МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

УДК 517.926, 517.929, 517.977

© *А. А. Щеглова, И. И. Матвеева*

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Рассматривается начальная задача для линейной нестационарной управляемой системы дифференциально-разностных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при производной искомой вектор-функции в главной части. Получены достаточные и необходимый и достаточный критерии полной управляемости такой системы на некотором отрезке из области определения. Основой для анализа послужило преобразование главной части к так называемой «эквивалентной форме», в которой разделены «дифференциальная» и «алгебраическая» составляющие.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, дифференциально-разностные уравнения, управляемость.

Введение

Рассматривается начальная задача для управляемой системы дифференциально-разностных уравнений

$$A(t)x'(t)+B(t)x(t)+D(t)x(t-\sigma)+U(t)u(t)=0,\ \ t\in I=[0,+\infty), \tag{0.1}$$

$$x(t)=\psi(t),\ \ t\in T_0=[-\sigma,0), \tag{0.2}$$

где $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция, $u(t)$ — l-мерный вектор управления, $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ — заданные $(n\times n)$-матрицы, $U(t)$ — заданная матрица размеров $n\times l$, $\psi(t)$ — заданная n-мерная вектор-функция, $\sigma=\mathrm{const}>0$. Предполагается, что $\det A(t)\equiv 0$ на I, а элементы матриц $A(t),B(t),D(t),U(t)$ и вектор-функции $\psi(t)$ обладают достаточной для дальнейших рассуждений гладкостью.

Вырожденные системы управления с запаздыванием представляют не только теоретический интерес, но и имеют широкий спектр приложений. Они часто встречаются при моделировании процессов, происходящих в сложных энергетических или химических установках, в робототехнике, при стабилизации летательных аппаратов, в пневматических, гидравлических, электрических и других технических системах, включающих в себя линии передачи без потерь [1–5].

В стационарном случае вырожденные системы дифференциально-разностных уравнений изучались многими авторами (см., в частности, [6–11]). В данной работе сделана попытка исследования управляемости системы с переменными коэффициентами. Получены достаточные и необходимый и достаточный критерии полной управляемости системы (0.1) на некотором отрезке из I. Основой для анализа послужило преобразование главной части $A(t)x'(t)+B(t)x(t)$ к так называемой «эквивалентной форме», в которой разделены «дифференциальная» и «алгебраическая» составляющие [12].

§ 1. Определения и обозначения

Системе (0.1) поставим в соответствие матрицы

$$\Gamma_{r,3}(t)=\begin{pmatrix} C_1^1A(t) & O & \dots & O\\ C_2^1A'(t)+C_2^2B(t) & C_2^2A(t) & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_r^1A^{(r-1)}(t)+C_r^2B^{(r-2)}(t) & C_r^2A^{(r-2)}(t)+C_r^3B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^rA(t)\end{pmatrix},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (Интеграционный проект 85).

$$\Gamma_{r,2}(t)=\begin{pmatrix} C_0^0A(t) & O\\ \begin{pmatrix} C_1^0A'(t)+C_1^1B(t)\\ \vdots\\ C_r^0A^{(r)}(t)+C_r^1B^{(r-1)}(t)\end{pmatrix} & \Gamma_{r,3}(t)\end{pmatrix},\quad \Gamma_{r,1}(t)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}B(t)\\ B'(t)\\ \vdots\\ B^{(r)}(t)\end{pmatrix} & \Gamma_{r,2}(t)\end{pmatrix}.$$

Здесь и далее $C_j^i=\dfrac{j!}{(j-i)!i!}$ — биномиальные коэффициенты.

Определим операторы:

$$\mathbf{D}_m[Z(t)]=\begin{pmatrix} C_0^0Z(t) & O & \dots & O\\ C_1^0Z'(t) & C_1^1Z(t) & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_m^0Z^{(m)}(t) & C_m^1Z^{(m-1)}(t) & \dots & C_m^mZ(t)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}_m[Z(t)]=\operatorname{colon}\Big(Z(t),Z'(t),\dots,Z^{(m)}(t)\Big)\,{}^2,$$

где $m>0$ — целое число, $Z(t)$ — некоторая матрица с достаточно гладкими элементами. Операторы $\mathbf{D}_0[.]$ и $\mathbf{d}_0[.]$ понимаются как тождественные.

Введем в рассмотрение интервалы $T_k=[(k-1)\sigma,k\sigma)$, $k=0,1,2,\dots,$ а также отрезок $I_\nu=[0,\nu\sigma]$ для некоторого натурального ν.

Определение 1. *Решением* задачи (0.1), (0.2) называется n-мерная вектор-функция $x(t)\in\mathbb{C}^1(T_k)$ $(k=1,2,\dots)$, определенная на интервале $[-\sigma,+\infty)$ и удовлетворяющая поточечно уравнению (0.1) и условию (0.2).

В теории систем вида

$$A(t)x'(t)+B(t)x(t)+U(t)u(t)=0,\ \ t\in I \tag{1.1}$$

с $\det A(t)\equiv 0$ (называемых, в частности, алгебро-дифференциальными системами) мерой неразрешенности относительно $x'(t)$ служит целочисленная величина r $(0\leqslant r\leqslant n)$, называемая *индексом.*

Определение 2. *Индексом* системы (0.1) будем называть индекс ее главной части.

Определение 3. Система (1.1) называется *полностью управляемой на отрезке* $[t_0,t_1]\subset I$, если для любых векторов $a,b\in\mathbb{R}^n$ найдется управление $u(t)\in\mathbb{C}^r([t_0,t_1])$ такое, что существует решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям $x(t_0)=a$, $x(t_1)=b$.

§ 2. Эквивалентная форма

Лемма 1. *Пусть:*
1) $A(t),B(t),D(t),U(t)\in\mathbb{C}^{r+l}(I_\nu)$, $u(t)\in\mathbb{C}^{r+l}(T_k)$ $(k=\overline{1,\nu})$, $l\geqslant 0$ — *целое число;*
2) $\operatorname{rank}\Gamma_{r,3}(t)=\rho=\mathrm{const}$ $\forall t\in I_\nu$;
3) *в матрице* $\Gamma_{r,1}(t)$ *имеется неособенный* $\forall t\in I_\nu$ *минор порядка* $n(r+1)$, *включающий в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,3}(t)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,2}(t)$.

Тогда на I_ν *определен оператор*

$$\mathbf{R}=R_0(t)+R_1(t)\frac{d}{dt}+\ldots+R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r, \tag{2.1}$$

$\big(R_j(t)\in\mathbb{C}^l(I_\nu),\ \ j=\overline{0,r}\big)$, *действие которого преобразует уравнение* (0.1) *к виду*

$$\begin{pmatrix}E_{n-d} & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_{(1)}(t)\\ x'_{(2)}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}J_{(1)}(t) & O\\ J_{(2)}(t) & E_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{(1)}(t)\\ x_{(2)}(t)\end{pmatrix}+$$

[2] $\operatorname{colon}(c_1,c_2,\dots,c_r)=\left(c_1^\top\ c_2^\top\ \dots\ c_r^\top\right)^\top$, $c_i\in\mathbb{R}^n$, $^\top$ — символ транспонирования.

$$+\sum_{j=0}^{r} D_j(t)\begin{pmatrix} x_{(1)}^{(j)}(t-\sigma) \\ x_{(2)}^{(j)}(t-\sigma)\end{pmatrix} + \widetilde{U}(t)\,\mathbf{d}_r[u(t)] = 0,\ \ t\in T_k,\ \ k=\overline{1,\nu}, \tag{2.2}$$

где $\operatorname{colon}\big(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t)\big) = Qx(t)$, Q *— матрица перестановок строк,*

$$\begin{pmatrix} J_{(2)}(t) & E_d \\ J_{(1)}(t) & O\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t)\end{pmatrix}\mathbf{d}_r\,[B(t)]\,Q^{-1}, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{U}(t) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t)\end{pmatrix}\mathbf{D}_r[U(t)], \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} D_0(t) & D_1(t) & \ldots & D_r(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E_{n-d} \\ E_d & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t)\end{pmatrix}\times$$
$$\times\,\mathbf{D}_r[D(t)]\operatorname{diag}\left\{Q^{-1},\ldots,Q^{-1}\right\}^{3}. \tag{2.5}$$

Замечание 1. Порядок r оператора (2.1) является индексом системы (0.1).

