологию покоординатной сходимости $\tau_{\mathbb{R}}^{(s)}$. Если $s \in \mathbb{N}$, $\zeta \in]0, \infty[$, $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^s)$, то

$$O_\zeta^{(s)}[M] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^s |\ \exists\ m \in M : ||x - m||^{(s)} < \zeta\} \in \tau_{\mathbb{R}}^{(s)} \tag{1.2}$$

есть открытая ζ-окрестность множества M.

Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $cl(A, \tau)$ есть def замыкание множества A в ТП (X, τ), а $\tau|_A \stackrel{\triangle}{=} \{A \cap G : G \in \tau\}$ — топология множества A, индуцированная из ТП (X, τ). Если же (X, τ) — ТП и $x \in X$, то полагаем $N_\tau^0(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau |\ x \in G\}$,

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{Y \in \mathcal{P}(X) |\ \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset Y\}, \tag{1.3}$$

получая в (1.3) фильтр [11, гл. I] окрестностей x в ТП (X, τ).

Через $(\tau - comp)[X]$ обозначаем семейство всех непустых компактных в ТП (X, τ) подмножеств (п/м) X. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, то через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1, τ_2)-непрерывных отображений, действующих из X в Y. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем ниже обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$ и полагаем, что $\mathbb{C}(X, \tau) \stackrel{\triangle}{=} C(X, \tau, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ для всякого ТП (X, τ). Направленностью [12, гл. 2] в множестве H называется всякий триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество [12, гл. 2], а f — отображение из D в H. Если $(D, \preceq, f)$ есть направленность в H, оснащенном топологией τ, и $h \in H$, то $\big((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} h\big) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall S \in N_\tau(h)\ \exists d \in D\ \forall \delta \in D\ (d \preceq \delta) \Rightarrow (f(\delta) \in S)\big)$. Если E — непустое множество, (X, τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то МП $\mathbf{as}[X, \tau, r, \mathcal{E}]$ есть def множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве A, для которой

$$(\mathcal{E} \subset (A - ass)[D, \preceq, f])\ \&\ ((D, \preceq, r \circ f) \xrightarrow{\tau} x),$$

где $(A - ass)[D, \preceq, f]$ есть фильтр множества A, ассоциированный с направленностью $(D, \preceq, f)$, $\circ$ — символ суперпозиции. Если X — множество, то $\beta[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$ и

$$\beta_0[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) | \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}. \tag{1.4}$$

Семейства из $\beta_0[X]$ — базы фильтров X и только они. Если E — непустое множество, (X, τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то имеем следующее представление для МП:

$$\mathbf{as}[X, \tau, r, \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{L \in \mathcal{E}} cl(r^1(L), \tau). \tag{1.5}$$

§ 2. Постановка задачи

В дальнейшем фиксируем две линейные управляемые системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)b(t), \qquad \dot{y}(t) = B(t)y(t) + v(t)c(t)$$

с управлениями $u(t), v(t)$ соответственно первого и второго игрока. Фазовое пространство первой системы (второй системы) полагаем k-мерным (l-мерным), промежуток управления совпадает с $[0,1]$, а начальные условия удовлетворяют $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^k$ ($y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^l$). Полагаем, что при $t \in [0,1]$ $A(t)$ — $k \times k$-матрица и $B(t)$ — $l \times l$-матрица, все компоненты которых — непрерывные функции на отрезке $[0,1]$. Каждая компонента $b_i = b_i(\cdot)$ ($c_j = c_j(\cdot)$) вектор-функции b (вектор-функции c) является ярусной функцией. Управления игроков: $u(t) : I \to [0, \infty[$ и $v(t) : I \to [0, \infty[$, где $I \stackrel{\triangle}{=} [0,1[$, предполагаются кусочно-постоянными (к.-п.) и непрерывными справа (н. спр.). Более того, их выбор должен осуществляться с соблюдением условий

$$\int_0^1 u(t)\,dt = 1, \quad \int_0^1 v(t)\,dt = 1. \tag{2.1}$$

Обозначим через $\mathbb{F}$ множество всех к.-п. и н. спр. программных управлений $w(t) : I \to [0, \infty[$, для каждого из которых $\displaystyle\int_0^1 w(t)\,dt = 1$. Мы стремимся использовать в качестве управлений игроков «узкие» импульсы. На уровне строгой математической постановки данную тенденцию удается реализовать в асимптотическом варианте, подобном [7]. В этой связи полагаем при $\kappa \in]0, \infty[$, что

$$F_\kappa = \{w \in \mathbb{F} \,|\, \exists t \in I : \{\tau \in I \,|\, w(\tau) \neq 0\} \subset [t, t+\kappa[\}. \tag{2.2}$$

Пусть $\mathcal{F} \stackrel{\triangle}{=} \{F_\kappa : \kappa \in]0, \infty[\}$, тогда $\mathcal{F}$ является базой фильтра в множестве $\mathbb{F}$ (см. (1.4)),

$$\mathcal{F} \in \beta_0[\mathbb{F}]. \tag{2.3}$$

По формуле Коши для каждого управления $u \in \mathbb{F}$ и $v \in \mathbb{F}$ мы получаем траектории

$$\phi_u(t) = \Phi_1(t,0)x_0 + \int_0^t u(\zeta)\Phi_1(t,\zeta)b(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.4}$$

$$\xi_v(t) = \Phi_2(t,0)y_0 + \int_0^t v(\zeta)\Phi_2(t,\zeta)c(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.5}$$

