МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

УДК 517.977

© *В. И. Ухоботов, Д. В. Гущин*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОТИПНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается нелинейная однотипная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания. Платой является норма фазового вектора. Вычислена функция цены игры и найдены оптимальные стратегии игроков.

Ключевые слова: дифференциальная игра, цена игры, стратегия.

§ 1. Пример

Первый игрок управляет точкой переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [1, с. 25]

$$\ddot{z}_1 = -C + w\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad z_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь C — постоянный вектор; w — относительная скорость отделяющихся частиц, величина $\|w\|$ которой считается постоянной, $\|w\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$; $m(t) = m_0 + m_1(t)$ — масса точки, причем m_0 — неизменяемая часть массы, $m_1(t)$ — реактивная масса. Второй игрок управляет точкой, движущейся в $\mathbb{R}^n$ с ограниченной по величине скоростью $\|\dot{z}_2\| \leqslant b$. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени p сделать расстояние $\|z_2(p) - z_1(p)\|$ как можно меньше. Цель второго игрока — противоположна.

Считаем, что первый игрок выбирает направление относительной скорости w, а также скорость $\dot{m}_1(t)$ изменения реактивной массы, величина которой удовлетворяет ограничениям $0 \leqslant -\dot{m}_1(t) \leqslant \alpha, \quad \alpha > 0$.

Обозначим

$$z = z_2 - z_1 - (p-t)\dot{z}_1 - C\frac{(p-t)^2}{2},$$

$$v = \frac{1}{b}\dot{z}_2, \quad u = -\frac{w}{\|w\|},$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_0}, \quad -\dot{m}_1(t) = \alpha\varphi, \quad a = \|w\|\frac{\alpha}{m_0}, \quad g = \frac{\alpha}{m_0}.$$

Тогда расстояние между игроками в момент времени p равняется $\|z(p)\|$. Уравнения движения примут вид

$$\dot{z} = -(p-t)a\frac{\varphi}{1+\mu}u + bv, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad \dot{\mu} = -g\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1.$$

В начальный момент времени $t = 0$ задан начальный запас реактивной массы $m_1(0) > 0$. В процессе выбора управления в каждый момент времени $t \leqslant p$ оставшийся запас реактивной массы должен быть неотрицательным. Это условие равносильно неравенству $\mu(t) \geqslant 0$.

Однотипные игры со смешанными ограничениями рассматривались в работе [2]. Мы рассмотрим более общий случай.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим игру

$$\dot{z} = -a(t,\mu,\varphi)u + b(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| \leqslant 1, \tag{2.1}$$

$$\dot{\mu} = -g(t,\mu)\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad t \leqslant p. \tag{2.2}$$

Здесь p — момент окончания игры. Первый игрок, выбирая управления u и φ, минимизирует норму $\|z(p)\|$. Второй игрок, выбирая управление v, максимизирует эту норму. Уравнение (2.2) характеризует расход ресурсов, которые первый игрок тратит на формирование своего управления. На выбор управления первого игрока, наряду с геометрическими ограничениями, накладывается еще ограничение

$$\mu(t) \geqslant 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p. \tag{2.3}$$

Предположение 1. *Функции* $a(t,\mu,\varphi) \geqslant 0$, $b(t) \geqslant 0$, $g(t,\mu) \geqslant 0$ *определены при* $t \leqslant p$, $\mu \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ *и являются непрерывными.*

Предположение 2. *При каждых* $t \leqslant p$, $\mu \geqslant 0$ *функция* $a(t,\mu,\varphi)$ *является вогнутой по* $\varphi \in [0,1]$.

Предположение 3. *Для любого начального условия* $t_0 < p$, $\mu(t_0) = \mu_0 \geqslant 0$ *и для любой измеримой функции* $\varphi : [t_0, p] \to [0,1]$ *дифференциальное уравнение* (2.2) *имеет единственное решение* $\mu = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$, *определенное при* $t_0 \leqslant t \leqslant p$.

Стратегией первого игрока является любая функция $u : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая равенству

$$\|u(t,z)\| = 1, \tag{2.4}$$

и измеримая функция $\varphi(t)$, которая строится в зависимости от начального состояния t_0, z_0, μ_0 и удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1, \quad \gamma(p; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) \geqslant 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p. \tag{2.5}$$

Стратегия второго игрока задается функцией $v : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет ограничению

$$\|v(t,z)\| \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Замечание 1. Такое определение стратегии первого игрока продиктовано следующими соображениями. Пусть в рассмотренном в предыдущем параграфе примере закон изменения массы нужно задать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости отделяющихся частиц. В этом случае приходим к понятию стратегии (2.4), (2.5).