Поставим для (2.2) начальную задачу

$$\operatorname{colon}\big(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t)\big) = \operatorname{colon}\big(\psi_{(1)}(t), \psi_{(2)}(t)\big),\ \ t\in T_0, \tag{2.6}$$

где $\operatorname{colon}\big(\psi_{(1)}(t), \psi_{(2)}(t)\big) = Q\psi(t)$.

Лемма 2. *Пусть:*
1) $A(t), B(t), D(t), U(t) \in \mathbb{C}^{2r+1}(I_\nu)$; $\psi(t)\in\mathbb{C}^{\nu r}(T_0)$; $A(t), B(t), D(t), U(t)$, $u(t)\in \mathbb{C}^{(\nu-k+1)r}(T_k)$, $k=\overline{1,\nu}$;
2) *выполнены условия* 2), 3) *леммы* 1*;*
3) $\operatorname{rank}\Gamma_{r+1,2}(t) = \operatorname{rank}\Gamma_{r,2}(t) + n\ \ \forall t\in I_\nu$.

Тогда на отрезке $[-\sigma,\nu\sigma]$ *существует решение задачи* (0.1), (0.2)*, которое является решением задачи* (2.2), (2.6)*, и наоборот.*

Леммы 1 и 2 являются прямым следствием теорем, доказанных в [12]. Там же предложен конструктивный алгоритм нахождения коэффициентов оператора $\mathbf{R}$.

Определение 4. Задачу (2.2), (2.6) назовем *эквивалентной формой* для задачи (0.1), (0.2).

Обозначим $X^{[k]}(t)$ — $(n-d)\times(n-d)$-матрицу, являющуюся решением задачи Коши

$$\Big(X^{[k]}(t)\Big)' + J_{(1)}(t)X^{[k]}(t) = 0,\ \ t\in T_k;\quad X^{[k]}((k-1)\sigma) = E_{n-d},\ \ k=1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

Пусть $x^{[k]}(t) = x(t)$, $t\in T_k$, $k=0,1,2,\ldots$. Сделав в (2.2), (2.6) замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_{(1)}^{[k]}(t) \\ x_{(2)}^{[k]}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{[k]}(t) & O \\ -J_{(2)}(t) & E_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{(1)}^{[k]}(t) \\ z_{(2)}^{[k]}(t)\end{pmatrix}\ \ (k=\overline{1,\nu}),\ \ \begin{pmatrix} x_{(1)}^{[0]}(t) \\ x_{(2)}^{[0]}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{(1)}^{[0]}(t) \\ z_{(2)}^{[0]}(t)\end{pmatrix},$$

получим задачу

$$\Big(z_{(1)}^{[k]}\Big)'(t) + G_{(1)}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_r\Big[z_{(1)}^{[k-1]}(t-\sigma)\Big] + G_{(2)}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_r\Big[z_{(2)}^{[k-1]}(t-\sigma)\Big] + U_{(1)}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{2.8}$$

$$z_{(2)}^{[k]}(t) + G_{(3)}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_r\Big[z_{(1)}^{[k-1]}(t-\sigma)\Big] + G_{(4)}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_r\Big[z_{(2)}^{[k-1]}(t-\sigma)\Big] + U_{(2)}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{2.9}$$

$t\in T_k$, $k=\overline{1,\nu}$,

[3] Запись $\operatorname{diag}\{A_1,\ldots,A_s\}$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые.

$$\operatorname{colon}\left(z_{(1)}^{[0]}(t), z_{(2)}^{[0]}(t)\right) = \operatorname{colon}\left(\psi_{(1)}(t), \psi_{(2)}(t)\right), \quad t \in T_0, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{pmatrix} U_{(1)}^{[k]}(t) \\ U_{(2)}^{[k]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(X^{[k]}(t)\right)^{-1} & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \widetilde{U}(t),$$

$$\begin{pmatrix} G_{(1)}^{[k]}(t) & G_{(2)}^{[k]}(t) \\ G_{(3)}^{[k]}(t) & G_{(4)}^{[k]}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(X^{[k]}(t)\right)^{-1} & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_{(1)0}^{[k]} & \ldots & D_{(1)r}^{[k]} & D_{(2)0}^{[k]} & \ldots & D_{(2)r}^{[k]} \\ \hline D_{(3)0}^{[k]} & \ldots & D_{(3)r}^{[k]} & D_{(4)0}^{[k]} & \ldots & D_{(4)r}^{[k]} \end{array}\right) \times$$

$$\times \operatorname{diag}\Big\{\mathcal{J}(t-\sigma)\operatorname{diag}\{X^{[k-1]}(t-\sigma), \ldots, X^{[k-1]}(t-\sigma)\}, E\Big\},$$

$$\begin{pmatrix} D_{(1)j}^{[1]}(t) & D_{(2)j}^{[1]}(t) \\ D_{(3)j}^{[1]}(t) & D_{(4)j}^{[1]}(t) \end{pmatrix} = D_j(t), \quad t \in T_1,$$

$$\begin{pmatrix} D_{(1)j}^{[k]}(t) & D_{(2)j}^{[k]}(t) \\ D_{(3)j}^{[k]}(t) & D_{(4)j}^{[k]}(t) \end{pmatrix} = D_j(t) \begin{pmatrix} E & O \\ -C_j^j J_{(2)}(t-\sigma) & E \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{r-j} D_{j+i}(t) \begin{pmatrix} O & O \\ -C_{j+i}^j J_{(2)}^{(i)}(t-\sigma) & O \end{pmatrix},$$

$t \in T_k$, $j = \overline{0, r}$, $k = \overline{2, \nu}$,

$$\mathcal{J}(t) = \begin{pmatrix} C_0^0\,\mathcal{J}_0(t) & O & \ldots & O \\ C_1^0\,\mathcal{J}_1(t) & C_1^1\,\mathcal{J}_0(t) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0\,\mathcal{J}_r(t) & C_r^1\,\mathcal{J}_{r-1}(t) & \ldots & C_r^r\,\mathcal{J}_0(t) \end{pmatrix},$$

матрицы $\mathcal{J}_j(t)$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\mathcal{J}_0(t) = E_{n-d}, \quad \mathcal{J}_j(t) = \mathcal{J}_{j-1}'(t) - \mathcal{J}_{j-1}(t) J_{(1)}(t), \ \ j = \overline{1, r},$$

а $D_j(t)$ $(j = \overline{0, r})$ и $\widetilde{U}(t)$ находятся в соответствии с (2.4), (2.5).