где $t \in [0,1]$, Φ_1 и Φ_2 — фундаментальные матрицы систем $\dot{x} = A(t)x$ и $\dot{y} = B(t)y$ соответственно. Разумеется, интеграл в правой части (2.4) и (2.5) определяется покомпонентно. Следовательно, определены терминальные состояния двух систем в зависимости от управления u и v. А значит, мы можем ввести функции терминального состояния системы от управления u и v, соответственно g и h:

$$u \longmapsto \phi_u(1) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^k, \quad v \longmapsto \xi_v(1) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^l. \tag{2.6}$$

В терминах (2.6) можно определить асимптотические аналоги ОД обоих игроков в виде МП, посредством которых будет введена задача на максимин. Позднее будут введены обобщенные управления, в классе которых упомянутые МП реализуются в виде ОД, отвечающие действию некоторых «импульсов». Введем множества

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} cl(\{\phi_u(1) | u \in \mathbb{F}\}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}), \quad \mathbf{B} \stackrel{\triangle}{=} cl(\{\xi_v(1) | v \in \mathbb{F}\}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}). \tag{2.7}$$

Из (2.1) и (2.7) следует, что

$$\mathbf{A} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - comp)[\mathbb{R}^k], \quad \mathbf{B} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - comp)[\mathbb{R}^l]. \tag{2.8}$$

Пусть определена функция $\alpha_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}$ есть произведение топологий $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ и $\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}$. При этом $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ порождается метрикой $(z_1, z_2) \longmapsto ||z_1 - z_2||^{(n)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$. Тогда $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}$ порождается метрикой $\rho : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \to [0, \infty[$, для которой $\forall x_1 \in \mathbb{R}^k\ \forall y_1 \in \mathbb{R}^l\ \forall x_2 \in \mathbb{R}^k\ \forall y_2 \in \mathbb{R}^l$

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sup(\{||x_1 - x_2||^{(k)}; ||y_1 - y_2||^{(l)}\}). \tag{2.9}$$

Тогда α_0 есть непрерывный функционал на метрическом пространстве $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \rho)$. Очевидно, что при $u \in \mathbb{F}$ и $v \in \mathbb{F}$ определено значение $\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1)) \in \mathbb{R}$. С учетом этого мы полагаем, что $\Upsilon : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ определяется следующим правилом: $\forall u \in \mathbb{F}\ \forall v \in \mathbb{F}$

$$\Upsilon(u, v) \stackrel{\triangle}{=} \alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1)).$$

Теперь мы можем рассмотреть игровую задачу, в которой первый игрок стремится к минимизации значений Υ путем рационального выбора $u \in \mathbb{F}$, а второй игрок стремится к максимизации этих значений посредством выбора $v \in \mathbb{F}$. Имеются, однако, дополнительные ограничения: $u \in F_\varepsilon, v \in F_\delta$; напомним, что данное ограничение формализует требование на выбор «узких» импульсов. Тогда наша задача с ослабленными ограничениями имеет следующий смысл:

$$\Upsilon(u, v) \to \sup_{v \in F_\delta} \inf_{u \in F_\varepsilon},$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$, $\delta \in]0, \infty[$. Нас будет интересовать случай малых значений ε, δ.

Заметим, что в нашем случае $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$, $\forall \delta \in]0, \infty[$ выполняется

$$cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - comp)[\mathbb{R}^k], \quad cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - comp)[\mathbb{R}^l] \tag{2.10}$$

(так как замкнутое и ограниченное п/м $\mathbb{R}^n$ компактно).

Напомним, что $\alpha_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})$. А значит, что $\forall y \in \mathbf{B}$

$$\alpha_0(\cdot, y) = \big(\alpha_0(x, y)\big)_{x \in \mathbb{R}^k} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^k, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}). \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) вытекает, что определены значения

$$\min_{x \in cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \alpha_0(x, y) \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \ \forall y \in \mathbf{B}. \tag{2.12}$$

Зафиксировав ε в (2.12), мы получим непрерывную функцию с областью определения $\mathbf{B}$:

$$\psi_\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \Big(\min_{x \in cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \alpha_0(x, y)\Big)_{y \in \mathbf{B}} \in \mathbb{C}(\mathbf{B}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[; \tag{2.13}$$

в связи с доказательством (2.13) смотрите замечание 1 в работе [8].

С учетом (2.10) и (2.13) получаем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$, $\forall \delta \in]0, \infty[$

$$\max_{y \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \psi_\varepsilon(y) = \max_{y \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \min_{x \in cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \alpha_0(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Более того, при $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ выполнено $g^1(F_\varepsilon) \in \mathcal{P}'(\mathbf{A})$, откуда при всяком $y \in \mathbf{B}$ $\{\alpha_0(x, y) : x \in g^1(F_\varepsilon)\}$ есть непустое ограниченное п/м $\mathbb{R}$, обладающее (конечной) точной нижней гранью. С учетом (2.11) $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall y \in \mathbf{B}$

$$\inf_{u \in F_\varepsilon} \alpha_0(g(u), y) = \inf_{x \in g^1(F_\varepsilon)} \alpha_0(x, y) = \min_{x \in cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \alpha_0(x, y) = \psi_\varepsilon(y); \tag{2.14}$$

в связи с доказательством (2.14) смотрите замечание 2 в работе [8].