Дадим определение движения, порожденного заданными стратегиями. Зафиксируем начальное состояние $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$, $\mu_0 \geqslant 0$. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = p \tag{2.7}$$

с диаметром $d(\omega) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} (t_{i+1} - t_i)$. Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \left(\int_{t_i}^{t} a\left(r, \mu(r), \varphi(r)\right) \, dr \right) u(t_i, z_\omega(t_i)) + \left(\int_{t_i}^{t} b(r) \, dr \right) v(t_i, z_\omega(t_i)). \tag{2.8}$$

Здесь $z_\omega(t_0) = z_0, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Оставшийся запас ресурсов $\mu(t)$ определяется формулой $\mu(t) = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant p$. Обозначим

$$L = \max_{0\leqslant\varphi\leqslant 1} \max_{t_0\leqslant r\leqslant p} \left(\max_{0\leqslant\mu\leqslant\mu_0} a(r,\mu,\varphi) + b(r) \right). \tag{2.9}$$

Тогда из ограничений (2.4) и (2.6), а также из неравенства $0 \leqslant \mu(r) \leqslant \mu_0$ при $t_0 \leqslant r \leqslant p$, получим, что $\|z_\omega(\tau) - z_\omega(t)\| \leqslant L|\tau - t|$ для всех $\tau, t \in [t_0, p]$. Из этого неравенства следует, что семейство ломаных (2.8) является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на отрезке $[t_0, p]$. По теореме Арцела [3, с. 236] из любой последовательности ломаных (2.8) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением $z(t)$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных (2.8), у которых диаметр разбиения (2.7) стремится к нулю.

§ 3. Вычисление цены игры

Функция $\varphi(t) = 0$ удовлетворяет ограничениям (2.5). Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую этим ограничениям. Подставим ее в уравнение (2.1) и рассмотрим игру с геометрическими ограничениями

$$\dot z = -a(t,\mu(t),\varphi(t))u + b(t)v, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Здесь $\mu(t) = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$. Первый игрок, выбирая управление u, минимизирует величину $\|z(p)\|$, а второй игрок, выбирая управление v, ее максимизирует. Обозначим

$$G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) = \max\{F(t_0,\mu_0,\varphi(\cdot)); \|z_0\| + f(t_0,\mu_0,\varphi(\cdot))\}, \tag{3.2}$$

$$f(t,\mu_0,\varphi(\cdot)) = \int_t^p \Big(-a(r,\mu(r),\varphi(r)) + b(r)\Big)\, dr, \tag{3.3}$$

$$F(t_0,\mu_0,\varphi(\cdot)) = \max_{t_0\leqslant\tau\leqslant p} f(\tau,\mu_0,\varphi(\cdot)). \tag{3.4}$$

Теорема 1 (см. [4]). *Для начального состояния $t_0 < p, \quad z_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \mu_0 \geqslant 0$ в игре* (3.1) *управление $u = w_0(z)$, где*

$$w_0(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\|z\|} \ \text{при}\ \|z\| > 0, \\ \forall s : \|s\| = 1 \ \text{при}\ z = 0, \end{cases}$$

обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| \leqslant G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$. Управление $v = w_0(z)$ обеспечивает выполнение противоположного неравенства $\|z(p)\| \geqslant G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$.

Из этой теоремы следует, что функция (3.2) является функцией цены [5, с. 87] в игре (3.1). Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$G(t_0, z_0, \mu_0) = \inf_{\varphi(\cdot)} G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot)),$$
$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1 \ \text{при}\ t_0 \leqslant t \leqslant p, \quad \gamma(p; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot) \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Если задача (3.5) имеет решение $\varphi_0 : [t_0, p] \to [0, 1]$, то, как следует из теоремы 1, функция $G(t_0, z_0, \mu_0)$ является ценой в исходной игре. В этом случае оптимальная стратегия первого игрока имеет вид $u_0(t, z) = w_0(z), \quad \varphi = \varphi_0(t)$, а оптимальная стратегия второго игрока равна $v_0(t, z) = w_0(z)$.