§ 3. Вид решения задачи

Для решения задачи (2.8)–(2.10) справедливо представление

$$z_{(1)}^{[1]}(t) = g_{(1)}^{[1]}(t) + \int_0^t \xi_{(1)}^{[1]}(\tau)\,d\tau, \quad z_{(2)}^{[1]} = g_{(2)}^{[1]}(t) + \xi_{(2)}^{[1]}(t), \ \ t \in T_1; \tag{3.1}$$

$$z_{(1)}^{[k]}(t) = g_{(1)}^{[k]}(t) + \int_{(k-1)\sigma}^t \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} V_{(1)j}^{[k]}(\tau) z_{(1)}^{[j]}(\tau - (k-j)\sigma)\right) d\tau + \int_{(k-1)\sigma}^t \xi_{(1)}^{[k]}(\tau)\,d\tau, \tag{3.2}$$

$$z_{(2)}^{[k]}(t) = g_{(2)}^{[k]}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} V_{(3)j}^{[k]}(t) z_{(1)}^{[j]}(t - (k-j)\sigma) + \xi_{(2)}^{[k]}(t), \ \ t \in T_k, \quad k = \overline{2, \nu}, \tag{3.3}$$

где

$$\xi_{(i)}^{[k]}(t) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j+1} K_{(i)j}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_{(k-j+1)r}\left[u^{[j]}(t - (k-j)\sigma)\right], \ \ t \in T_k, \ \ k = \overline{1, \nu}, \ \ i = 1, 2; \tag{3.4}$$

$$g_{(1)}^{[0]}(t) = \psi_{(1)}(t), \quad g_{(2)}^{[0]}(t) = \psi_{(2)}(t), \ \ t \in T_0;$$

$$g_{(1)}^{[k]}(t) = z_{(1)}^{[k]}((k-1)\sigma+0) - \int_{(k-1)\sigma}^{t} \left(H_{(1)k-1}^{[k]}(\tau)\,\mathbf{d}_r \left[g_{(1)}^{[k-1]}(\tau-\sigma) \right] - \right.$$

$$\left. -H_{(2)k-1}^{[k]}(\tau)\,\mathbf{d}_r \left[g_{(2)}^{[k-1]}(\tau-\sigma) \right] \right) d\tau,$$

$$g_{(2)}^{[k]}(t) = (-1)^k \left(H_{(3)0}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_{kr}[\psi_{(1)}(t-k\sigma)] + H_{(4)0}^{[k]}(t)\,\mathbf{d}_{kr}[\psi_{(2)}(t-k\sigma)] \right), \quad t \in T_k, \quad k = \overline{1,\nu}; \tag{3.5}$$

$$K_{(i)k}^{[k]}(t) = U_{(i)}^{[k]}(t),$$

$$K_{(i)j}^{[k]}(t) = \left(\begin{array}{cc} W_{(2i-1)j}^{[k]}(t)\,\mathbf{D}_{(k-j)r-1} \left[U_{(1)}^{[j]}(t-(k-j)\sigma) \right] & O_l \end{array} \right)^4 +$$

$$+H_{(2i)j}^{[k]}(t)\,\mathbf{D}_{(k-j)r} \left[U_{(2)}^{[j]}(t-(k-j)\sigma \right], \quad t \in T_k, \quad i=1,2, \quad j = \overline{1,k-1}; \tag{3.6}$$

$$H_{(i)k-1}^{[k]}(t) = G_{(i)}^{[k]}(t),$$

$$H_{(i)j}^{[k]}(t) = \left(\begin{array}{cc} W_{(i_1)j+1}^{[k]}(t)\,\mathbf{D}_{(k-j-1)r-1} \left[G_{(i_2)}^{[j+1]}(t-(k-j-1)\sigma) \right] & O_{n_i} \end{array} \right) +$$

$$+H_{(i_1+1)j+1}^{[k]}(t)\,\mathbf{D}_{(k-j-1)r} \left[G_{(i_2+2)}^{[j+1]}(t-(k-j-1)\sigma \right], \quad t \in T_k, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{0,k-2}, \tag{3.7}$$

где $i_1 = \begin{cases} 1, & i=1,2 \\ 3, & i=3,4 \end{cases}$, $\quad i_2 = \begin{cases} 1, & i=1,3 \\ 2, & i=2,4 \end{cases}$; $n_1 = n_3 = n-d$, $n_2 = n_4 = d$; $V_{(i)j}^{[k]}(t)$ и $W_{(i)j}^{[k]}(t)$ — блоки матрицы

$$H_{(i)j}^{[k]}(t) = \left(\begin{array}{cc} V_{(i)j}^{[k]}(t) & W_{(i)j}^{[k]}(t) \end{array} \right), \quad i=1,3, \tag{3.8}$$

причем матрицы $V_{(i)j}^{[k]}(t)$ состоят из $n-d$ столбцов.

Формулы (3.1)–(3.3) получены с помощью исключения на каждом k-м шаге из уравнений (2.8), (2.9) функций $\left(z_{(1)}^{[j]}(t)\right)'$, $z_{(2)}^{[j]}(t)$ $(j = \overline{1,k-1})$ и их производных.

Лемма 3. *Пусть выполнены все предположения леммы* 2.
Тогда решение задачи (2.8)–(2.10) *на отрезке* $[-\sigma,\nu\sigma]$ *существует и представимо в виде*

$$z_{(1)}^{[k]}(t) = g_{(1)}^{[k]}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \int_{(k-1)\sigma}^{t} P_j^{[k]}(\tau) g_{(1)}^{[j]}(\tau-(k-j)\sigma)\,d\tau + \int_{(k-1)\sigma}^{t} \xi_{(1)}^{[k]}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \int_{(k-1)\sigma}^{t} \left(\mathcal{H}_j^{[k]}(t) - \mathcal{H}_j^{[k]}(\tau) \right) \xi_{(1)}^{[j]}(\tau-(k-j)\sigma)\,d\tau, \quad t \in T_k, \quad k = \overline{2,\nu}; \tag{3.9}$$

$$z_{(2)}^{[2]}(t) = g_{(2)}^{[2]}(t) - V_{(3)1}^{[2]}(t) g_{(1)}(t-\sigma) + \xi_{(2)}^{[2]}(t) + V_{(3)1}^{[2]}(t) \int_{\sigma}^{t} \xi_{(1)}^{[1]}(\tau-\sigma)\,d\tau, \quad t \in T_2, \tag{3.10}$$

$$z_{(2)}^{[k]}(t) = g_{(2)}^{[k]}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} V_{(3)j}^{[k]}(t) g_{(1)}^{[j]}(t-(k-j)\sigma) +$$

$$+\sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{k-j} \sum_{i=j+1}^{k-1} V_{(3)i}^{[k]}(t) \int_{(k-1)\sigma}^{t} P_j^{[i]}(\tau-(k-i)\sigma) g_{(1)}^{[j]}(\tau-(k-j)\sigma)\,d\tau +$$

---

[4] Здесь и ниже верхний индекс при нулевой матрице показывает число строк, а нижний — число столбцов в ней.

$$+\xi^{[k]}_{(2)}(t)+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}V^{[k]}_{(3)j}(t)\int_{(k-1)\sigma}^{t}\xi^{[j]}_{(1)}(\tau-(k-j)\sigma)\,d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-2}(-1)^{k-j}\sum_{i=j+1}^{k-1}V^{[k]}_{(3)i}(t)\int_{(k-1)\sigma}^{t}\Big(\mathcal{H}^{[i]}_{j}(t-(k-i)\sigma)-\mathcal{H}^{[i]}_{j}(\tau-(k-i)\sigma\Big)\,\xi^{[j]}_{(1)}(\tau-(k-j)\sigma)\,d\tau, \tag{3.11}$$

$t\in T_k$, $k=\overline{3,\nu}$. *Здесь матрицы* $\mathcal{H}^{[k]}_{j}(t)$ *и* $P^{[k]}_{j}(t)$ *вычисляются по рекуррентным формулам:*

$$\mathcal{H}^{[k]}_{k-1}(t)=\int_{(k-1)\sigma}^{t}V^{[k]}_{(1)k-1}(\tau)\,d\tau,$$

$$\mathcal{H}^{[k]}_{j}(t)=(-1)^{k-j}\int_{(k-1)\sigma}^{t}F^{[k]}_{j}(\tau)\,d\tau+\sum_{i=j+1}^{k-1}\mathcal{H}^{[k]}_{i}(t)\int_{(k-1)\sigma}^{t}V^{[i]}_{(1)j}(\tau-(k-i)\sigma)\,d\tau, \tag{3.12}$$

$$P^{[k]}_{k-1}(t)=V^{[k]}_{(1)k-1}(t),$$

$$P^{[k]}_{j}(t)=V^{[k]}_{(1)j}(t)+\sum_{i=j+1}^{k-1}P^{[k]}_{i}(t)\int_{(k-1)\sigma}^{t}V^{[i]}_{(1)j}(\tau-(k-1)\sigma)\,d\tau, \tag{3.13}$$

$$F^{[k]}_{j}(t)=(-1)^{k-j}V^{[k]}_{(1)j}(t)+(-1)^{k-j+1}\sum_{i=j+1}^{k-1}\mathcal{H}^{[k]}_{i}(t)V^{[i]}_{(1)j}(t-(k-i)\sigma),\ \ t\in T_k,\ \ j=\overline{0,k-2}.$$

Функции $z^{[1]}_{(1)}(t)$, $z^{[1]}_{(2)}(t)$, $t\in T_1$ *находятся в соответствии с формулами* (3.1).