Следовательно, для $\forall\varepsilon\in]0,\infty[,\ \forall\delta\in]0,\infty[$ определены значения (см. [8, (2.33)])

$$V(\varepsilon,\delta)\stackrel{\triangle}{=}\sup_{v\in F_\delta}\inf_{u\in F_\varepsilon}\alpha_0(g(u),h(v))=\sup_{v\in F_\delta}\inf_{u\in F_\varepsilon}\Upsilon(u,v)=\sup_{y\in h^1(F_\delta)}\inf_{x\in g^1(F_\varepsilon)}\alpha_0(x,y) \tag{2.15}$$

Значения (2.15) рассматриваем как реализуемые экстремумы, а точнее, как реализуемые «максимины», а именно:

$$V(\varepsilon,\delta)=\max_{y\in cl(h^1(F_\delta),\tau_{\mathbb{R}}^{(l)})}\psi_\varepsilon(y)\quad\forall\varepsilon\in]0,\infty[\ \ \forall\delta\in]0,\infty[; \tag{2.16}$$

в связи с доказательством (2.16) смотрите замечание 3 в работе [8].

§ 3. Асимптотический максимин

Рассмотрим МП $\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2$ (см. (1.5)) в пространстве терминальных состояний первого и второго игрока:

$$\mathbb{G}_1\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{as}[\mathbb{R}^k,\tau_{\mathbb{R}}^{(k)},g,\mathcal{F}]\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^k),\quad \mathbb{G}_2\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{as}[\mathbb{R}^l,\tau_{\mathbb{R}}^{(l)},h,\mathcal{F}]\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^l). \tag{3.1}$$

В силу того, что $\mathcal{F}\in\beta_0[\mathbb{F}]$ (см. (2.3)), множества $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ непусты (см. предложения 1 и 2 в [8]). Из (1.5) и (3.1) следует, что

$$\mathbb{G}_1\in(\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}-comp)[\mathbb{R}^k],\quad \mathbb{G}_2\in(\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}-comp)[\mathbb{R}^l]. \tag{3.2}$$

Выполняются очевидные вложения (см. (2.7)):

$$\mathbb{G}_1\subset\mathbf{A},\quad \mathbb{G}_2\subset\mathbf{B}. \tag{3.3}$$

Из (2.8),(2.11) и (3.2) вытекает, что определено значение

$$\min_{x\in\mathbb{G}_1}\alpha_0(x,y)\in\mathbb{R}\quad\forall y\in\mathbf{B}.$$

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{L}(y)\stackrel{\triangle}{=}\Big(\min_{x\in\mathbb{G}_1}\alpha_0(x,y)\Big)_{y\in\mathbf{B}}\in\mathbb{R}^{\mathbf{B}}.$$

Из равномерной непрерывности функции α_0 имеем

$$\mathfrak{L}\in\mathbb{C}(\mathbf{B},\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{B}}). \tag{3.4}$$

Включение (3.4) вытекает из [8, (3.4)]. Из (3.2), (3.3) и (3.4) следует, что определено значение (обобщенный экстремум)

$$\mathbb{V}\stackrel{\triangle}{=}\max_{y\in\mathbb{G}_2}\mathfrak{L}(y)=\max_{y\in\mathbb{G}_2}\min_{x\in\mathbb{G}_1}\alpha_0(x,y)\in\mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Предложение 1. *Следующие утверждения верны* (*см.* (1.2))*:*
а) $\forall\kappa\in]0,\infty[\ \exists\varepsilon\in]0,\infty[\,:cl(g^1(F_\varepsilon),\tau_{\mathbb{R}}^{(k)})\subset O_\kappa^{(k)}[\mathbb{G}_1]$,
б) $\forall\zeta\in]0,\infty[\ \exists\delta\in]0,\infty[\,:cl(h^1(F_\delta),\tau_{\mathbb{R}}^{(l)})\subset O_\zeta^{(l)}[\mathbb{G}_2]$.

Доказательство аналогично обоснованию предложений 3 и 4 в работе [8].

Предложение 2. *Следующие утверждение верно:*

$$\forall\kappa\in]0,\infty[\ \ \exists\delta_\kappa\in]0,\infty[\,:\quad \mathfrak{L}(y)\in[\psi_\varepsilon(y),\psi_\varepsilon(y)+\kappa[\ \ \forall\varepsilon\in]0,\delta_\kappa[\ \ \forall y\in\mathbf{B}.$$

Доказательство аналогично обоснованию предложения 4 в работе [9].

Следующее утверждение извлекается из [8, теорема 1], где рассматривалась общая постановка игровой задачи на максимин с ограничениями асимптотического характера. В настоящем, более частном случае, имеет смысл привести упомянутое доказательство в терминах рассматриваемой здесь весьма конкретной задачи.

Теорема 1. *Следующие утверждение верно:*

$$\forall \kappa \in]0,\infty[\ \ \exists \theta_\kappa \in]0,\infty[: \ \ |V(\varepsilon,\delta) - \mathbb{V})| < \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0,\theta_\kappa[\ \ \forall \delta \in]0,\theta_\kappa[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset \mathbf{B} \quad \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{3.6}$$

Следовательно, из предложения 2 вытекает, что $\forall \kappa \in]0,\infty[\ \exists \delta_\kappa \in]0,\infty[$:

$$\mathfrak{L}(y) \in [\psi_\varepsilon(y), \psi_\varepsilon(y) + \kappa[\ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_\kappa[\ \ \forall \delta \in]0,\infty[\ \ \forall y \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}).$$

Более того,

$$\forall \kappa \in]0,\infty[\ \ \exists \delta_\kappa \in]0,\infty[: \ \ \mathfrak{L}(y) \in [\psi_\varepsilon(y), \psi_\varepsilon(y) + \kappa[\ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_\kappa[\ \ \forall y \in \mathbb{G}_2. \tag{3.7}$$