Теорема 2. *При любых* $t_0 \leqslant p, \quad z_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \mu_0 \geqslant 0$ *решение* $\varphi_0(t)$ *в задаче* (3.5) *существует.*

Доказательство. Функция $\varphi(t) = 0$, удовлетворяет ограничениям в задаче (3.5). Из формул (3.2), (3.3) следует, что

$$G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) \geqslant 0$$

для любой измеримой функции $\varphi : [t_0, p] \to [0, 1]$. Поэтому нижняя грань в задаче (3.5) существует. Это значит, что существует последовательность измеримых функций $\varphi_m(t)$, удовлетворяющая ограничениям в задаче (3.5), такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \max\{F_m(t_0); \|z_0\| + f_m(t_0)\} = G(t_0, z_0, \mu_0). \tag{3.6}$$

Здесь обозначено

$$\mu_m(t) = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)),$$

$$f_m(t) = \int_t^p -a\Big(r, \mu_m(r), \varphi_m(r)) + b(r)\Big)\, dr,$$

$$F_m(t) = \max_{t\leqslant\tau\leqslant p} f_m(\tau). \tag{3.7}$$

Каждая из функций $f_m(t)$ удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с константой L (2.9). Каждая функция $\mu_m(t)$ является решением дифференциального уравнения (2.2) с $\varphi = \varphi_m(t)$ и с начальным условием $\mu_m(t_0) = \mu_0$. Поэтому каждая функция $\mu_m(t)$ удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с константой

$$G = \max_{t_0\leqslant t\leqslant p}\, \max_{0\leqslant\mu\leqslant\mu_0} g(t, \mu).$$

Таким образом, семейство функций $f_m(t)$ и $\mu_m(t)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на отрезке $[t_0, p]$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности и применяя теорему Арцела, можем считать, что $f_m(t) \to f(t), \quad \mu_m(t) \to \mu(t)$ при $m \to \infty$ равномерно на отрезке $[t_0, p]$. Из равномерной сходимости и из формулы (3.7) следует, что

$$F_m(t_0) = \max_{t_0\leqslant\tau\leqslant p} f_m(\tau) \to \max_{t_0\leqslant\tau\leqslant p} f(\tau) = F(t_0).$$

Отсюда и из (3.6) получим, что

$$\max\{F(t_0); \|z_0\| + f(t_0)\} = G(t_0, z_0, \mu_0). \tag{3.8}$$

Предельные функции $f(t)$ и $\mu(t)$ удовлетворяют на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица. Следовательно, у них почти всюду существуют производные.

Введем в рассмотрение многозначную функцию

$$Q(t, \mu) = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1 = a(t, \mu, \varphi) - b(t),\ q_2 = -g(t, \mu)\varphi,\ \forall\varphi \in [0, 1]\}. \tag{3.9}$$

Из непрерывности функций $a(t, \mu, \varphi), \quad b(t)$ и $g(t, \mu)$ следует, что многозначная функция (3.9) полунепрерывно сверху зависит от $t \in [t_0, p]$ и $\mu \in [0, \mu_0]$. Это значит, что для каждых таких чисел t и μ и для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(t, \mu, \varepsilon)$ такое, что для всех $|t - \tau| < \delta, \quad \tau \leqslant p, \quad |\mu - \nu| < \delta, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \mu_0$ выполнено включение

$$Q(\tau, \nu) \subset Q(t, \mu) + \varepsilon S. \tag{3.10}$$

Здесь обозначено $S = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1^2 + q_2^2 \leqslant 1\}$. Обозначим $y(t) = (f(t), \mu(t))$ и $y_m(t) = (f_m(t), \mu_m(t)), \quad m \geqslant 1$. Тогда почти всюду на отрезке $[t_0, p]$ существуют производные $\dot y(t)$ и

$\dot{y_m}(t)$, $\quad m \geqslant 1$. Возьмем точку $t \in [t_0, p)$, в которой существуют эти производные. Зафиксируем число $h > 0$ и $t + h \leqslant p$. Тогда

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{m\to\infty} \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \dot{y}_m(t+rh)\,dr. \tag{3.11}$$

Из формул (3.7) и (3.9) следует, что $\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t+rh, \mu_m(t+rh))$ для почти всех $r \in [0,1]$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда существует число $\delta = \delta(t, \mu(t), \varepsilon) > 0$ такое, что $\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S$, как только $0 < h < \delta, \quad |\mu(t) - \mu_m(t+rh)| < \delta$.