Доказательство леммы опущено. Оно представляет собой процесс получения явного представления для решения задачи (3.1)–(3.3), (2.10) методом шагов.

§ 4. Критерии управляемости

Определение 5. Будем говорить, что система (0.1) *полностью управляема на отрезке* I_ν, кратко управляема, если для любой функции $\psi(t)\in\mathbb{C}^{\nu r}(T_0)$ и любых значений $a^{[k]},b^{[k]}\in\mathbb{R}^n$ найдутся векторы управления $u^{[k]}(t)\in\mathbb{C}^{(\nu-k+1)r}(T_k)$, определенные на соответствующих интервалах T_k $(k=\overline{1,\nu})$, такие, что на $[-\sigma,\nu\sigma]$ существует решение задачи (0.1), (0.2), удовлетворяющее условиям

$$x((k-1)\sigma+0)=a^{[k]},\quad x(k\sigma-0)=b^{[k]},\quad k=\overline{1,\nu}. \tag{4.1}$$

Если система (0.1) управляема, то, выбирая $a_1=\psi(-0)$, $a_{k+1}=b_k$ ($k=\overline{1,\nu-1}$), можно построить непрерывное на $[-\sigma,\nu\sigma]$ решение задачи (0.1), (0.2).

Теорема 1. *Пусть имеют место все предположения леммы* 2. *Система* (0.1) *полностью управляема на отрезке* I_ν, *если выполняются условия:*
1) $\operatorname{rank}\widetilde U_{(2)}((k-1)\sigma)=d$ $\forall k=\overline{1,\nu+1}$, *где*

$$\operatorname{colon}\Big(\widetilde U_{(1)}(t),\widetilde U_{(2)}(t)\Big)=\widetilde U(t),$$

матрица $\widetilde U_{(2)}(t)$ *состоит из* d *строк,* $\widetilde U(t)$ *находится по формуле* (2.4);
2) $\forall k=\overline{1,\nu}$ $\exists\tau_k\in[(k-1)\sigma,k\sigma]:$ $\operatorname{rank}\mathcal{Q}(\tau_k)=n-d$, *где*

$$\mathcal{Q}(t)=\begin{pmatrix}\mathcal{Q}_0(t) & \mathcal{Q}_1(t) & \ldots & \mathcal{Q}_{n-d-1}(t)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_0(t)=\widetilde U_{(1)}(t),\ \ \mathcal{Q}_i(t)=J_{(1)}(t)\,\mathcal{Q}_{i-1}(t)-\mathcal{Q}'_{i-1}(t),\ \ i=\overline{1,n-d-1}.$$

Справедливость теоремы вытекает из того очевидного факта, что система (0.1) полностью управляема на I_ν, если система (1.1) полностью управляема на каждом из отрезков $[(k-1)\sigma, k\sigma]$ ($k=\overline{1,\nu}$). Предположения 1) и 2) представляют собой достаточное условие такой управляемости в случае, когда для (1.1) на I_ν определена эквивалентная форма [13].

Получим необходимое и достаточное условие управляемости системы (0.1).

Для системы (2.8), (2.9) запишем аналог условий (4.1)

$$z_{(1)}^{[k]}((k-1)\sigma+0)=a_{(1)}^{[k]}, \tag{4.2}$$

$$z_{(1)}^{[k]}(k\sigma-0)=b_{(1)}^{[k]},\quad z_{(2)}^{[k]}((k-1)\sigma+0)=a_{(2)}^{[k]},\quad z_{(2)}^{[k]}(k\sigma-0)=b_{(2)}^{[k]},\quad k=\overline{1,\nu}, \tag{4.3}$$

где $\begin{pmatrix} a_{(1)}^{[k]} \\ a_{(2)}^{[k]} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ J_{(2)}((k-1)\sigma+0) & E_d \end{pmatrix}Qa^{[k]},\qquad \begin{pmatrix} b_{(1)}^{[k]} \\ b_{(2)}^{[k]} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X^{[k]}(k\sigma-0) & O \\ J_{(2)}(k\sigma-0) & E_d \end{pmatrix}Qb^{[k]}$, $J_{(2)}(t)$ находится из соотношения (2.3), $X^{[k]}(t)$ — решение задачи (2.7). Управления $u^{[k]}(t)$ призваны обеспечить выполнение соотношений (4.3), при этом равенство (4.2) рассматривается в качестве начального условия для уравнения (2.8) при известных функциях $z_{(1)}^{[k-1]}(t-\sigma)$, $z_{(2)}^{[k-1]}(t-\sigma)$.

Условия (4.3) с учетом представлений (3.1), (3.9)–(3.11), (3.4) приобретают вид

$$f_1=\mathcal{K}^{[\nu]}(+0)\,\mathrm{colon}\Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(+0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(\sigma+0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}((\nu-1)\sigma+0)]\Big), \tag{4.4}$$

$$f_2=\mathcal{K}^{[\nu]}(\sigma-0)\,\mathrm{colon}\Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(\sigma-0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(2\sigma-0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}(\nu\sigma-0)]\Big)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu-1}\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}\overline{M}_j(\tau_j)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r}[u^{[j]}(\tau_j)]d\tau_j, \tag{4.5}$$

$$f_3=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}M_j(\tau_j)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r}[u^{[j]}(\tau_j)]d\tau_j, \tag{4.6}$$

где $f_i=\mathrm{colon}\,(f_{i,1},\ldots,f_{i,\nu})$, $i=1,2,3$,

$$f_{1,k}=a_{(2)}^{[k]}-g_{(2)}^{[k]}((k-1)\sigma+0)-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}V_{(3)j}^{[k]}((k-1)\sigma+0)g_{(1)}^{[j]}((j-1)\sigma+0),\quad k=\overline{1,\nu};$$

$$f_{2,1}=b_{(2)}^{[1]}-g_{(2)}^{[1]}(\sigma-0),\quad f_{3,1}=b_{(1)}^{[1]}-g_{(1)}^{[1]}(\sigma-0),$$

$$f_{2,k}=b_{(2)}^{[k]}-g_{(2)}^{[k]}(k\sigma-0)-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}V_{(3)j}^{[k]}(k\sigma-0)g_{(1)}^{[j]}(j\sigma-0)-$$
$$-\sum_{j=1}^{k-2}(-1)^{k-j}\sum_{i=j+1}^{k-1}V_{(3)i}^{[k]}(k\sigma-0)\int_{(k-1)\sigma}^{k\sigma}P_j^{[i]}(\tau-(k-i)\sigma)g_{(1)}^{[j]}(\tau-(k-j)\sigma)\,d\tau,$$

$$f_{3,k}=b_{(1)}^{[k]}-g_{(1)}^{[k]}(k\sigma-0)-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\int_{(k-1)\sigma}^{k\sigma}P_j^{[k]}(\tau)g_{(1)}^{[j]}(\tau-(k-1)\sigma)\,d\tau,\quad k=\overline{2,\nu};$$

$$\mathcal{K}^{[\nu]}(\tau_1)=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathcal{K}_1^{[\nu]}(\tau_1) & \begin{matrix} O^d \\ \mathcal{K}_2^{[\nu]}(\tau_1+\sigma)\end{matrix} & \begin{matrix} O^{2d} \\ \mathcal{K}_3^{[\nu]}(\tau_1+2\sigma)\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} O^{(\nu-1)d} \\ \mathcal{K}_\nu^{[\nu]}(\tau_1+(\nu-1)\sigma)\end{matrix}\end{array}\right), \tag{4.7}$$