С учетом (3.5) выберем и зафиксируем $y_0 \in \mathbb{G}_2$, такое что

$$\min_{x \in \mathbb{G}_1} \alpha_0(x, y_0) = \mathbb{V} \tag{3.8}$$

Из (3.3) следует, что $y_0 \in \mathbf{B}$. Выберем и зафиксируем произвольное число $\kappa \in]0,\infty[$. С учетом (3.7) подберем число $\delta_1^* \in]0,\infty[$, для которого верно

$$\mathfrak{L}(y_0) \in [\psi_\varepsilon(y), \psi_\varepsilon(y) + \kappa[\ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[\ \ \forall y \in \mathbb{G}_2.$$

Следовательно, получаем систему включений

$$\mathfrak{L}(y_0) \in [\psi_\varepsilon(y_0), \psi_\varepsilon(y_0) + \kappa[\ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[.$$

С учетом (3.8) легко следует

$$\mathbb{V} < \psi_\varepsilon(y_0) + \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[. \tag{3.9}$$

Поскольку $y_0 \in \mathbf{B}$, то из (3.9) вытекает, что

$$\mathbb{V} < \max_{y \in \mathbb{G}_2} \psi_\varepsilon(y) + \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[. \tag{3.10}$$

Так как $\mathbb{G}_2 \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \ \ \forall \delta \in]0,\infty[$ (см. (2.10)), то при $\varepsilon \in]0,\infty[, \delta \in]0,\infty[$

$$\max_{y \in \mathbb{G}_2} \psi_\varepsilon(y) \leqslant \max_{y \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \psi_\varepsilon(y)$$

Комбинируя неравенства с (3.10), получаем

$$\mathbb{V} < \max_{y \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \psi_\varepsilon(y) + \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[\ \ \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{3.11}$$

Из (2.16) и (3.11) следует неравенства $\mathbb{V} < V(\varepsilon,\delta) + \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[\ \ \forall \delta \in]0,\infty[$. Следовательно,

$$\mathbb{V} - V(\varepsilon,\delta) < \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0,\delta_1^*[\ \ \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{3.12}$$

С учетом определения ρ и непрерывности α_0 подберем δ_2^* такое, что $\forall x_1 \in \mathbf{A}\ \forall y_1 \in \mathbf{B}\ \forall x_2 \in \mathbf{A}\ \forall y_2 \in \mathbf{B}$

$$\Big((||x_1 - x_2||^{(k)} < \delta_2^*)\,\&\,(||y_1 - y_2||^{(l)} < \delta_2^*)\Big) \Rightarrow \Big(|\alpha_0(x_1, y_1) - \alpha_0(x_2, y_2)| < \kappa\Big). \tag{3.13}$$

Пусть $\delta_* = \inf\{\delta_1^*, \delta_2^*\}$. Из (3.12) следует, что

$$\mathbb{V} - V(\varepsilon, \delta) < \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_*[\ \ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{3.14}$$

Используя (3.13), получаем, что $\forall x_1 \in \mathbf{A}\ \forall y_1 \in \mathbf{B}\ \forall x_2 \in \mathbf{A}\ \forall y_2 \in \mathbf{B}$

$$\Big((||x_1 - x_2||^{(k)} < \delta_*)\,\&\,(||y_1 - y_2||^{(l)} < \delta_*)\Big) \Rightarrow \Big(|\alpha_0(x_1, y_1) - \alpha_0(x_2, y_2)| < \kappa\Big). \tag{3.15}$$

Используя предложение 1, подберем такое число δ_3^*, при котором выполняется

$$cl(h^1(F_{\delta_3^*}), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_*}^{(l)}[\mathbb{G}_2]. \tag{3.16}$$

Согласно (2.2) $F_\delta \subset F_{\delta_3^*}\ \ \forall \delta \in]0, \delta_3^*]$. Следовательно (см. (2.2)), $h^1(F_\delta) \subset h^1(F_{\delta_3^*})\ \ \forall \delta \in]0, \delta_3^*]$. Из (3.16) вытекает следующие вложения:

$$cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_*}^{(l)}[\mathbb{G}_2] \quad \forall \delta \in]0, \delta_3^*]. \tag{3.17}$$

Пусть $\delta^0 = \inf\{\delta_*, \delta_3^*\} \in]0, \infty[$. Из (3.14) получаем

$$\mathbb{V} - V(\varepsilon, \delta) < \kappa \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta^0[\ \ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{3.18}$$

С другой стороны, из (3.17) вытекает

$$cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_*}^{(l)}[\mathbb{G}_2] \ \ \forall \delta \in]0, \delta^0]. \tag{3.19}$$

Выберем произвольно $\varepsilon_0 \in]0, \delta^0[$ и $\delta_0 \in]0, \delta^0[$. Из (3.18) следует, что

$$\mathbb{V} - V(\varepsilon_0, \delta_0) < \kappa. \tag{3.20}$$

С учетом (2.16) подберем $\widetilde{y} \in cl(h^1(F_{\delta_0}), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})$, для которого

$$V(\varepsilon_0, \delta_0) = \psi_{\varepsilon_0}(\widetilde{y}). \tag{3.21}$$

Так как по выбору δ_0 справедливо (см. (3.19)) вложение $cl(h^1(F_{\delta_0}), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_*}^{(l)}[\mathbb{G}_2]\ \ \forall \delta_0 \in]0, \delta^0]$, то для некоторого $y^0 \in \mathbb{G}_2$ справедливо неравенство

$$\|\widetilde{y} - y^0\|^{(l)} < \delta_*. \tag{3.22}$$

В силу (3.6) по выбору $\widetilde{y}$ имеем следующее включение: $\widetilde{y} \in \mathbf{B}$. С другой стороны, по выбору y^0 получаем $y^0 \in \mathbf{B}$. Из (3.15) и (3.22) следует

$$|\alpha_0(x, \widetilde{y}) - \alpha_0(x, y^0)| < \kappa \ \ \forall x \in \mathbf{A}. \tag{3.23}$$