Далее, $|\mu(t) - \mu_m(t+rh)| \leqslant |\mu(t) - \mu_m(t)| + |\mu_m(t) - \mu_m(t+rh)| \leqslant |\mu(t) - \mu_m(t)| + Gh$. Существует номер N такой, что $|\mu(t) - \mu_m(t)| < \frac{\delta}{2}$ при $m > N$. Возьмем $0 < h < \min(\delta; \frac{\delta}{G}) = h_0$. Тогда, учитывая включение (3.10), получим

$$\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad m > N, \quad 0 < h < h_0.$$

Применяя понятие интеграла от многозначной функции [6], получим, что при $m > N$ и $0 < h < h_0$

$$\frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \in \int_0^1 \Big(Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S\Big)\,dr = \operatorname{co} Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S. \tag{3.12}$$

Здесь $\operatorname{co} Q$ — выпуклая оболочка множества Q. Поскольку множество, стоящее в правой части (3.12), является компактом, то, используя формулу (3.11), получим, что

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \in \operatorname{co} Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S.$$

Устремим $h \to 0+$. Тогда, учитывая, что ε — произвольное положительное число, получим включение $\dot{y}(t) \in \operatorname{co} Q(t, \mu(t))$. Отсюда и из теоремы Каратеодори [7, с. 9] следует, что

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i a(t, \mu(t), \varphi_i) - b(t), \quad \dot{\mu}(t) = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i g(t, \mu(t)) \varphi_i \tag{3.13}$$

при некоторых $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Из этих формул, применяя лемму о выборе А. Ф. Филиппова [6], получим, что существуют измеримые на отрезке $[t_0, p]$ функции $\lambda_i(t) \geqslant 0$, $\varphi_i(t) \in [0,1]$, $\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = 1$, которые при почти всех $t \in [t_0, p]$ удовлетворяют равенствам (3.13). Обозначим

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t) \varphi_i(t) \in [0,1], \quad t_0 \leqslant t \leqslant p.$$

Тогда из (3.13), используя вогнутость по φ функции $a(t, \mu, \varphi)$, получим

$$\dot{\mu}(t) = -g(t, \mu(t)) \varphi_0(t), \quad \dot{f}(t) \leqslant a(t, \mu(t), \varphi_0(t)) - b(t). \tag{3.14}$$

Обозначим

$$\mu_0(t) = \mu(t), \quad f_0(t) = \int_t^p \Big(-a(r, \mu_0(r), \varphi_0(r)) + b(r)\Big)\,dr.$$

Тогда из (3.14) следует, что $\dot{f}(t) \leqslant \dot{f}_0(t)$ при $t \leqslant p$. Отсюда и из равенства $f(p) = f_0(p) = 0$ получим, что $f(t) \geqslant f_0(t)$ при $t \leqslant p$. Учитывая формулы (3.2)—(3.4) и (3.8), будем иметь неравенство $G(t_0, z_0, \mu_0) \geqslant G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi_0(\cdot))$. Следовательно, функция $\varphi_0(t)$ является решением задачи (3.5). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 319 с.
2. Ухоботов В. И. Однотипная линейная игра со смешанными ограничениями на управления // Прикладная математика и механика. — 1987. — Т. 51, вып.2. — С. 179–185.
3. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
4. Ухоботов В. И. Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным управлением // Вестник Челябинского университета. Серия математика, механика. — 1996. — Вып. 1. — С. 178–184.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
6. Hermes H. The Generalized Differential Equation $\dot{x} \in \mathbb{R}(t, x)$ // Advances in Mathematics. — 1970, № 4. — P. 149–169.
7. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Поступила в редакцию 01.03.10

V. I. Ukhobotov, D. V. Gushchin

About one class of similar differential game with mixed limitations

We consider a nonlinear similar differential game with fixed timing ending. A price is a norm of phase vector. We evaluate a function of game value and optimal strategies of players.

Keywords: differential game, game value, strategy.

Mathematical Subject Classifications: 49N75

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454136, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, E-mail: ukh@csu.ru
Гущин Денис Васильевич, аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. 250-летия Челябинска, 67, 150
E-mail: off_side@mail.ru