$\tau_1 \in T_1$; векторы $g^{[k]}_{(1)}(t)$, $g^{[k]}_{(2)}(t)$ вычисляются по формулам (3.5), матрицы $V^{[k]}_{(3)j}(t)$ и $P^{[k]}_j(t)$ — соответственно по формулам (3.7), (3.8) и (3.13);

$$\mathcal{K}^{[\nu]}_k(\tau_k) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
-K^{[k]}_{(2)k}(\tau_k) & O_{rl} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{K^{[k+1]}_{(2)k}(\tau_k+\sigma)} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{3}{c|}{-K^{[k+2]}_{(2)k}(\tau_k+2\sigma)} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \dots & \vdots \\ \hline
\multicolumn{4}{c|}{(-1)^{\nu+k-2}K^{[\nu-1]}_{(2)k}(\tau_k+(\nu-k-1)\sigma)} & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{5}{c}{(-1)^{\nu+k-1}K^{[\nu]}_{(2)k}(\tau_k+(\nu-k)\sigma)}
\end{array}\right), \quad \tau_k \in T_k, \quad k = \overline{1,\nu};$$

$$M_k(\tau_k) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
O^{(k-1)(n-d)}_{(r+1)l} & O_{rl} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
-K^{[k]}_{(1)k}(\tau_k) & O_{rl} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{\overline{\Theta}^{[k+1]}_k(\tau_k) + K^{[k+1]}_{(1)k}(\tau_k+\sigma)} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{3}{c|}{\overline{\Theta}^{[k+2]}_k(\tau_k) - K^{[k+2]}_{(1)k}(\tau_k+2\sigma)} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \dots & \vdots \\ \hline
\multicolumn{4}{c|}{\overline{\Theta}^{[\nu-1]}_k(\tau_k) + (-1)^{\nu+k-2}K^{[\nu-1]}_{(1)k}(\tau_k+(\nu-k-1)\sigma)} & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{5}{c}{\overline{\Theta}^{[\nu]}_k(\tau_k) + (-1)^{\nu+k-1}K^{[\nu]}_{(1)k}(\tau_k+(\nu-k)\sigma)}
\end{array}\right), \quad \tau_k \in T_k, \quad k = \overline{1,\nu};$$

$$\overline{M}_k(\tau_k) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
O^{kd} & O_{rl} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\Upsilon^{[k+1]}_k(\tau_k) & O_{rl} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{\Theta^{[k+2]}_k(\tau_k) + \Upsilon^{[k+2]}_k(\tau_k)} & O_{rl} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{3}{c|}{\Theta^{[k+3]}_k(\tau_k) + \Upsilon^{[k+3]}_k(\tau_k)} & \dots & O_{rl} \\ \hline
\multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \dots & \vdots \\ \hline
\multicolumn{4}{c|}{\Theta^{[\nu-1]}_k(\tau_k) + \Upsilon^{[\nu-1]}_k(\tau_k)} & O_{rl}
\end{array}\right), \quad \tau_k \in T_k, \quad k = \overline{1,\nu-1};$$

$$\overline{\Theta}^{[k]}_s(\tau_s) = (-1)^{k-s+1}\sum_{j=s}^{k-1}\left(\ \Omega^{[k]}_{(s)j}(\tau_s)\ \Big|\ O_{(k-j)rl}\ \right), \quad \tau_s \in T_s, \quad s = \overline{1,k-1}, \quad k = \overline{2,\nu};$$

$$\Theta^{[k]}_s(\tau_s) = (-1)^{k-s+1}\sum_{j=s}^{k-2}\left(\ \sum_{i=j+1}^{k-1} V^{[k]}_{(3)i}(k\sigma)\Omega^{[i]}_{(s)j}(\tau_s)\ \Bigg|\ O_{(k-j-1)rl}\ \right), \quad s = \overline{1,k-2}, \quad k = \overline{3,\nu-1};$$

$$\Omega^{[k]}_{(s)j}(\tau_s) = \Big(\mathcal{H}^{[k]}_j(k\sigma) - \mathcal{H}^{[k]}_j(\tau_s+(k-s)\sigma)\Big)K^{[j]}_{(1)s}(\tau_s+(j-s)\sigma),$$

$$\Upsilon^{[k]}_{(s)}(\tau_s) = (-1)^{k-s+1}\sum_{j=s}^{k-1}\left(\ V^{[k]}_{(3)j}(k\sigma)K^{[j]}_{(1)s}(\tau_s+(j-1)\sigma)\ \Big|\ O_{(k-j-1)rl}\ \right),$$

$s = \overline{1,k-1}$, $j = \overline{s,k-1}$, $k = \overline{3,\nu}$. Матрицы $K^{[k]}_{(1)j}(t)$, $K^{[k]}_{(2)j}(t)$ и $\mathcal{H}^{[k]}_j(t)$ находятся соответственно по формулам (3.6) и (3.12).

Рассмотрим интегралы

$$\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}\begin{pmatrix}\overline{M}_j(\tau_j)\\ M_j(\tau_j)\end{pmatrix}\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r}[u^{[j]}(\tau_j)]\,d\tau_j, \quad j = \overline{1,\nu}, \tag{4.8}$$

считая $\overline{M}_\nu(\tau_\nu) \equiv O$ на T_ν.

Разобьем матрицу, фигурирующую в (4.8), на $(\nu-j+1)r+1$ блоков, каждый из которых состоит из l столбцов:

$$\begin{pmatrix}\overline{M}_j(\tau_j)\\ M_j(\tau_j)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{j,0}(\tau_j) & M_{j,1}(\tau_j) & \dots & M_{j,(\nu-j+1)r}(\tau_j)\end{pmatrix}.$$

Применяя к (4.8) формулу интегрирования по частям, с учетом последнего представления получим

$$\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}\begin{pmatrix}\overline{M}_j(\tau_j)\\ M_j(\tau_j)\end{pmatrix}\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r}[u^{[j]}(\tau_j)]\,d\tau_j=\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}\mathcal{M}_{j,0}(\tau_j)u^{[j]}(\tau_j)d\tau_j+$$

$$+\mathcal{M}_j((j-1)\sigma)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r-1}[u^{[j]}((j-1)\sigma+0)]+\mathcal{M}_j(j\sigma)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r-1}[u^{[j]}(j\sigma-0)],$$

где

$$\mathcal{M}_j(\tau_j)=\begin{pmatrix}\mathcal{M}_{j,1}(\tau_j) & \mathcal{M}_{j,2}(\tau_j) & \ldots & \mathcal{M}_{j,(\nu-j+1)r-1}(\tau_j)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{j,s}(\tau_j)=\sum_{i=s}^{(\nu-j+1)r}(-1)^{i-s}M_{j,i}^{(i-s)}(\tau_j),\quad j=\overline{1,\nu},\ \ s=\overline{0,(\nu-j+1)r}. \tag{4.9}$$

Определим матрицы

$$\mathbf{K}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu)=\begin{pmatrix}\mathcal{K}^{[\nu]}(+0) & O & O & O & \ldots & O\\ \mathbf{M}^{[\nu]} & \overline{\mathbf{M}}^{[\nu]} & \mathcal{M}_{1,0}(\tau_1) & \mathcal{M}_{2,0}(\tau_2) & \ldots & \mathcal{M}_{\nu,0}(\tau_\nu)\end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{M}^{[\nu]}=\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc}\mathcal{M}_1(+0) & O_l & \mathcal{M}_2(\sigma+0) & O_l & \ldots & \mathcal{M}_\nu((\nu-1)\sigma+0) & O_l\end{array}\right), \tag{4.11}$$

$$\overline{\mathbf{M}}^{[\nu]}=\begin{pmatrix}\mathcal{K}^{[\nu]}(\sigma-0)\\ O\end{pmatrix}+\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc}\mathcal{M}_1(\sigma-0) & O_l & \mathcal{M}_2(2\sigma-0) & O_l & \ldots & \mathcal{M}_\nu(\nu\sigma-0) & O_l\end{array}\right). \tag{4.12}$$