Напомним, что, согласно (3.21), справедливо следующее равенство:

$$V(\varepsilon_0, \delta_0) = \min_{x \in cl(g^1(F_{\varepsilon_0}), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \alpha_0(x, \widetilde{y}). \tag{3.24}$$

Так как $\mathbb{G}_1 \subset cl(g^1(F_{\varepsilon_0}), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})$, то (см. (3.24)) получаем очевидное неравенство

$$V(\varepsilon_0, \delta_0) \leqslant \min_{x \in \mathbb{G}_1} \alpha_0(x, \widetilde{y}). \tag{3.25}$$

Более того, используя (3.23), получаем, что $\min\limits_{x\in\mathbb{G}_1}\alpha_0(x,\widetilde{y})-\kappa<\alpha_0(\widetilde{x},y^0)\quad\forall\widetilde{x}\in\mathbb{G}_2$. Следовательно,

$$\min_{x\in\mathbb{G}_1}\alpha_0(x,\widetilde{y})-\kappa<\min_{x\in\mathbb{G}_1}\alpha_0(x,y^0). \tag{3.26}$$

Так как $y^0\in\mathbb{G}_2$, то из (3.5),(3.25) и (3.26) вытекает, что $V(\varepsilon_0,\delta_0)-\mathbb{V}<\kappa$. Комбинируя с (3.20), получаем, что $|V(\varepsilon_0,\delta_0)-\mathbb{V}|<\kappa$. Поскольку выбор ε_0,δ_0 был произвольным, установлено, что $|V(\varepsilon_0,\delta_0)-\mathbb{V}|<\kappa\quad\forall\varepsilon_0\in]0,\delta^0[\quad\forall\delta_0\in]0,\delta^0[$. Коль скоро и выбор κ был произвольным, имеем, что $\forall\kappa\in]0,\infty[\quad\exists\theta_\kappa\in]0,\infty[:\quad|V(\varepsilon,\delta)-\mathbb{V})|<\kappa\quad\forall\varepsilon\in]0,\theta_\kappa[\quad\forall\delta\in]0,\theta_\kappa[$. $\square$

Теорема 1 характеризует $\mathbb{V}$ как обобщенный предел реализуемых максиминов, определяя их асимптотику исчерпывающим образом.

§ 4. Конструкция расширения

Далее приводится сводка некоторых понятий из к.-а. теории меры, которые затем будут использоваться в двух вариантах, соответствующих конструкциям расширений двух участников антагонистической игры с ограничениями моментного характера (мы ограничиваемся в дальнейшем рассмотрением максимина функции платы). Фиксируем непустое множество E и полуалгебру (п/а) [11, гл. I] $\mathcal{L}$ п/м E. Через $(add)_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всевозможных неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство, порожденное конусом $(add)_+[\mathcal{L}]$ (элементы $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ являются, в частности, в/з функциями на $\mathcal{L}$), получая пространство (всех) в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. Введем также множество всех к.-а. вероятностей (в.) на $\mathcal{L}$ $\mathbb{P}(\mathcal{L})\overset{\triangle}{=}\{\mu\in(add)_+[\mathcal{L}]|\mu(E)=1\}$.

Через $B_o(I,\mathcal{L})$ обозначим множество всех ступенчатых, в смысле $(I,\mathcal{L})$, в/з функций на множестве I ([3, гл. 3], [10, гл. 2]), а через $B(I,\mathcal{L})$ — замыкание $B_o(I,\mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $||\cdot||_I$ (см. [13, с. 261]) пространства $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I; функции из $B(I,\mathcal{L})$ называют ярусными (в смысле $(I,\mathcal{L})$). Отметим, что в общем случае измеримого пространства (ИП) $(I,\mathcal{L})$ имеем, что $B(I,\mathcal{L})$ как подпространство $(\mathbb{B}(I),||\cdot||_I)$, является банаховым пространством, причем пространство $B^*(I,\mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(I,\mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме, определяемой как полная вариация, в этой связи см. [10, § 3.6]. Конкретный изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I,\mathcal{L})$ определяется простейшей операцией интегрирования [10, § 3.3], используемой ниже без дополнительных пояснений. Итак, $(B(I,\mathcal{L}),\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ есть двойственность, что позволяет оснащать $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ стандартной *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ (см. [13, гл. 5]). Теперь мы оснащаем $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ топологией $\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})$, индуцированной из ТП $(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L}))$.

Для построения множеств притяжения (3.1) воспользуемся конструкциями расширения пространства управлений в классе к.-а. мер, а точнее, в классе к.-а. в. на простейшей п/а $\mathcal{L}$ п/м «стрелки» I (подобно [7]), заданной следующим образом: $\mathcal{L}\overset{\triangle}{=}\{[a,b[:\,a\in[0,1],b\in[0,1]\}$. Таким образом, мы получили измеримое пространство $(I,\mathcal{L})$, называемое пространством-стрелкой. Через λ обозначаем след меры Лебега на п/а $\mathcal{L}$, то есть функцию длины. Данная мера счетно-аддитивна и, более того, $\lambda\in\mathbb{P}(\mathcal{L})$. Для ярусной функции $f\in B(I,\mathcal{L})$ введем $f*\lambda\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (неопределенный λ-интеграл f). Имеем известное свойство: $\forall f\in B(I,\mathcal{L})\ \forall g\in B(I,\mathcal{L})$

$$\Bigl(fg\in B(I,\mathcal{L})\Bigr)\,\&\,\Bigl(\int_L fg\,d\lambda=\int_L g\,d(f*\lambda)\Bigr).$$

Очевидно, что $\mathbb{F}\in B(I,\mathcal{L})$. Мы определяем оператор $\mathbf{m}$ из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ по правилу

$$\mathbf{m}(f)\overset{\triangle}{=}f*\lambda\quad\forall f\in\mathbb{F}. \tag{4.1}$$

Из результатов [14, гл. 4] следует, что $\mathbb{P}(\mathcal{L})=cl(\mathbf{m}^1(\mathbb{F}),\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}))$. А значит, мы можем использовать к.-а. в. в качестве обобщенных управлений. Таким образом, получаем следующее вспомогательное МП в пространстве обобщенных управлений-мер (одинаковое для обоих игроков):

$$\mathbf{G}^\lambda\overset{\triangle}{=}\mathbf{as}[\mathbb{P}(\mathcal{L}),\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}),\mathbf{m},\mathcal{F}]\in\mathcal{P}'(\mathbb{P}(\mathcal{L})). \tag{4.2}$$

МП (4.2) подобно (3.1), но реализуются в пространстве обобщенных к.-а. управлений-мер. Последние мы будем использовать при расширении формулы Коши: если $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$, $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$, то

$$\widetilde{\phi}_\mu(t) = \Phi_1(t,0)x_0 + \int_{[0,t[} \Phi_1(t,\zeta)b(\zeta)\mu(d\zeta) \quad \forall t \in [0,1], \tag{4.3}$$

$$\widetilde{\xi}_\nu(t) = \Phi_2(t,0)y_0 + \int_{[0,t[} \Phi_2(t,\zeta)c(\zeta)\nu(d\zeta) \quad \forall t \in [0,1]. \tag{4.4}$$

Отметим, что $\forall u \in \mathbb{F}\ \forall v \in \mathbb{F}$

$$(\phi_u = \widetilde{\phi}_\mu|_{\mu=u*\lambda})\,\&\,(\xi_v = \widetilde{\xi}_\nu|_{\nu=v*\lambda}).$$

Вместе с тем определены операторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, действующие из $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно, по следующим правилам:

$$\mu \longmapsto \widetilde{\phi}_\mu(1) : \mathbb{P}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^k, \quad \nu \longmapsto \widetilde{\xi}_\nu(1) : \mathbb{P}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^l. \tag{4.5}$$

Если в (4.5) $\mu = \mathbf{m}(u) = u * \lambda$, то $\widetilde{\phi}_\mu(\mu) = \phi_u(u)$. Из (2.6), (4.1) и (4.5) следуют следующие свойства суперпозиций операторов $\mathbf{s}_1 \circ \mathbf{m}$ и $\mathbf{s}_2 \circ \mathbf{m}$:

$$\big((\mathbf{s}_1 \circ \mathbf{m})(u) = \phi_u(1)\big)\,\&\,\big(h = \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{m}\big), \quad \big((\mathbf{s}_2 \circ \mathbf{m})(v) = \xi_v(1)\big)\,\&\,\big(g = \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{m}\big). \tag{4.6}$$

Из [8, (4.1)] вытекает, что

$$(\mathbb{G}_1 = \mathbf{s}_1^1(\mathbf{G}^\lambda))\ \&\ (\mathbb{G}_2 = \mathbf{s}_2^1(\mathbf{G}^\lambda)). \tag{4.7}$$

Из (1.5) вытекает, что

$$\mathbf{G}^\lambda \in (\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) - comp)[\mathbb{P}(\mathcal{L})]. \tag{4.8}$$

Введем теперь в рассмотрение одну естественную «стилтьесову» операцию: если u в/з функция на отрезке $[0,1]$, то полагаем, что $(st)[u] : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ есть такая функция множеств, что

$$\big((st)[u](\varnothing) \triangleq 0\big)\,\&\,\big((st)[u](L) \triangleq u(\sup(L)) - u(\inf(L)) \quad \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}\big);$$

известно [10, с. 184], что $(st)[u]$ есть в/з к.-а. мера на $\mathcal{L}$. Очевидно, что $\forall a \in [0,1]$, $\forall b \in [0,1]$ имеем $(st)[u]([a,b[) = u(b) - u(a)$, если $b > a$. Введем также множество $(mo)_+[0;1]$ всех в/з функций v на отрезке $[0,1]$, для каждой из которых и любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ имеет место $(t_1 \leqslant t_2) \Rightarrow (v(t_1) \leqslant v(t_2))$. Следовательно, $(st)[g] \in (add)_+[\mathcal{L}]\ \forall g \in (mo)_+[0;1]$. Введем также

$$(\mathbb{P} - mo)_+[0;1] \triangleq \{g \in (mo)_+[0;1]\,|\,(g(0) = 0)\,\&\,(g(1) = 1)\};$$

очевидно, что $(st)[g] \in \mathbb{P}(\mathcal{L})\ \forall g \in (\mathbb{P} - mo)_+[0;1]$. Условимся о следующем соглашении: если $H \in \mathcal{P}([0,1])$, то χ_H есть def такая функция, что

$$(\chi_H(t) \triangleq 1\ \forall t \in H)\,\&\,(\chi_H(\tau) \triangleq 0\ \forall \tau \in [0,1] \setminus H).$$

Тем самым введены индикаторы п/м $[0,1]$. При этом

$$(\chi_{\{1\}} \in (\mathbb{P} - mo)_+[0;1])\,\&\,(\chi_{]0,1]} \in (\mathbb{P} - mo)_+[0;1]).$$