В этих обозначениях уравнения (4.4)–(4.6) приобретают вид

$$f_1=\mathcal{K}^{[\nu]}(+0)\,\mathrm{colon}\Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(+0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(\sigma+0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}((\nu-1)\sigma+0)]\Big),$$

$$\widetilde{f}_2=\mathbf{M}^{[\nu]}\,\mathrm{colon}\Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(+0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(\sigma+0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}((\nu-1)\sigma+0)]\Big)+$$

$$+\overline{\mathbf{M}}^{[\nu]}\,\mathrm{colon}\Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(\sigma-0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(2\sigma-0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}(\nu\sigma-0)]\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu}\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}\mathcal{M}_{j,0}(\tau_j)u^{[j]}(\tau_j)\,d\tau_j, \tag{4.13}$$

где $\widetilde{f}_2=\mathrm{colon}\,(f_2,f_3)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения леммы* 2.
Система (0.1) *полностью управляема на отрезке* I_ν *в том и только том случае, если для любого ненулевого вектора* $h\in\mathbb{R}^{(n+d)\nu}$ *выполняется условие*

$$h^\top\mathbf{K}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu)\not\equiv 0,\ \ \tau_k\in T_k,\ \ k=\overline{1,\nu}, \tag{4.14}$$

где матрица $\mathbf{K}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu)$ *находится по формуле* (4.10).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (0.1) полностью управляема на отрезке I_ν. Поскольку связь между неизвестными вектор-функциями систем (0.1) и (2.8), (2.9) осуществляется с помощью обратимых матриц:

$$x(t)=Q^{-1}\begin{pmatrix}z_{(1)}^{[0]}(t)\\ z_{(2)}^{[0]}(t)\end{pmatrix},\ t\in T_0;\ \ x(t)=Q^{-1}\begin{pmatrix}X^{[k]}(t) & O\\ -J_{(2)}(t) & E_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{(1)}^{[k]}(t)\\ z_{(2)}^{[k]}(t)\end{pmatrix},\ t\in T_k,\ k=\overline{1,\nu},$$

($X^{[k]}(t)$ — решение задачи (2.7)), то эти системы управляемы одновременно.

Управляемость системы (2.8), (2.9) гарантирует существование вектор-функций управления $u^{[k]}(\tau_k)\in\mathbb{C}^{(\nu-k+1)r}(T_k)$, $k=\overline{1,\nu}$, которые обеспечивают выполнение равенств (4.13) при любых векторах $f_1, \widetilde{f}_2$ подходящей размерности. Покажем, что в этом случае справедливо условие

$$h^\top \mathbf{K}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu) = 0 \ \ \forall \tau_k \in T_k \ \ \forall k = \overline{1, \nu} \Rightarrow h = 0,$$

где $h \in \mathbb{R}^{(n+d)\nu}$. Допустим обратное, а именно, что найдется ненулевой вектор $\overline{h}$ такой, что

$$\overline{h}^\top \mathbf{K}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu) = 0 \ \ \forall \tau_k \in T_k \ \ \forall k = \overline{1, \nu}. \tag{4.15}$$

В уравнениях (4.13) положим $\operatorname{colon}\left(f_1, \widetilde{f}_2\right) = \overline{h}$ и умножим (4.13) слева скалярно на вектор $\overline{h}$. С учетом (4.15) получим $0 \neq \overline{h}^\top \overline{h} = 0,$ что невозможно. Полученное противоречие говорит о том, что управляемость системы (0.1) влечет за собой выполнение соотношения (4.14) для любого ненулевого вектора $h \in \mathbb{R}^{(n+d)\nu}$.

Достаточность. Пусть условие (4.14) имеет место при любом ненулевом векторе h подходящей размерности.

В (4.13) управления будем искать в виде

$$u^{[k]}(\tau_k) = \sum_{i=0}^{(\nu-k+1)r} \left((\tau_k - (k-1)\sigma)^{(\nu-k+1)r+i+1} \alpha_i^{[k]} + (\tau_k - k\sigma)^{(\nu-k+1)r+i+1} \beta_i^{[k]} \right) +$$
$$+ (\tau_k - (k-1)\sigma)^{(\nu-k+1)r+1} (\tau_k - k\sigma)^{(\nu-k+1)r+1} v^{[k]}(\tau_k), \ \ \tau_k \in T_k, \ \ k = \overline{1, \nu}, \tag{4.16}$$

где $\alpha_i^{[k]}, \beta_i^{[k]} \in \mathbb{R}^l$ – некоторые векторы, а $v^{[k]}(\tau_k) \in \mathbb{C}^{(\nu-k+1)r}(T_k)$ – некоторая l-мерная функция. Тогда

$$\mathbf{d}_{(\nu-k+1)r}[u^{[k]}((k-1)\sigma + 0)] = \mathcal{E}_{(\nu-k+1)r}(-\sigma)\beta^{[k]},$$
$$\mathbf{d}_{(\nu-k+1)r}[u^{[k]}(k\sigma - 0)] = \mathcal{E}_{(\nu-k+1)r}(\sigma)\alpha^{[k]}, \tag{4.17}$$

где $\alpha^{[k]} = \operatorname{colon}\left(\alpha_0^{[k]}, \alpha_1^{[k]}, \ldots, \alpha_{(\nu-k+1)r}^{[k]}\right)$, $\quad \beta^{[k]} = \operatorname{colon}\left(\beta_0^{[k]}, \beta_1^{[k]}, \ldots, \beta_{(\nu-k+1)r}^{[k]}\right)$,

$$\mathcal{E}_{(\nu-k+1)r}(\tau_k) = \mathbf{d}_{(\nu-k+1)r}[e(\tau_k)], \tag{4.18}$$

$$e(\tau_k) = \begin{pmatrix} \tau_k^{(\nu-k+1)r+1} E_l & \tau_k^{(\nu-k+1)r+2} E_l & \ldots & \tau_k^{2(\nu-k+1)r+1} E_l \end{pmatrix}.$$

Подставив представления (4.16), (4.17) в (4.13), получим равенства

$$f_1 = \mathcal{K}^{[\nu]}(+0)\Psi^{[\nu]}(-\sigma) \operatorname{colon}\left(\beta^{[1]}, \beta^{[2]}, \ldots, \beta^{[\nu]}\right), \tag{4.19}$$

$$\widetilde{f}_2 = \left[\overline{\mathbf{M}}^{[\nu]} \Psi^{[\nu]}(\sigma) + \begin{pmatrix} \int_0^\sigma \mathcal{M}_{1,0}(\tau_1) e(\tau_1)\, d\tau_1 & \ldots & \int_{(\nu-1)\sigma}^{\nu\sigma} \mathcal{M}_{\nu,0}(\tau_\nu) e(\tau_\nu - (\nu-1)\sigma)\, d\tau_\nu \end{pmatrix} \right] \times$$
$$\times \operatorname{colon}\left(\alpha^{[1]}, \alpha^{[2]}, \ldots, \alpha^{[\nu]}\right) +$$
$$+ \left[\mathbf{M}^{[\nu]} \Psi^{[\nu]}(-\sigma) + \begin{pmatrix} \int_0^\sigma \mathcal{M}_{1,0}(\tau_1) e(\tau_1 - \sigma)\, d\tau_1 & \ldots & \int_{(\nu-1)\sigma}^{\nu\sigma} \mathcal{M}_{\nu,0}(\tau_\nu) e(\tau_\nu - \nu\sigma)\, d\tau_\nu \end{pmatrix} \right] \times$$
$$\times \operatorname{colon}\left(\beta^{[1]}, \beta^{[2]}, \ldots, \beta^{[\nu]}\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu} \int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma} \mathcal{M}_{j,0}(\tau_j)(\tau_j - (j-1)\sigma)^{(\nu-j+1)r+1} (\tau_j - j\sigma)^{(\nu-j+1)r+1} v^{[j]}(\tau_j)\, d\tau_j, \tag{4.20}$$

где $\mathcal{K}^{[\nu]}(\tau_1)$, $\overline{\mathbf{M}}^{[\nu]}$, $\mathbf{M}^{[\nu]}$, $\mathcal{M}_{j,s}(\tau_j)$ находятся из (4.7), (4.11), (4.12), (4.9) соответственно,

$$\Psi^{[\nu]}(\tau) = \operatorname{diag}\left\{ \mathcal{E}_{\nu r}(\tau), \mathcal{E}_{(\nu-1)r}(\tau), \ldots, \mathcal{E}_r(\tau) \right\}.$$

Обозначим

$$\Psi_1^{[\nu]} = \operatorname{diag}\left\{e(\tau_1), e(\tau_2-\sigma,)\ldots, e(\tau_\nu-(\nu-1)\sigma)\right\},$$

$$\Psi_2^{[\nu]} = \operatorname{diag}\left\{e(\tau_1-\sigma), e(\tau_2-2\sigma,)\ldots, e(\tau_\nu-\nu\sigma)\right\},$$

$$\Psi_3^{[\nu]}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu) = \operatorname{diag}\left\{\tau_1^{\nu r+1}\left(\tau_1-\sigma\right)^{\nu r+1}E_l, (\tau_2-\sigma)^{(\nu-1)r+1}(\tau_2-2\sigma)^{(\nu-1)r+1}E_l,\ldots\right.$$

$$\left.(\tau_\nu-(\nu-1)\sigma)^{r+1}\left(\tau_\nu-\nu\sigma\right)^{r+1}\right\}.$$

Очевидно, что матрицы $\mathcal{E}_{(\nu-k+1)r}(-\sigma)$ и $\mathcal{E}_{(\nu-k+1)r}(\sigma)$ (см. (4.18)) обратимы. Поэтому матрица

$$\overline{\Psi}^{[\nu]}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu) = \begin{pmatrix} O & \Psi^{[\nu]}(-\sigma) & O \\ \Psi^{[\nu]}(\sigma) & O & O \\ \Psi_1^{[\nu]} & \Psi_2^{[\nu]} & \Psi_3^{[\nu]}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu) \end{pmatrix}$$

будет обратима при всех значениях $\tau_k\in T_k$ $(k=\overline{1,\nu})$, за исключением $\tau_k=(k-1)\sigma$ и $\tau_k=k\sigma$.

По этой причине, с учетом свойства (4.14), для любого ненулевого вектора h подходящей размерности выполняется соотношение

$$h^\top\mathbf{K}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu)\overline{\Psi}^{[\nu]}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu)\not\equiv O,\quad \tau_k\in T_k,\quad k=\overline{1,\nu}. \tag{4.21}$$

Положим в (4.19), (4.20)

$$\operatorname{colon}\left(\alpha^{[1]},\alpha^{[2]},\ldots,\alpha^{[\nu]},\beta^{[1]},\beta^{[2]},\ldots,\beta^{[\nu]},v^{[1]}(\tau_1),v^{[2]}(\tau_2),\ldots,v^{[\nu]}(\tau_\nu)\right)=$$

$$=\left(\overline{\Psi}^{[\nu]}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\nu)\right)^\top\gamma, \tag{4.22}$$

где γ — некоторый постоянный вектор соответствующей размерности.

Свойство (4.21) гарантирует, что в результате подстановки (4.22) в (4.19), (4.20) получится система линейных алгебраических уравнений с обратимой матрицей при неизвестном векторе γ. Следовательно, из этой системы γ определится единственным образом. В свою очередь, коэффициенты $\alpha^{[k]}$, $\beta^{[k]}$ и функции $v^{[k]}(t)$ $(k=\overline{1,\nu})$, фигурирующие в (4.16), найдутся из (4.22). Таким образом, управления $u^{[k]}(\tau_k)$, обеспечивающие выполнение равенств (4.13) при любых заданных f_1 и $\widetilde{f}_2$, построены. Теорема доказана. □

Получим достаточное условие управляемости системы (0.1), более простое для проверки, чем предоставляемое теоремой 2. Для этого обратимся к соотношениям (3.1)–(3.3). Условия (4.3) с учетом (3.1)–(3.3) приобретают форму

$$\phi_1=\mathcal{K}^{[\nu]}(+0)\operatorname{colon}\left(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(+0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(\sigma+0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}((\nu-1)\sigma+0)]\right), \tag{4.23}$$

$$\phi_2=\mathcal{K}^{[\nu]}(\sigma-0)\operatorname{colon}\left(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(\sigma-0)],\mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(2\sigma-0)],\ldots,\mathbf{d}_r[u^{[\nu]}(\nu\sigma-0)]\right), \tag{4.24}$$

$$\phi_3=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}S_j(\tau_j)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)}\,u^{[j]}(\tau_j)\,d\tau_j, \tag{4.25}$$

где $\mathcal{K}^{[\nu]}(\tau_1)$ находится по формуле (4.7);

$$\phi_1=\operatorname{colon}\left(a_{(2)}^{[1]}-g_{(2)}^{[1]}(+0),a_{(2)}^{[2]}-g_{(2)}^{[2]}(\sigma+0),\ldots,a_{(2)}^{[\nu]}-g_{(2)}^{[\nu]}((\nu-1)\sigma+0)\right)-$$

$$-\Phi_{(3)}(+0)\operatorname{colon}\left(a_{(1)}^{[1]},a_{(1)}^{[2]},\ldots,a_{(1)}^{[\nu-1]}\right),$$

$$\phi_2 = \operatorname{colon}\left(b^{[1]}_{(2)} - g^{[1]}_{(2)}(\sigma-0), b^{[2]}_{(2)} - g^{[2]}_{(2)}(2\sigma-0), \ldots, b^{[\nu]}_{(2)} - g^{[\nu]}_{(2)}(\nu\sigma-0)\right) -$$

$$-\Phi_{(3)}(\sigma-0)\operatorname{colon}\left(b^{[1]}_{(1)}, b^{[2]}_{(1)}, \ldots, b^{[\nu-1]}_{(1)}\right),$$

$$\phi_3 = \operatorname{colon}\left(b^{[1]}_{(1)} - g^{[1]}_{(1)}(\sigma-0), b^{[2]}_{(1)} - g^{[2]}_{(1)}(2\sigma-0), \ldots, b^{[\nu]}_{(1)} - g^{[\nu]}_{(1)}(\nu\sigma-0)\right) -$$

$$-\int_0^{\sigma}\Phi_{(1)}(\tau_1)\operatorname{colon}\left(z^{[1]}_{(1)}(\tau_1), z^{[2]}_{(1)}(\tau_1+\sigma), \ldots, z^{[\nu-1]}_{(1)}(\tau_1+(\nu-1)\sigma)\right)d\tau_1;$$

$$\Phi_{(i)}(\tau_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} O^d & O^d & \ldots & O^d \\ -V^{[2]}_{(i)1}(\tau_1+\sigma) & O & \ldots & O \\ V^{[3]}_{(i)1}(\tau_1+2\sigma) & -V^{[3]}_{(i)2}(\tau_1+2\sigma) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ (-1)^{\nu+1}V^{[\nu]}_{(i)1}(\tau_1+(\nu-1)\sigma) & \ldots & \ldots & (-1)^{2\nu-1}V^{[\nu]}_{(i)\nu-1}(\tau_1+(\nu-1)\sigma) \end{pmatrix},$$

$\tau_1 \in T_1$, $i = 1, 3$; матрицы $V^{[k]}_{(i)j}(\tau_k)$ и векторы $g^{[k]}_{(1)}(\tau_k)$, $g^{[k]}_{(2)}(\tau_k)$ определяются из (3.7), (3.8), (3.5);

$$S_k(\tau_k) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} O^{(k-1)(n-d)}_{(r+1)l} & O_{rl} & O_{rl} & \ldots & O_{rl} \\ \hline -K^{[k]}_{(1)k}(\tau_k) & O_{rl} & O_{rl} & \ldots & O_{rl} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{K^{[k+1]}_{(1)k}(\tau_k+\sigma)} & O_{rl} & \ldots & O_{rl} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{-K^{[k+2]}_{(1)k}(\tau_k+2\sigma)} & \ldots & O_{rl} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \ldots & \vdots \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{(-1)^{\nu+k-2}K^{[\nu-1]}_{(1)k}(\tau_k+(\nu-k-1)\sigma)} & O_{rl} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{(-1)^{\nu+k-1}K^{[\nu]}_{(1)k}(\tau_k+(\nu-k)\sigma)} \end{array}\right), \tau_k \in T_k, \quad k = \overline{1, \nu}, \tag{4.26}$$

матрицы $K^{[k]}_{(1)j}(\tau_k)$ вычисляются по формулам (3.6).