Рассмотрим также функцию, привязанную к моменту из интервала $]0,1[$: если $t \in]0,1[$ и $\beta \in [0,1]$, то

$$q_\beta[t] \triangleq \beta\chi_{\{t\}} + \chi_{]t,1]} \in (\mathbb{P} - mo)_+[0;1] \tag{4.9}$$

есть такая в/з функция, что $\big(q_\beta[t](\zeta) = 0\ \forall \zeta \in [0,t[\big)\,\&\,\big(q_\beta[t](t) = \beta\big)\,\&\,\big(q_\beta[t](\zeta) = 1\ \forall \zeta \in]t,1]\big)$. Введем обозначения: $\mathcal{R}_1 \triangleq \{\chi_{\{1\}}\}$; $\mathcal{R}_2 \triangleq \{\chi_{]0,1]}\}$; $\mathcal{R}_3 \triangleq \{q_\beta[t] : t \in]0,1[, \beta \in [0,1]\}$. Тогда

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \tag{4.10}$$

есть п/м $(\mathbb{P}-mo)_+[0;1]$. В (4.10) первые два множества есть одноэлементные множества. Пусть

$$\mathbf{P}_* \stackrel{\triangle}{=} \{(st)[r]|\ r \in \mathcal{R}\}, \quad \mathbf{P}_* \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}(\mathcal{L})). \tag{4.11}$$

Из теоремы 3.1 [7] получаем для нашего случая равенство

$$\mathbf{P}_* = \mathbf{G}^\lambda. \tag{4.12}$$

Для того чтобы проанализировать структуру $\mathbf{P}_*$, нам потребуется ввести некоторые необходимые определения. При $t \in I$ через δ_t мы будем обозначать след меры Дирака на п/а $\mathcal{L}$: если $L \in \mathcal{L}$, то $\delta_t(L) = 1\ \forall t \in L$ и $\delta_t(L) = 0\ \forall t \in I \backslash L$. Данная мера является счетно-аддитивной и, более того, из [7, (4.10), (4.11)] имеем $\delta_t = (st)[\chi_{]t,1]}]$. Пусть $t \in I$, тогда

$$\delta_t^- \stackrel{\triangle}{=} (st)[\chi_{[t,1]}]. \tag{4.13}$$

Действие данной чисто к.-а. меры [15] на функцию из $B(E, \mathcal{L})$ сводится к определению предела слева в точке $t \in I$ (см. [7, (4.4)], [10, 3.8]). Напомним, что в данном случае такой предел всегда существует. Проведем преобразование (4.9), а именно:

$$\begin{aligned}(st)[q_\beta[t]] = (st)[\beta\chi_{\{t\}} + (\beta + (1-\beta))\chi_{]t,1]}] = (st)[\beta(\chi_{\{t\}} + \chi_{]t,1]}) + (1-\beta)\chi_{]t,1]}] = \\ = (st)[\beta\chi_{[t,1]} + (1-\beta)\chi_{]t,1]}] = \beta\delta_t^- + (1-\beta)\delta_t.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Теперь рассмотрим структуру $\mathbf{P}_*$. Данное множество состоит из (см. (4.10)):

1) синглетона $\{(st)[\chi_{]0,1]}]\} = \{(st)[r]|\ r \in \mathcal{R}_2\}$, содержащего меру Дирака в начальный момент времени $\delta_0 = (st)[\chi_{]0,1]}]$;

2) множества $\{(st)[r]|\ r \in \mathcal{R}_3\} = \{\beta\delta_t^- + (1-\beta)\delta_t : t \in]0,1[, \beta \in [0,1]\}$ выпуклых комбинаций меры Дирака и чисто к.-а. меры, интеграл по которой дает предел слева (4.13), (4.14), в моменты $t \in]0,1[$;

3) синглетона $\{(st)[\chi_{\{1\}}]\} = \{(st)[r]|\ r \in \mathcal{R}_1\}$, содержащего чисто к.-а. меру $\delta_1^- = (st)[\chi_{[1,1]}] = (st)[\chi_{\{1\}}]$, интеграл по которой дает предел слева в момент $t = 1$.

Введем в рассмотрение отображение $\widetilde{\alpha}$, действующее по правилу

$$(\mu, \nu) \longmapsto \alpha_0(\mathbf{s}_1(\mu), \mathbf{s}_2(\nu)) : \mathbb{P}(\mathcal{L}) \times \mathbb{P}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}.$$

Из непрерывности $\alpha_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ вытекает очевидное свойство: $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{C}(\mathbb{P}(\mathcal{L}) \times \mathbb{P}(\mathcal{L}), \tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) \otimes \tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}))$, где $\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) \otimes \tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})$ — топология $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \times \mathbb{P}(\mathcal{L})$, соответствующая произведению ТП $(\mathbb{P}(\mathcal{L}), \tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}))$ и $(\mathbb{P}(\mathcal{L}), \tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}))$. Следовательно (см. (4.8)), определен обобщенный максимин

$$\max_{\nu \in \mathbf{P}_*} \min_{\mu \in \mathbf{P}_*} \widetilde{\alpha}(\mu, \nu) = \max_{y \in \mathbf{s}_2^1(\mathbf{P}_*)} \min_{x \in \mathbf{s}_1^1(\mathbf{P}_*)} \alpha_0(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Из (3.5), (4.7), теоремы 1 и предложения 5 [8] получаем следующее.