Матрицу (4.26) разобьем на блоки, каждый из которых состоит из l столбцов:

$$S_k(\tau_k) = \begin{pmatrix} S_{k,0}(\tau_k) & S_{k,1}(\tau_k) & \ldots & S_{k,(\nu-k+1)r}(\tau_k) \end{pmatrix}.$$

Последовательно применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma} S_j(\tau_j)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r}[u^{[j]}(\tau_j)]d\tau_j = \int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma}\mathcal{S}_{j,0}(\tau_j)u^{[j]}(\tau_j)d\tau_j +$$

$$+\mathcal{S}_j((j-1)\sigma+0)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r-1}[u^{[j]}((j-1)\sigma+0)] + \mathcal{S}_j(j\sigma-0)\,\mathbf{d}_{(\nu-j+1)r-1}[u^{[j]}(j\sigma-0)],$$

где

$$\mathcal{S}_j(\tau_j) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{j,1}(\tau_j) & \mathcal{S}_{j,2}(\tau_j) & \ldots & \mathcal{S}_{j,(\nu-j+1)r-1}(\tau_j) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_{j,s}(\tau_j) = \sum_{i=s}^{(\nu-j+1)r}(-1)^{i-s}S^{(i-s)}_{j,i}(\tau_j), \quad j = \overline{1,\nu}, \quad s = \overline{0, (\nu-j+1)r}.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{S}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{[\nu]}(+0) & O & O & O & \ldots & O \\ O & \mathcal{K}^{[\nu]}(\sigma-0) & O & O & \ldots & O \\ \mathbf{S}^{[\nu]} & \overline{\mathbf{S}}^{[\nu]} & \mathcal{S}_{1,0}(\tau_1) & \mathcal{S}_{2,0}(\tau_2) & \ldots & \mathcal{S}_{\nu,0}(\tau_\nu) \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

где

$$\mathbf{S}^{[\nu]} = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} \mathcal{S}_1(+0) & O_l & \mathcal{S}_2(\sigma+0) & O_l & \ldots & \mathcal{S}_\nu((\nu-1)\sigma+0) & O_l \end{array} \right)$$

$$\overline{\mathbf{S}}^{[\nu]} = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} \mathcal{S}_1(\sigma-0) & O_l & \mathcal{S}_2(2\sigma-0) & O_l & \ldots & \mathcal{S}_\nu(\nu\sigma-0) & O_l \end{array} \right)$$

Тогда уравнение (4.25) можно записать в виде

$$\phi_3 = \mathbf{S}^{[\nu]} \operatorname{colon} \Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(+0)], \mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(\sigma+0)], \ldots, \mathbf{d}_r[u^{[\nu]}((\nu-1)\sigma+0)] \Big) +$$
$$+\overline{\mathbf{S}}^{[\nu]} \operatorname{colon} \Big(\mathbf{d}_{\nu r}[u^{[1]}(\sigma-0)], \mathbf{d}_{(\nu-1)r}[u^{[2]}(2\sigma-0)], \ldots, \mathbf{d}_r[u^{[\nu]}(\nu\sigma-0)] \Big) +$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu} \int_{(j-1)\sigma}^{j\sigma} \mathcal{S}_{j,0}(\tau_j) u^{[j]}(\tau_j) d\tau_j. \tag{4.28}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения леммы* 2.
Система (0.1) *полностью управляема на отрезке* I_ν, *если для любого ненулевого вектора* $h \in \mathbb{R}^{(n+d)\nu}$ *выполняется условие*

$$h^\top \mathbf{S}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu) \not\equiv 0, \ \ \tau_k \in T_k, \ \ k = \overline{1, \nu},$$

где матрица $\mathbf{S}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$ *находится по формуле* (4.27).

Суть доказательства теоремы состоит в обосновании существования управлений $u^{[k]}(\tau_k) \in \mathbb{C}^{kr}(T_k)$ $(k = \overline{1, \nu})$, обеспечивающих выполнение равенств (4.23), (4.24), (4.28) при любых векторах ϕ_i, $i = 1, 2, 3$, подходящей размерности. Оно проводится аналогично доказательству достаточности теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Campbell S. L. Comments on 2-D descriptor systems // Automatica. — 1991. — Vol. 27, № 1. — P. 189–192.

2. Gorecki H. S., Fuska P., Grabowski S., et al. Analysis and synthesis of time delay systems. New York: John Wiley & Sons, 1989.

3. Brayton R. Small signal stability criterion for electrical networks containing lossless transmission lines // IBM J. Research Development. — 1968. — № 12. — P. 431–440.

4. Fridman E. Stability of linear descriptor systems with delay : a Lyapunov based approach // J. of Mathematical Analisys and Application. — 2002. — Vol. 273, № 1. — P. 24–44.

5. Halanay A., Rasvan V. Stability radii for some propagation models // IMA J. Mathematics Control Information. — 1997. — Vol. 14. — P. 95–107.

6. Wei J., Song W. Controllability of singular systems with control delay // Automatica. — 2001. — Vol. 37, № 11. — P. 1873–1877.

7. Xu S., Dooren P. V., Stefan R., et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty // IEEE Trans. Aut. Control. — 2002. — Vol. 47, № 7. — P. 1122–1128.

8. Ji X., Su H., Chu J. An LMI approach to robust H-infinity control for uncertain singular time-delay systems // J. Contr. Appl. — 2006. — Vol. 4, № 4. — P. 361–366.

9. Li Q., Zhang Q., Wang J. Non-fragile observer-based passive control for descriptor systems with time-delay // J. Control Theory Appl. — 2009. — Vol. 7, № 3. — P. 237–242.

10. Yang F., Zhang Q. Delay-dependent H-infinity control for linear descriptor systems with delay in state // J. Contr. Appl. — 2005. — № 1. — P. 76–84.

11. Fridman E., Shaked U. H_∞-control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach // Linear Algebra and its Applications. — 2002. — Vol. 351. — P. 271–302.

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

12. Щеглова А. А. Преобразование линейной алгебро-дифференциальной системы к эквивалентной форме // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Труды IX Четаевской Междунар. конф. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. — Т. 5. — С. 298–307.

13. Щеглова А. А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 10. — С. 57–80.

Поступила в редакцию 01.03.10

A. A. Shcheglova, I. I. Matveeva

Controllability of linear degenerate difference-differential equations

We consider the initial problem for a control linear time varying system of difference-differential equations with an identically degenerate matrix coefficient of the derivative of the desired vector function in the main part. The sufficient conditions and the necessary and sufficient criterion of full controllability on some segment in the domain of definition are obtained for such a system. The analisys is based on the transformation of the main part to so-called «equivalent form» with separated «differential» and «algebraic» subsystems.

Keywords: differential algebraic equations, difference-differential equations, controllability.

Mathematical Subject Classifications: 34A09, 34K35

Щеглова Алла Аркадьевна, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, E-mail: shchegl@icc.ru
Матвеева Инесса Изотовна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4,
E-mail: matveeva@math.nsc.ru