Предложение 3. *Обобщенный и асимптотический максимины совпадают:*

$$\max_{\nu \in \mathbf{P}_*} \min_{\mu \in \mathbf{P}_*} \widetilde{\alpha}(\mu, \nu) = \mathbb{V}. \tag{4.15}$$

Таким образом, наша асимптотическая задача (3.5) сводится к обобщенной, в которой каждый игрок, выбирает управления-меры, а именно к.-а. в. меры, из множества $\mathbf{P}_*$. Причем первый игрок пытается минимизировать $\widetilde{\alpha}$, а второй максимизировать. Благодаря работе [7] мы знаем точное описание МП в пространстве $\mathbb{P}(\mathcal{L})$. Более того, в этой работе доказана определенная нечувствительность МП $\mathbf{P}_*$ к форме управляющего импульса.

Пример 1. Пусть два игрока управляют своими системами на промежутке времени $[0,1]$. Система игрока I имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)b(t).$$

Система игрока II задана следующим образом:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = v(t)c(t).$$

Начальные условия — нулевые. Функции b, c являются ярусными, и заданы следующими способами:

$$(b(t) = 4t \quad \forall t \in [0, 1/4[) \,\&\, (b(t) = t \quad \forall t \in [1/4, 1[);$$

$$(c(t) = 6t \quad \forall t \in [0, 1/2[) \,\&\, (c_2(t) = 1 \quad \forall t \in [1/2, 1[).$$

Более того, $u \in F_\varepsilon, v \in F_\delta$. Пусть задана также функция

$$\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1)) \stackrel{\triangle}{=} |x_1(1) - y_1(1)|,$$

где ϕ_u, ξ_v — траектории первой и второй системы соответственно. Очевидно, α_0 есть непрерывный функционал на метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \rho)$ (см. (2.9)). Значит определено значение $\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1))$, которое первый игрок путем выбора u пытается минимизировать, а второй путем выбора v максимизировать.

Как было установлено ранее (см. (4.12)), множество $\mathbf{P}_*$ является для первой и второй системы множеством притяжения в пространстве обобщенных управлений — к.-а. в. Из (4.3), (4.4) для нашего примера получаем

$$\widetilde{\phi}_\mu(1) = \int_{[0,1[} (1-t)b(t)\mu(dt), \quad \widetilde{\xi}_\nu(1) = \int_{[0,1[} (1-t)c(t)\nu(dt),$$

где μ, ν пробегают $\mathbf{P}_*$. Используя [7, (4.5)–(4.14)], не составляет труда определить пространство терминальных состояний обобщенных траекторий для систем 1 и 2 (далее рассмотрим только координаты x_1, y_1). Для x_1 получаем следующее множество притяжения:

$$\{0\} \cup \{0\} \cup \big\{4t - 4t^2 : t \in]0, 1/4[\big\} \cup \big\{(9\beta/16 + 3/16) : \beta \in [0,1]\big\} \cup \big\{t - t^2 : t \in]1/4, 1[\big\} = [0, 3/4].$$

Первый компонент данного множества соответствует выбору управления в начале, второй — в конце промежутка управления (меры $(st)[\chi_{]0,1]}]$ и $(st)[\chi_{\{1\}}]$ соответственно). Три последних компонента соответствуют выбору одного из трех промежутков времени для выбора управления: первый — до точки разрыва функции b, то есть $t \in]0, 1/4[$; второй — в момент разрыва ($t = 1/4$), третий — после разрыва ($t \in]1/4, 1[$); это воспроизводит выбор меры из множества $\{(st)[q_\beta[t]] \mid t \in]0, 1[, \beta \in [0, 1]\}$. Рассчитаем аналогичное множество для y_1, при этом оставим порядок компонент множества в том же смысловом порядке. Получаем:

$$\{0\} \cup \{0\} \cup \big\{6t(1-t) : t \in]0, 1/2[\big\} \cup \big\{\beta + 1/2 : \beta \in [0,1]\big\} \cup \big\{1 - t : t \in]1/2, 1[\big\} = [0, 3/2].$$

Найдем обобщенный максимин (см. (4.15)). Он равен $3/4$ и достигается при выборе вторым игроком меры $\nu = (st)[q_\beta[t]]$, где $t = 1/2$, $\beta = 1$ и первым игроком меры $\mu = (st)[q_\beta[t]]$, где $t = 1/4$, $\beta = 1$ (то есть ν — максиминное управление второго игрока, μ — управление первого игрока, минимизирующее результат игры при выборе управления ν вторым игроком). Данные чисто к.-а. меры реализуют предел слева для ярусных функций b, c в соответствующих точках разрыва (см. [10, § 3.9]). Асимптотический результат данной игры будет также равен $3/4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.
4. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.

5. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and Relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 p.
6. Chentsov A. G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 133, № 2. P. 1045–1206.
7. Скворцова А. В., Ченцов А. Г. О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.
8. Ченцов А. Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. Вып. 3. С. 104–119.
9. Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В. Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. Вып. 1. С. 89–111.
10. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: РИО УГТУ–УПИ, 2008. 389 с.
11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
12. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968. 385 с.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
14. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993. 232 с.
15. Joside K., Hewitt E. H. Finitely additive measures // Trans. Amer. Soc. 1952. Vol. 72. P. 46–66.

Поступила в редакцию 13.04.11

A. P. Baklanov
A game problem with asymptotic impulse control

We consider a game problem of maximin of cost function defined on the product of attraction sets of players' dynamic systems terminal positions. These sets are constructed using the extension in the class of finitely additive measures.

Keywords: impulse control, finitely additive measures, extension, maximin.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Бакланов Артем Павлович, аспирант, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: artem.baklanov@gmail.com

Baklanov Artem Pavlovich, post-graduate student, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.